Otokar Grošek

Топология на полугруппах индуцированная эндоморфизмом

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 2, 217--223

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136176

Math. Slovaca 28, 1978, No. 2, 217—223

ТОПОЛОГИЯ НА ПОЛУГРУППАХ ИНДУЦИРОВАННАЯ ЭНДОМОРФИЗМОМ

ОТОКАР ГРОШЕК

В работе [2] Шулка определил при помощи операции замыкания топологию в полугруппе S.

Пусть M – непустое подмножество полугруппы S. Обозначим через $N(M)$ множество всех элементов $x \in S$, для которых существует такое натуральное число $n(x)$, что $x^{n(x)} \in M$. Отображением $M \to N(M)$ определена операция замыкания. Если полугруппа S – коммутативная связка, то соответствующая топология является дискретной топологией.

В этой работе определим отображения u подмножеств M полугруппы S так, что $M \to uM$ индуцирует на полугруппе S топологию, которая в случае коммутативной связки не необходимо дискретная.

Напомним, что связка – полугруппа, в которой все элементы идемпотенты.

В определении 1 будем заниматься только коммутативной связкой. В определении 2 обобщим определение замыкания на случай произвольной полугруппы.

Определение 1. *Пусть S – коммутативная связка и M – непустое подмножество в S, T – эндоморфизм в S. Обозначим $\bar{M}$ множество всех элементов $x \in S$, для которых существует неотрицательное целое число $n = n(x)$ так, что $x \cdot Tx \cdot T^2x \ \dots \ T^nx \in M$. Если $M = \emptyset$, то определяем $\bar{M} = \emptyset$.*

В следующих рассуждениях будем обозначать $x \cdot Tx \cdot T^2x \dots T^nx$ знаком

$$\prod_{i=0}^{n} T^ix .$$

Лемма 1. *Отображение u: $M \to \bar{M}$ обладает свойствами замыкания, т.е. справедливо:*

а) $M \subset \bar{M}$;

б) $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 = \overline{M_1 \cup M_2}$;

в) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$;

г) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Доказательство пунктов а) б) г) просто и вытекает непосредственно из определения 1. Следовательно, докажем только пункт в).

На основании пункта а) имеем $\bar{M} \subset \bar{\bar{M}}$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \bar{\bar{M}}$, тогда существует целое число $k = k(x)$ так, что

$$\prod_{i=0}^{k} T^i x = u \in \bar{M}.$$

Потому что $u \in \bar{M}$, существует число $n = n(x)$ так, что

$$\prod_{j=0}^{n} T^j u \in M.$$

Кроме того,

$$\prod_{j=0}^{n} T^j u = u \cdot Tu \ldots T^n u = \left(\prod_{i=0}^{k} T^i x\right) \cdot T\left(\prod_{i=0}^{k} T^i x\right) \ldots T^n\left(\prod_{i-0}^{k} T^i x\right) =$$

$$= x \cdot Tx \ldots T^m x = \prod_{i=0}^{m} T^i x, \quad \text{где} \quad m = n + k.$$

При этом мы значительно пользовались тем, что S – коммутативная связка.

Примечание 1. Из леммы 1 вытекает, что отображение u: $M \to \bar{M}$ (при фиксированном T) определяет в S топологию. Эту топологию будем обозначать τ.

Примечание 2. Замкнутыми множествами в топологии τ являются все подмножества A из S, для которых выполняется следующее: Если $y \in S - A$, то

$$\prod_{k=0}^{n} T^k y \in S - A$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Обозначим $O(x) = \{x, x \cdot Tx, x \cdot Tx \cdot T^2 x, \ldots\}$ и $B = S - O(x)$. Множество $O(x)$ – подполугруппа коммутативной связки S. Ввиду этого для всякого $y \in B$ и всякое конечное произведение

$$\prod_{k=0}^{n} T^k y \notin B.$$

Следовательно, B – замкнутое и $O(x)$ – открытое множество.

В качестве базиса окрестностей можно взять систему всех подмножеств вида $O(x) = \{x, x \cdot Tx, \ldots\}$, где x пробегает все элементы из S. Окрестность $O(x)$ – это наименьшая окрестность, содержащая элемент $x \in S$.

Следующий пример покажет, что топология τ не обязательно типа T_1 (а значит, ни типа T_2).

Пример 1. Пусть S – множество натуральных чисел с умножением $a \circ b = \max\{a, b\}$. Пусть T – эндоморфизм, определеный равенством $Ta = a + q$, где q – фиксированное натуральное число.

В этой полугруппе имеют силу равенства:

$$\prod_{i=0}^{n} T^i a = T^n a = a + qn \quad \text{и} \quad a + qn \in O(a).$$

Следовательно, к точке a невозможно построить окрестность, которая не содержит точку $a + q$. Поэтому наша топология τ не является T_1 – топологией.

Следующая теорема показывает, в каком взаимном соотношении относительно множественного включения являются окрестности $O(x)$.

Теорема 1. *Если $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$, то симметрическая разность $O(x) \triangle O(y)$ имеет только конечное число элементов.*

Доказательство. Так как $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$, существуют числа m, $n \geqq 0$ так, что $x \cdot Tx \; \dots \; T^m x \; = \; y \cdot Ty \; \dots \; T^n y$. Покажем, что из этого равенства вытекает $x \cdot Tx \; \dots \; T^{m+k} x \; = \; y \cdot Ty \; \dots \; T^{n+k} y$ для всех $k \geqq 0$. Пусть

$$\prod_{i=0}^{m} T^i x = \prod_{j=0}^{n} T^j y,$$

то выполняется:

$$T\left(\prod_{i=0}^{m} T^i x\right) = T\left(\prod_{j=0}^{n} T^j y\right), \quad \text{т.е.} \quad \prod_{i=1}^{m+1} T^i x = \prod_{j=1}^{n+1} T^j y;$$

$$T^2\left(\prod_{i=0}^{m} T^i x\right) = T^2\left(\prod_{j=0}^{n} T^j y\right), \quad \text{т.е.} \quad \prod_{i=2}^{m+2} T^i x = \prod_{j=2}^{n+2} T^j y;$$

$$\vdots$$

$$T^k\left(\prod_{i=0}^{m} T^i x\right) = T^k\left(\prod_{j=0}^{n} T^j y\right), \quad \text{т.е.} \quad \prod_{i=k}^{m+k} T^i x = \prod_{j=k}^{n+k} T^j y.$$

Перемножением левых и правых частей этих равенств, используя идемпотентность и коммутативность элементов S, получаем: $(x \cdot Tx \dots T^m x)$ $(Tx \cdot T^2 x \dots T^{m+1} x) \; \dots \; (T^k x \cdot T^{k+1} x \dots T^{m+k} x) \; = \; (y \cdot Ty \dots T^n y) \; \cdot \; (Ty \cdot T^2 y \dots T^{n+1} y)$ $\dots \; (T^k y \cdot T^{k+1} y \dots T^{n+k} y)$, т.е. $x \cdot Tx \cdot T^2 x \dots T^{m+k} x \; = \; y \cdot Ty \cdot T^2 y \dots T^{n+k} y$. Следовательно, $\operatorname{card} O(x) \triangle O(y) \; \leqq \; m + n + 2$.

Теорема 2. *Пусть S – коммутативная связка. Тогда топология τ является T_0 – топологией.*

Доказательство. А) Пусть $x \neq y$. Если $O(x) \cap O(y) = \emptyset$, то точка x имеет окрестность, которая не содержит точку y, а точка y имеет окрестность, которая не содержит x.

б) Пусть $x \neq y$ и $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Покажем, что или $x \notin O(y)$, или $y \notin O(x)$. Предположим противное, что выполняется одновременно $x \in O(y)$ и $y \in O(x)$. Тогда существуют целые числа k, t так, что $x = y \cdot Ty \dots T^k y$ и $y = x \cdot Tx \dots T^t x$. Из первого соотношения получаем $x \cdot y = y^2 \cdot Ty \dots T^k y = y \cdot Ty \dots T^k y = x$. Из второго соотношения получаем $x \cdot y = x^2 \cdot Tx \dots T^t x = x \cdot Tx \dots T^t x = y$. Следовательно, $x = y$, что противоречит предположению. Значит, из всяких разных двух точек по крайней мере у одной существует окрестность, не содержащая вторую точку, т.е. τ является T_0 – топологией.

Теорема 3. *Пусть S – коммутативная связка. Тогда следующие три утверждения взаимно эквивалентны:*

а) *Топология τ является T_1 – топологией;*

б) *Топология τ является T_2 – топологией;*

б) *Топология τ является дискретной топологией.*

Доказательство. Пусть τ является T_1 – топологией. Пусть x, y – произвольные разные элементы из S. По условию пункта а) существует окрестность O_1 точки x, не содержащая y, и окрестность O_2 точки y, не содержащая x. Но тогда $y \notin O(x)$ и $x \notin O(y)$. Выберем специально $y = x \cdot Tx$. Тогда $O(x) = \{x, x \cdot Tx, \dots\}$ и $O(y) = \{x \cdot Tx, \dots\}$. Если $x \neq y$, т.е. $x \neq x \cdot Tx$, то $y = x \cdot Tx \in O(x)$, что противоречит предположению о T_1 – топологии. Из этого следует, что $x \cdot Tx = x$ для всех $x \in S$. Если это равенство выполняется, то τ является дискретной топологией.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием, для того чтобы топология τ была дискретной на коммутативной связке, является выполнение равенства $x \cdot Tx = x$ для всех $x \in S$.*

Определение 1 можно естественным образом продолжить на случай произвольной полугруппы.[1]

Определение 2. *Пусть S – полугруппа, M – непустое подмножество и T – эндоморфизм, определенный на S. Обозначим $\bar{M}$ множество всех элементов $x \in S$, для которых существует конечное количество неотрицательных целых чисел $i_1, i_2, \dots, i_k$ (не необходимо различных) так, что $T^{i_1}x \cdot T^{i_2}x \dots T^{i_k}x \in M$. Если $M = \emptyset$, то определяем $\bar{M} = \emptyset$.*

В следующих рассуждениях будем обозначать $T^{i_1}x \cdot T^{i_2}x \dots T^{i_k}x$ знаком

$$\prod_{j=1}^{k} T^{i_j}x .$$

[1] На это обобщение обратил мое внимание Ш. Шварц.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $M \subset \bar{M}$;

б) $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 = \overline{M_1 \cup M_2}$;

в) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$;

г) $\bar{\emptyset} = \emptyset$;

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1. Топологию, индуцированную этой операцией замыкания, будем обозначать σ.

Примечание 3. Замкнутыми множествами в топологии σ будут все подмножества A из S, для которых выполняется следующее: Если $y \in S - A$, то для всех конечных произведений

$$\prod_{j=1}^{k} T^{i_j} y \in S - A .$$

Обозначим $P(y)$ наименьшую полугруппу, образованную элементами множества $\{y, Ty, T^2y, \ldots\}$, и $B = S - P(y)$. Покажем, что B – замкнутое множество. Предположим противное, что существует элемент $w \in \bar{B} - B$. Тогда $w \notin B$ и одновременно существуют числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ так, что $z = T^{i_1}w \cdot T^{i_2}w \ldots T^{i_k}w \in B$. Так как $w \in P(y)$, существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ так, что

$$w = \prod_{s=1}^{n} T^{t_s} y .$$

Тогда

$$z = T^{i_1}\left(\prod_{s=1}^{n} T^{t_s}y\right)\ldots T^{i_k}\left(\prod_{s=1}^{n} T^{t_s}y\right) = T^{t_1+i_1}y \cdot T^{t_2+i_1}y \ldots T^{t_n+i_k}y \in P(y),$$

что противоречит предположению $z \in B$. В качестве базыса окрестностей можно взять все полугруппы вида $P(y)$ где y пробегает все элементы из S. Полугруппа $P(y)$ – это наименшая окрестность, содержащая элемент $y \in S$.

Следующий элементарный пример покажет, что топология σ в общности не является T_0 – топологией даже на коммутативной связке.

Пример 2. Пусть $S = \{x, y, 0\}$ – коммутативная связка с нулевым элементом, причем $x \cdot y = 0$. Определим эндоморфизм T следующими равенствами: $Tx = y$, $Ty = x$, $T0 = 0$. Тогда для окрестностей элементов из S справедливо: $P(x) = P(y) = S$, $P(0) = \{0\}$.

Пример 3. Пусть S – мультипликативная полугруппа натуральных чисел и эндоморфизм определен равенством $Ta = a^2$, $a \in S$. Покажем, что в этом случае σ является T_0 – топологией и не является T_1 – топологией.

В этом случае $P(a)$ моногенная полугруппа, образованная элементом a, т. е. $P(a) = \{a, a^2, \ldots\}$. Пусть $a < b$. Если $b = a^k$, то $a \notin P(b)$. Если не существует число k так, что $a^k = b$, то $b \notin P(a)$. Следовательно, σ является в этом случае T_0 – топологией.

Так как $n^2 \in P(n)$, топология σ не является в этом случае T_1 – топологией.

Теорема 4. а) *Если σ является T_0 – топологией, то для всех x, для которых $x \neq Tx$, и всех $n > 1$ выполняется $x \neq T^n x$.*

б) *Если для всех $x \in S$ и для любого количества целых неотрицательных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k$ таких, что $i_1 \geqq 1$ при $k = 1$, выполняется*

$$\prod_{j=1}^{k} T^{i_j} x \neq x,$$

то σ является T_0 – топологией.

Доказательство. а) Предположим противное, что существует $x \in S$ так, что $x \neq Tx$, $x = T^n x$. Тогда для окрестностей элементов x соответственно Tx имеет место равенство $P(x) = P(Tx)$. Следовательно, σ не является T_0 – топологией, что противоречит предположению.

б) Предположим противное, что существуют два неодинаковых элемента x, $y \in S$ так, что $y \in P(x)$ и $x \in P(y)$. В силу этого существуют числа $i_1, i_2, \ldots, i_k, t_1, t_2, \ldots, t_s$, соответствующие предположению теоремы так, что $x = T^{i_1} y \cdot T^{i_2} y \ldots T^{i_k} y$ и $y = T^{t_1} x \cdot T^{t_2} x \ldots T^{t_s} x$. Из первого равенства получим

$$T^{t_m} x = \prod_{j=1}^{k} T^{i_j + t_m} y$$

а из второго равенства получим

$$T^{i_j} y = \prod_{m=1}^{s} T^{t_m + i_j} x .$$

Следовательно, $x = T^{t_1 + i_1} x \cdot T^{t_2 + i_1} x \ldots T^{t_s + i_k} x$ и $y = T^{i_1 + t_1} y \cdot T^{i_2 + t_1} y \ldots T^{i_k + t_s} y$, а это противоречит предположению. Значит, из всяких разных двух точек по крайней мере у одной имеется окрестность, которая не содержит второй, т.е. σ является T_0 – топологией.

Примечание 4. Если T – тождественный автоморфизм, то $P(y)$ – моногенная полугруппа, образованная элементом $y \in S$. Но это случай, который был исследован в работе [2].

Теорема 5. *Пусть S – полугруппа. Тогда следующие три утверждения взаимно эквивалентны:*

а) *Топология σ является T_1 – топологией;*

б) *Топология σ является T_2 – топологией;*

б) *Топология σ является дискретной топологией.*

Доказательство. Пусть σ является T_1 – топологией. Если $y = Tx \neq x$, то $y \in P(x)$, что противоречит предположению о T_1 – топологии. Следовательно, для всех $x \in S$ должно выполняться равенство $x = Tx$. Тогда $P(x)$ – моногенная полугруппа, образованная элементом x, т.е. $P(x) = \{x, x^2, \ldots\}$. Кроме того,

$x^2 \in P(x)$. Если указанная топология является T_1 – топологией, то должно иметь место $x^2 = x$, т.е. $P(x) = \{x\}$ и σ является дискретной топологией.

Следствие. *Для того чтобы топология σ была дискретной на полугруппе S, необходимо и достаточно, чтобы S была связка (не необходимо коммутативная) и T – тождественный автоморфизм в S.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] КЕЛЛИ, ДЖ. Л.: Общая топология. Наука, Москва 1968.
[2] ШУЛКА, Р.: Радикалы и топология в полугруппах. Mat.-fyz. Čas., 15, 1965, 3–13.

Поступило 13. 1. 1977

Katedra matematiky
Elektrotechnickej fakulty SVŠT
Gottwaldovo nám. 19
884 20 Bratislava

TOPOLOGY ON SEMIGROUPS GENERATED BY ENDOMORPHISM

Otokar Grošek

Summary

Let S be a semigroup, T an endomorphism defined on S and M a nonvoid subset in S.

The set of all elements $x \in S$ for which there exists nonnegatives intigers $i_1, i_2, \ldots, i_k$ so that $\prod_{i=1}^{k} T^{i_i}x \in M$, will be denoted by $\bar{M}$.

The mapping $M \to \bar{M}$ is a closure operator and with it there is associated a topology denoted by σ.

The algebraic characterization of closed and open sets and of the complete system of the neighbourhoods of this topology is given.

Let S be a commutative band. Then this topology is a T_0 — topology.

For this topology the following statements are equivalent:

a) it is a T_1 — topology;

b) it is a T_2 — topology;

c) it is a discrete topology.

Let σ is a T_0 — topology, then for all x for which $x \neq Tx$ and for all $n > 1$ there is $T^n x \neq x$.

Let for all $x \in S$ and for arbitrary nonnegative intigers $i_1, i_2, \ldots, i_k$ such that $i_1 \geqq 1$ for $k = 1$ $\prod_{i=1}^{k} T^{i_i}x \neq x$; then σ is a T_0 — topology.