Štefan Porubský

Über die Dichtigkeit der Werte multiplikativer Funktionen

Mathematica Slovaca, Vol. 29 (1979), No. 1, 69--72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136200

Math. Slovaca 29, 1979, No. 1, 69—72

ÜBER DIE DICHTIGKEIT DER WERTE MULTIPLIKATIVER FUNKTIONEN

ŠTEFAN PORUBSKÝ

Sei $\varphi_\alpha(n)=n^\alpha\prod_{p\mid n}(1-p^{-\alpha})$ und $\sigma_\alpha(n)=\sum_{d\mid n}d^\alpha$. In [4] benützte J. Mináč eine schöne Idee, das wohlbekannte Resultat nachzuweisen, dass die Mengen $\left\{\frac{\varphi_1(n)}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n}{\sigma_1(n)}\right\}$, wo in beiden Fällen n die Menge der quadratfreien Zahlen durchläuft, dicht im Interval (0,1) liegen. Es ist das Zies dieser Arbeit zu zeigen, dass durch eine Modifizierung der Idee von Mináč allgemeinere Resultate bewiesen werden können, als das in [4]. Der Beweis von Mináč stützt sich auf ein Resultat von Banerjee und Lahiri [2], das wir durch eine Verallgemeinerung von Šalát oder durch den Kakeyaschen, bzw. durch den Riemannschen Umordnungssatz ersetzen.

Hilfssatz 1. [5, Theorem 1.2]. *Sei a_n reel, $a_n\to 0$ und Σa_n eine divergente Reihe mit*

$$s=\sum_{a_n<0}a_n\,,\qquad S=\sum_{a_n>0}a_n\,.$$

Dann existiert zu jedem x aus dem Interval (s,S) eine Teilreihe Σa_{n_k} von Σa_n derart, dass $\Sigma a_{n_k}=x$.

Es ist klar, dass wegen der Divergenz der Reihe Σa_n mindestens eine von den Relationen $s=-\infty$, $S=\infty$ gilt.

Hilfssatz 2 [3]. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$, $0<S<\infty$, $a_n\leqq\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$ $(n=1,2,\ldots,)$, $a_1\geqq a_2\geqq\ldots>0$. Dann existiert zu jedem x aus dem Interval* $(0,S]$ *eine Teilreihe Σa_{n_k} von Σa_n derart, dass $\Sigma a_{n_k}=x$.*

Ist P eine Menge von Paarweise teilerfremden Zahlen, dann bezeichnen wir mit Q_P die Menge aller natürlichen Zahlen, die als produkt verschiedener Zahlen von P darstellbar sind, z.B., falls P die Menge sämtlicher Primzahlen ist, Q_P besteht aus quadratfreien Zahlen.

Satz 1. *Sei $P = \{t_i\}$ eine Menge von paarweise teilerfremden Zahlen und $f(n)$ eine positive multiplikative Funktion, für die gerade eine von der Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f(t_k) - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (f(t_k) - 1)^2$$

divergiert. Dann ist die Menge $f(Q_P) = \{f(n);\, n \in Q_P\}$ dicht im Interval (A, B), wobei die Zahlen A, B durch

$$A = \inf \{f(Q_P)\}, \qquad B = \sup \{f(Q_P)\}$$

gegeben sind.

Beweis. Zuerst untersuchen wir das unendliche Produkt

(1)
$$\prod_{k-1}^{\infty} f(t_k) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + (f(t_k) - 1)].$$

Aus unseren Voraussetzungen [1, S. 109—110] folgt die Divergen dieses unendlichen Produktes. Weiter folgt aus fer Konvegenz einer der beiden Reihen, das $\lim\limits_{k \to \infty} f(t_k) = 1$. Definiert man nun die Folge a_k durch

(2)
$$a_k = \log f(t_k),$$

dann ist $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, und die Reihe Σa_k divergiert.

Jetzt wenden wir den Hilfssatz 1 auf die Reihe Σa_k an. Offensichtlich, $s = \log A$ und $S = \log B$. Dann existiert zu jedem $t \in (A, B)$ eine Teilreihe $\Sigma \log f(t_{k_n})$ von $\Sigma \log f(t_k)$ so, dass

$$\log t = \Sigma \log f(t_{k_n}) = \log \Pi f(t_{k_n})$$

und die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar.

Es folgt aus dem Beweis, dass für (A, B) nur diese drei Möglichkeiten $(0, B)$, $(0\ \infty)$, (A, ∞) in Betracht kommen.

Der Beweis des Satzes 1 lässt sich fast wörtlich auf den nachfolgenden Fall übertragen.

Satz 2. *Sei $P = \{t_i\}$ eine Menge von paarweise teilerfremden Zahlen und $f(n)$ eine positive multiplikative Funktion, für die*

(i) $\lim\limits_{k \to \infty} f(t_k) = 1$ *und für jedes k $f(t_k) > 1$ [bzw. für jedes k $f(t_k) < 1$],*

(ii) *die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f(t_k) - 1)$ divergiert.*

Dann ist die Menge $f(Q_P)$ dicht im Interval $(1, \infty)$ [bzw. im $(0, 1)$].

Korollar. *Sei $P=\{p_i^{a_i}\}$ eine Menge von positiven Potenzen verschiedener Primzahlen, für die die Reihe Σp_i^{-1} divergiert und $\alpha \in (0, 1]$. Dann sind die Mengen*

$$\left\{\frac{\varphi_\alpha(n)}{n^\alpha};\ n \in Q_P\right\},\quad \left\{\frac{n^\alpha}{\sigma_\alpha(n)};\ n \in Q_P\right\},\quad \left\{\frac{\varphi_\alpha(n)}{\sigma_\alpha(n)};\ n \in Q_P\right\}$$

dicht im Interval (0, 1).

Man kann sich leicht überzeugen, warum Satz 2 nicht eine Folgerung des Satzes 1 ist. Diese Tatsache folgt auch aus dem Korollar für $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Die folgenden Sätze 3 und 4 zu beweisen, können wir wieder das unendliche Produkt (1) und die entsprechende Reihe (2) bilden und statt des Hilfssatzes 1 den Riemannschen Umordnungssatz oder den Hilfssatz 2 benützen.

Satz 3. *Sei $P=\{t_i\}$ eine Menge von paarweise teilerfremden Zahlen und $f(n)$ eine positive multiplikative Funktion, für die die Reihe $\Sigma(f(t_k)-1)$ nicht — – absolut konvergen ist. Dann ist die Menge $f(Q_P)$ dicht im Interval* $(0, \infty)$.

Korollar. *Die Werte*

$$\Phi_\chi(n)=\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) \quad oder \quad \Theta_\chi(n)=\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right)$$

sind dicht im Interval $(0, \infty)$ *für jeden reellen von dem Hauptcharakter verschiedenen Charakter* χ (mod k), *wobei n die quadratfreien Zahlen durchläuft.*

Satz 4. *Sei $P=\{t_i\}$ eine Menge von paarweise teilerfremden Zahlen und $f(n)$ eine positive multiplikative Funktion, für die*

(i) $f(t_1) \geqq f(t_2) \geqq f(t_3) \geqq \ldots > 1$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(f(t_k)-1)<\infty$,

(iii) $f(t_n) \leqq \prod_{k=1}^{\infty} f(t_{n+k}),\ n=1, 2, \ldots.$

Dann ist die Menge $f(Q_P)$ dicht im Interval $\left(1, \prod_{k=1}^{\infty} f(t_k)\right)$.

LITERATUR

[1] BROMWICH, T. J. I'A.: An Introduction to the Theory of Infinite Series. 2nd ed., London 1926.

[2] BANERJEE, C. R.—LAHIRI, B. K.: On subseries of divergent series. Amer. Math. Monthly, 71, 1964, 767—768.

[3] KAKEYA, S.: On the partial sums of an infinite series. Science Reports of the Tôhoku Imperial University (1), 3, 1914, 159—163.

[4] MINÁČ, J.: O hustote hodnôt istých aritmetických funkcií. In: Matematické obzory 12, 1978, 41—45.
[5] ŠALÁT, T.: On subseries of divergent series. Mat. Čas., 18, 1968, 312—338.

Eingegangen am 6. 6. 1977

Matematický ustav SAV
ul. Obrancov mieru 49
886 25 Bratislava

О ПЛОТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Штефан Порубски

Резюме

В работе даются четыре достаточных условия для того, чтобы значения положительной мультипликативной функции f было плотны в ее области значений. Доказательства основаны на факте, что существует множество $\{t_i\}$ взаимно простых натуральных чисел таких, что

$$\frac{1}{f(t_i)} \to 0$$

но так медленно, что

$$\sum \frac{1}{f(t_i)} = \infty .$$