Eduard Boďa

Zur Berechnung von Schnittmultiplizitäten durch Längen

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 2, 173--179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136173

Math. Slovaca 28, 1978, No. 2, 173—179

ZUR BERECHNUNG VON SCHNITTMULTIPLIZITÄTEN DURCH LÄNGEN

EDUARD BOĎA

D. G. Northcott definiert in [2] für einem beliebigen noetherschen A-Modul M und für ein beliebiges Multiplizitätssystem $\{a_1, \ldots, a_s\}$, d.h. für Elemente aus dem Zentrum von A mit der Eigenschaft $l(M/(a_1, \ldots, a_s)M) < \infty$, das Multiplizitätssymbol $e_A(a_1, \ldots, a_s|M)$ wie folgt:

$$e_A(\cdot|M) = l(M),$$

$$e_A(a_1, \ldots, a_s|M) =$$

$$= e_A(a_2, \ldots, a_s|M/(a_1)M) - e_A(a_2, \ldots, a_s|0 \underset{M}{:} a_1).$$

Es ist hier auch bewiesen (§ 7, Th. 6), dass

$$0 \leqq e_A(a_1, \ldots, a_s|M) \leqq l(M/(a_1, \ldots, a_s)M)$$

gilt.

Sei A ein lokaler noetherscher Ring (kommutativ mit dem Einselement und mit maximalen Ideal $\mathfrak{M}$) und M ein endlicher A-Modul mit $\dim(M) = d$. Sei $\{a_1, \ldots, a_d\}$ das Parametersystem für M. Wir wollen einen solchen Untermodul N in M konstruieren, für welchen

$$e_A(a_1, \ldots, a_d|M) = l(M/N) \quad \text{gilt}$$

(siehe auch [4] und [6]). Dazu, ausgehend aus [3] Ch. I B, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Für einen beliebigen Untermodul $N \subset M$ bezeichnen wir

$$\dim_M(N) =: \dim(M/N),$$

$$\mathrm{Ass}_M(N) =: \mathrm{Ass}(M/N) \quad \text{und weiter}$$

$$\mathrm{Assh}_M(N) =: \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_M(N);\ \dim_A(\mathfrak{P}) = \dim_M(N)\}.$$

Lemma 1. *Sei N ein Untermodul von M mit* $\dim_M(N)=t$ *und* $x\in A$. *Wenn* $x\notin\mathfrak{P}$ *für alle* $\mathfrak{P}\in\mathrm{Assh}_M(N)$ *ist, dann gilt*

$$\dim_M((x)M+N)=t-1.$$

Beweis. Da $\dim(M/N)=t$ und $x\notin\mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P}\in\mathrm{Assh}(M/N)$ ist, folgt aus ([3], Ch. III B, Cor. 5), dass

$$\dim((M/N)/(x)M/N)=t-1 \quad \text{gilt.}$$

Da A-Moduln $(M/N)/(x)M/N$ und $M/((x)M+N)$ isomorph sind, gilt auch

$$\dim(M/((x)M+N))=t-1.$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Für einen beliebigen Untermodul $N\subset M$ bezeichnet man mit $\mathfrak{R}_M(N)$ ein Radikal von N in M.

Lemma 2. *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein Ideal in* A. *Wenn* $\mathrm{Ann}(M)\subset\mathfrak{A}$ *ist, dann gilt* $\mathfrak{R}_M(\mathfrak{A}M)=\mathfrak{R}_A(\mathfrak{A})$.

Beweis. Dieses Ergebnis folgt aus [3], Ch. I C, P. 10.

Jetzt habe ein Untermodul N folgende Primärzerlegung in M

$$N=E_1\cap\ldots\cap E_r,$$

wobei E_i $\mathfrak{P}_i$-primär für alle $i=1,\ldots,r$ ist. Bezeichnen wir mit $U(N)$ den Durchschnitt aller Primärkomponenten E_i mit der Eigenschaft

$$\dim_M(E_i)=\dim_M(N),$$

d.h. den Durchschnitt aller Primärkomponenten E_i mit

$$\mathfrak{R}_M(E_i)=\mathfrak{P}_i\in\mathrm{Assh}_M(N).$$

Satz. 1. *Sei* $N=E_1\cap\ldots\cap E_r\cap F$ *eine Primärzerlegung von* N *in* M, *wobei* E_i $\mathfrak{P}_i$*-primär mit* $\dim_M(E_i)=\dim_M(N)$ *für alle* $i=1,\ldots,r$ *ist, und* F *bezeichne den Durchschnitt der übrigen Komponenten. Sei* $x\in A$ *und* $x\notin\mathfrak{P}$ *für alle* $\mathfrak{P}\in\mathrm{Ass}_M(N)$. *Dann gilt*

(i) $\mathrm{Assh}_M((x)M+N)=\mathrm{Assh}_M((x)M+U(N))$

(ii) $U((x)M+N)=U((x)M+U(N))$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $N=0\subset M$. Bezeichnen wir $\mathfrak{A}=\mathrm{Ann}(M)$. Da $\mathrm{Ass}_M(0)=\mathrm{Ass}_A(\mathfrak{A})$ ist, gilt $x\notin\mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P}\in\mathrm{Ass}_A(\mathfrak{A})$, d.h.

$$\mathrm{Assh}_A((x)+\mathfrak{A})=\mathrm{Assh}_A((x)+U(\mathfrak{A})).$$

Nach Lemma 2 ist $\mathfrak{R}_M((x)M)=\mathfrak{R}_A((x)+\mathfrak{A})$, so

$$\mathrm{Assh}_M((x)M)=\mathrm{Assh}_A((x)+\mathfrak{A}).$$

Weiter haben wir $\mathfrak{R}_M(U(\mathfrak{A})M) = \mathfrak{R}_A(U(\mathfrak{A})) = \mathfrak{R}_M(U(N))$, so

$$\mathfrak{R}_M((x)M + U(N)) = \mathfrak{R}_M(\mathfrak{R}_M((x)M) + \mathfrak{R}_M(U(N))) =$$
$$= \mathfrak{R}_M(((x) + U(\mathfrak{A}))M) = \mathfrak{R}_A((x) + U(\mathfrak{A})), \quad \text{d.h.}$$
$$\operatorname{Assh}_M((x)M + U(N)) = \operatorname{Assh}_A((x) + U(\mathfrak{A})).$$

Damit ist (*i*) bewiesen.

Nun sei $e \in U((x)M)$. Dann ist $(x)M \underset{A}{:} e \not\subset \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M((x)M)$. Daher erhalten wir $((x)M + U(N)) \underset{A}{:} e \not\subset \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M((x)M + U(N))$, d.h. $e \in U((x)M + U(N))$. So gilt es

$$U((x)M) \subset U((x)M + U(N)).$$

Sei jetzt $e \in U(N)$. Da $\dim_A(\mathfrak{P}) = \dim_M(0) - 1$ und $\mathfrak{P} \notin \operatorname{Ass}_M(0)$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M((x)M)$ ist, ergibt sich davon $0 \underset{A}{:} e \not\subset \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M((x)M)$, und folglich $(x)M \underset{A}{:} e \not\subset \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M((x)M)$, d.h.

$$e \in U((x)M) \quad \text{ist.}$$

Daher haben wir $U(N) \subset U((x)M)$. Mithin ist

$$(x)M + U(N) \subset U((x)M)$$

und folglich

$$U((x)M + U(N)) \subset U((x)M).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Für ein gegebenes Parametersystem $\{a_1, \ldots, a_d\}$ bzgl. M konstruieren wir für alle $k = 0, \ldots, d$ folgende Untermoduln:

$$N_0 = 0$$

$$N_k = (a_k)M + U(N_{k-1}) \quad \text{für alle } k, \quad 0 < k \leqq d.$$

Es ist klar, dass $((a_1, \ldots, a_k) + \mathfrak{A})M \subset N_k$ für alle $k = 0, \ldots, d$ gilt, wobei $\mathfrak{A} = \operatorname{Ann}(M)$ ist.

Hilfssatz 1. $\dim_M(N_k) = d - k$ *für alle* $k = 0, \ldots, d$.

B e w e i s. Der Beweis wird mit Induktion nach k durchgeführt. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Nun sei

$$\dim_M(N_k) = d - k.$$

Wir behaupten, dass $a_{k+1} \notin \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \mathrm{Assh}_M(N_k)$ ist. Wäre

$$a_{k+1} \in \mathfrak{P} \quad \text{für} \quad \mathfrak{P} \in \mathrm{Assh}_M(N_k), \quad \text{dann wäre}$$

$$(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) + \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P} \quad \text{mit} \quad \dim_A(\mathfrak{P}) = d - k .$$

Aber $\dim_A((a_1, \ldots, a_{k+1}) + \mathfrak{A}) = d - k - 1$, denn $(a_1, \ldots, a_d)A/\mathfrak{A}$ das Parameterideal in $A/\mathfrak{A}$ ist. Das ist ein Wiederspruch, so $a_{k+1} \notin \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \mathrm{Assh}_M(N_k)$ ist. Nach Lemma 1 ist dann

$$\dim_M((a_{k+1})M + U(N_k)) = d - k - 1, \quad \text{d.h.}$$

$$\dim_M(N_{k+1}) = d - k - 1 .$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass

$$e_A(a_1, \ldots, a_d | M) = l(M/N_d) \quad \text{ist.}$$

Dazu, ausgehend aus [4], konstruieren wir für alle $i \in N$ und für alle $k = 0, \ldots, d$ folgende Untermoduln $L_A^i(a_1, \ldots, a_k | M)$.

$$L_A^i(\cdot | M) = 0,$$

$$L_A^i(a_1, \ldots, a_s | M) = (a_s)M + L_A^i(a_1, \ldots, a_{s-1} | M) \underset{M}{:} a_s^i$$

für alle s, $0 < s \leqq d$.

Hilfssatz 2. *Für alle $i \in N$ und für alle $s = 0, \ldots, d$ gilt*

(*i*) $((a_1, \ldots, a_s) + \mathfrak{A})M \subset L_A^i(a_1, \ldots, a_s | M) \subset M$

(*ii*) $L_A^i(a_1, \ldots, a_s | M) \subset L_A^{i+1}(a_1, \ldots, a_s | M)$.

Beweis: [4], Hilfssatz 3.

Sei jetzt für alle $t = 0, \ldots, d$

$$L_A(a_1, \ldots, a_t | M) = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_A^i(a_1, \ldots, a_t | M).$$

Da M noethersch ist, existiert $n_t \in N$ so, dass

$$L_A(a_1, \ldots, a_t | M) = L_A^{n_t}(a_1, \ldots, a_t | M)$$

für alle $t = 0, \ldots, d$ gilt. Sei $m = \max\{n_0, \ldots, n_t\}$. Dann ist

$$L_A(a_1, \ldots, a_t | M) = L_A^m(a_1, \ldots, a_t | M)$$

für alle $t = 0, \ldots, d$.

Hilfssatz 3. *Für alle $t = 0, \ldots, d$ gilt*

$$\dim_M(L_A(a_1, \ldots, a_t | M)) = d - t .$$

Beweis. Wir benutzen Induktion nach t. Für $t=0$ ist die Aussage trivial. Sei $\dim_M(L_A(a_1, \ldots, a_t|M)) = d - t$. Da

$$a_{k+1} \notin \mathfrak{P} \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M(L_A(a_1, \ldots, a_t|M))$$

(wegen der Voraussetzung über $\{a_1, \ldots, a_d\}$) und

$$\operatorname{Assh}_M(L_A(a_1, \ldots, a_t|M)) = \operatorname{Assh}_M(L_A^m(a_1, \ldots, a_t|M) \underset{M}{:} a_{t+1}^m) \quad \text{ist,}$$

$$\text{gilt} \quad \dim_M(L_A(a_1, \ldots, a_t|M)) = \dim_M(L_A^m(a_1, \ldots, a_t|M) : a_{t+1}^m),$$

hieraus auf Grund von Lemma 1

$$\dim_M((a_{t+1})M + L_A^m(a_1, \ldots, a_t|M) \underset{M}{:} a_{t+1}^m) = d - k - 1, \quad \text{d.h.}$$

$$\dim_M(L_A(a_1, \ldots, a_{t+1}|M)) = d - k - 1,$$

was wir beweisen wollten.

Satz 2. *Für alle* $k = 0, \ldots, d$ *gilt*

$$U(N_k) = U(L_A(a_1, \ldots, a_k|M)).$$

Beweis. Wir führen Induktion nach k. Für $k=0$ ist die Behauptung trivial. Sei jetzt

$$U(N_k) = U(L_A(a_1, \ldots, a_k|M)).$$

Da $a_{k+1} \notin \mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in \operatorname{Assh}_M(L_A(a_1, \ldots, a_k|M))$ ist, gilt

$$U(L_A^m(a_1, \ldots, a_k|M) \underset{M}{:} a_{k+1}^m) = U(L_A(a_1, \ldots, a_k|M)).$$

Hieraus erhalten wir

$$U(N_{k+1}) = U((a_{k+1})M + U(N_k)) = U((a_{k+1})M + U(L_A(a_1, \ldots, a_k|M))),$$

nach Induktionsvoraussetzung

$$= U((a_{k+1})M + L_A^m(a_1, \ldots, a_k|M) \underset{M}{:} a_{k+1}^m),$$

nach Satz 1

$$= U(L_A(a_1, \ldots, a_{k+1}|M)).$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Da $\dim_M(N_d) = 0$ (Hilfssatz 1), $\dim_M(L_A(a_1, \ldots, a_d|M) = 0$ (Hilfssatz 3), sind N_d und $L_A(a_1, \ldots, a_d|M)$ $\mathfrak{M}$-primäre Untermoduln in M, und es gilt daher

Folgerung. $N_d = L_A(a_1, \ldots, a_d | M)$.

Satz 3. *Sei M ein endlicher Modul über einem lokalen noetherschem Ring A (kommutativ mit dem Einselement) und sei $\{a_1, \ldots, a_d\}$ ein Parametersystem für M. Sei N_d ein Untermodul in M, der mit dem obigen Prozess konstruiert wird. Dann gilt*

$$e_A(a_1, \ldots, a_d | M) = l(M/N_d).$$

Beweis. In [4] ist es bewiesen, dass

$$e_A(a_1, \ldots, a_d | M) = l(M/L_A(a_1, \ldots, a_d | M)).$$

Dadurch erhält man die Behauptung aus der Folgerung des Satzes 2.

Bemerkung. Da das Multiplizitätssymbol von D. G. Northcott (im Falle, wenn M ein noetherscher A-Modul und A ein kommutativer, noetherscher semilokaler Ring mit dem Jacobson Radikal $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Definitionsideal in A ist) mit dem Leitkoeffizient $e_0(\mathfrak{Q}, M)$ von Hilbert—Samuel Polynom übereinstimt (siehe [3], §8 und [1], T. 4,1 und 4,2), gilt die folgende Aussage:

Sei $(A, \mathfrak{M})$ ein kommutativer noetherscher lokaler Ring mit $\dim(A) = d$ und $\mathfrak{Q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Sei $\mathfrak{Q}^*$ ein $\mathfrak{M}$-primäres Ideal in A, das mit dem obigen Prozess konstruiert ist. Dann gilt

$$e_0(\mathfrak{Q}^*, A) = l(A/\mathfrak{Q}^*).$$

Das ist eine positive Antwort auf eine Vermutung von Prof. W. Vogel (Halle): „Dynamische" Multiplizität von $\mathfrak{Q}$ und „statische" Multiplizität von $\mathfrak{Q}^*$ sind gleich. Die geometrische Deutung dieser Vermutung wurde in [5] behandelt.

LITERATUR

[1] AUSLANDER, M.—BUCHSBAUM, D. A.: Codimension and multiplicity. Ann. Math., 68, 1958, 625—657.

[2] NORTHCOTT, D. G.: Lessons on rings, modules and multiplicities. 1.ed. Cambridge 1968.

[3] SERRE, J. P.: Algebre locale — multiplicites. Lecture notes in mathematics 11. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1965.

[4] STÜCKRAD, J. und VOGEL, W.: Ein Korrekturglied in der Multiplizitätstheorie von D. G. Northcott und Anwendungen. Monatsh. Math., 76, 1972, 264—271.

[5] STÜCKRAD, J. und VOGEL, W.: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten. Monatsh. Math., 78, 1974, 433—445.

[6] WRIGHT, D. J.: A charakterisation of multiplicity. Monatsh. Math., 79, 1975, 165—167.

Received September 9, 1976

Katedra geometrie
Prírodovedeckej fakulty UK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava

К ВЫЧИСЛЕНИЮ КРАТНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ДЛИН

Эдуард Бодя

Резюме

Пусть M – конечный модуль над локальным нетеровым кольцом $(A, \mathfrak{M})$ и $\{a_1, \ldots, a_d\}$ – система параметров для M. Пусть $e_A(a_1, \ldots, a_d|M)$ обозначает символ кратности Норскота ([2]). В общности эта кратность меньше длины модуля $M/(a_1, \ldots, a_d)M$. В работе обсуждена проблема построения такого подмодуля N модуля M, для которого $e_A(a_1, \ldots, a_d|M) = l(M/N)$. В заключительном примечании показывается, что если взять $M = A$, то процесом построения N получается $\mathfrak{M}$-примарный идеал $\mathfrak{Q}^*$ для которого «статическая» кратность (длина A-модуля $A/\mathfrak{Q}^*$) и «динамическая» кратность идеала $\mathfrak{Q} = (a_1, \ldots, a_d)$ (старший член многочлена Гильберт–Самюеля $l(A/\mathfrak{Q}^n)$) совпадают.