Math. Slovaca 28, 1978, No. 2, 169—172

DIE SCHWERPUNKTE DER DREIECKE IN EINIGEN ENDLICHEN QUASIGRUPPEN

JÁN GATIAL

In dieser Arbeit werden wir uns mit dem Studium des Quasischwerpunktes eines Dreiecks in einigen endlichen A-Strukturen befassen.

Definition 1. *Eine idempotente, mediale und kommutative Quasigruppe werden wir A-Struktur nennen.*

In [2] haben wir den Begriff des affinen Raumes zu einer A-Struktur verallgemeinert.

Definition 2. *Die Elemente der Menge $Q^3 = Q \times Q \times Q$ nennen wir Dreicke. a, b, c heissen Eckpunkte des Dreiecks (a, b, c).*

Definition 3. *Sei $(a, b, c) \in Q^3$. Jedes Element $t \in Q$, für welches $(ta)(bc) = t$ gilt, nennen wir einen Quasischwerpunkt des Dreiecks (a, b, c). Ein Dreieck, welches gerade einen Quasischwerpunkt hat, bezeichnen wir als Schwerdreieck und seinen Quasischwerpunkt dann als Schwerpunkt.* (Siehe [3]).

Beispiel 1. Sei p eine ungerade natürliche Zahl und $(Z_p, +)$ eine abelsche Gruppe der Restklassen modulo p. Dann kann man durch zwei eindeutig dividieren, und das Grupoid $(Z_p, \cdot)$ mit der Verknüpfungvorschrift:

$$Z_p \times Z_p \to Z_p, \quad (x \cdot y) \mapsto \frac{x+y}{2}$$

ist eine A-Struktur.

Betrachten wir jetzt Dreiecke und ihre Quasischwerpunkte in endlichen Quasigruppen aus dem Beispiel 1; $t \in Z_p$ sei der Quasischwerpunkt des Dreiecks $(a, b, c) \in Z_p^3$, dann gilt nach Definition 3

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{t+a}{2} + \frac{b+c}{2}\right),$$

$$a + b + c = 3t.$$

Umgekehrt, wenn die letzte Gleichheit erfüllt ist, dann ist es leicht zu beweisen, dass t der Quasischwerpunkt des Dreiecks (a, b, c) ist.

Beispiel 2. In Z_5 ist jedes Dreieck ein Schwerdreieck, weil die Gleichung $a = 3t$ (wo a gegeben und t unbekannt ist) immer genau eine Lösung hat. In Z_9 hat das Dreieck (3, 4, 7) keinen Quasischwerpunkt, weil die Gleichung

$$14 = 3t$$

hier unlösbar ist. Umgekehrt, das Dreieck (1, 2, 3) in Z_9 hat drei verschiedene Quasischwerpunkte, und zwar: $t_1 = 2$, $t_2 = 5$, $t_3 = 8$. Diese Punkte bilden sogar eine Unterstruktur der A-Struktur Z_9, weil

$$\frac{t_i + t_j}{2} = t_k$$

für jede Permutation (i, j, k) des Dreitupels (1, 2, 3) gilt. Die angegebene Unterstruktur ist mit der A-Struktur Z_3 isomorph.

Dieses Beispiel zeigt, dass es bei dem Studium der Schwerpunkte in der A-Struktur Z_p sehr wichtig ist, ob man p durch die Zahl drei dividieren kann oder nicht.

Satz 1. *Sei (a, b, c) ein Dreieck in der A-Struktur Z_p ($p \geqslant 3$ ungerade), dann gilt:*

I. *Wenn* $p \not\equiv 0 \bmod 3$, *dann ist das Dreieck (a, b, c) ein Schwerdreieck.*

II. *Wenn* $p \equiv 0 \bmod 3$ *und* $a + b + c \equiv 0 \bmod 3$, *dann hat das Dreieck (a, b, c) genau drei Quasischwerpunkte.*

III. *Wenn* $p \equiv 0 \bmod 3$ *und* $a + b + c \not\equiv 0 \bmod 3$, *dann hat das Dreieck (a, b, c) keinen Quasischwerpunkt.*

Beweis. Wenn $b \in Z_p$, dann hat die Gleichung $b = 3x$ in Z_p

I. genau eine Lösung für $p \not\equiv 0 \bmod 3$,

II. genau drei Lösungen für $p \equiv 0 \bmod 3$, und $b \equiv 0 \bmod 3$,

III. keine Lösung für $p \equiv 0 \bmod 3$, und $b \not\equiv 0 \bmod 3$.

Folgerung. *Das Dreieck* (0, 1, 2) *hat in Z_3 genau drei Quasischwerpunkte, deshalb ist die A-Struktur der Quasischwerpunkte dieses Dreiecks das ganze Z_3.*

Benützen wir jetzt das Cartesische Produkt auf die in der Folgerung angegebene Situation. Wir definieren die A-Struktur $Z_3 \times Z_3$ „durch die Koordinaten“ mittels der Vorschrift

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Jeder Punkt der A-Struktur $Z_3 \times Z_3$ ist ein Quasischwerpunkt des Dreiecks ((0, 1), (1, 2), (2, 0)), daher hat das angegebene Dreieck genau 9 Quasischwerpunkte.

Aus der letzen Betrachtung ergibt sich folgende Behauptung:

Es existieren zwei nicht isomorphe A-Strukturen von derselben Mächtigkeit, und zwar Z_9 und $Z_3 \times Z_3$.

Eine direkte Verallgemeinerung des letzten Resultates ist der folgende

Satz 2. *Sei $(Q, \cdot)$ ein Cartesisches Produkt der A-Strukturen $Z_{p_1}, Z_{p_2}, \ldots, Z_{p_n}$; $n \geqslant 2$ und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alle ungeraden und sei $p_i \geqslant 3$ für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Die Verknüpfung $\cdot$ auf Q sei mittels der Vorschrift*

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \ldots, \frac{x_n + y_n}{2}\right)$$

gegeben. Dann gilt:

1. *Wenn* $p_i \not\equiv 0 \bmod 3$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *dann ist jedes Dreieck in $(Q, \cdot)$ ein Schwerdreieck.*

2. *Wenn m die Anzahl derjenigen Zahlen p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet, für die* $p_i \equiv 0 \bmod 3$ *ist, dann hat jedes Dreieck in $(Q, \cdot)$ entweder genau 3^m Quasischwerpunkte oder keinen Quasischwerpunkt.*

Beweis. Der erste Fall ist nach dem Satz 1 evident. In dem zweiten Fall hat entweder jedes betrachtete Dreieck „die Koordinate des Quasischwerpunktes" in jedem Bestandteile oder es gibt einen Bestandteil, in dem keine „Koordinate des Quasischwerpunktes" existiert. Nach dem oben Gesagten entspricht dem zweiten Fall kein Quasischwerpunkt.

Folgerung. *Für jede natürliche Zahl m gibt es eine A-Struktur $(Q, \cdot)$ und ein Dreieck $(a, b, c) \in Q$ so, dass die Anzahl der Quasischwerpunkte von (a, b, c) genau 3^m ist.*

LITERATUR

[1] БЕЛОУСОВ, В. Д.: Основы теории квазигрупп и луп. Москва 1967.

[2] GATIAL, J.: Some geometrical examples of an IMC-quasigroup. Mat. Čas. 19, 292—298.

[3] GATIAL, J.: Über die IMC-Quasigruppe und den Schwerpunkt eines Dreiecks. Math. Nachr., Band 53, 1972, 119—123.

Eingegangen am 17. 6. 1976

Katedra matematiky
Elektrotechnickej fakulty SVŠT
Gottwaldovo nám. 19
884 20 Bratislava

ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ В НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ КВАЗИГРУПАХ

Ян Гатиал

Резюме

Статьъ является продолжением работ [2] и [3]. В ней исследуются центри тяжести треугольников в некоторых конечных А-структурах. Самым главным выводом статьи является следующщее: для каждого натурального числа m существует А-структура $(Q, \cdot)$ и треугольник $(a, b, c) \in Q$, число квазицентов тяжести которого равно именно 3^m.