Mathematica Slovaca

Imrich Abrhan

О $\mathcal{J}$-подалгебрах в унарных алгебрах, о простых идеалах и $\mathcal{J}$-идеалах в группоидах и полугруппах

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 1, 61--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136166

Math. Slovaca 28, 1978, No. 1, 61—80

О $\mathscr{I}$-ПОДАЛГЕБРАХ В УНАРНЫХ АЛГЕБРАХ, О ПРОСТЫХ ИДЕАЛАХ И $\mathscr{I}$-ИДЕАЛАХ В ГРУППОИДАХ И ПОЛУГРУППАХ

ИМРИХ АБРГАН (IMRICH ABRHAN)

В работах [1], [2], [5], [7], [8], [9] изучаются свойства фраттиниго идеала (т.е. пересечения всех максимальных идеалов в полугруппах).

Ш. Шварц в работе [9] изучал свойства пересечения максимальных идеалов и простых идеалов в полугруппах.

Настоящая работа обобщает результаты из [9].

В первой части этой работы определяется понятие $\mathscr{I}$-подалгебры в унарной алгебре и тем мы обобщаем понятие максимальной подалгебры в унарной алгебре (доказывается, что всякая максимальная подалгебра в унарной алгебре является ее $\mathscr{I}$-подалгеброй). На примере показывается, что существует унарная алгебра, в которой нет ни одной максимальной подалгебры и содержит бесконечное множество $\mathscr{I}$-подалгебр. Дальше мы определяем понятие независимой системы $\mathscr{I}$-подалгебр в унарной алгебре (напр. всякое непустое подмножество множества всех максимальных подалгебр в унарной алгебре является независимой системой $\mathscr{I}$-подалгебр в унарной алгебре). Доказывается: если унарная алгебра содержит собственную подалгебру, то она содержит по крайней мере одну $\mathscr{I}$-подалгебру и всякая $\mathscr{I}$-подалгебра этой унарной алгебры является элементом по крайней мере одной максимальной независимой системы $\mathscr{I}$-подалгебр этой унарной алгебры. Дальше доказывается, что к всякой максимальной независимой системе $\mathscr{N}$ $\mathscr{I}$-подалгебр унарной алгебры можно присоединить такую подалгебру этой унарной алгебры, что пересечение всех максимальных подалгебр этой подалгебры равняется пересечению всех элементов N из $\mathscr{N}$.

Во второй части этой работы определяется понятие $\mathscr{I}$-идеала группоида G (тем мы обобщаем понятие максимального идеала группоида G) и понятие независимой системы $\mathscr{I}$-идеалов групоида G.

Таким же образом, как в первой части этой работы, показывается (при помощи утверждений доказанных в первой части) что, если группоид содержит собственный идеал, то он содержит по крайней мере один $\mathscr{I}$-идеал и всякий $\mathscr{I}$-идеал группоида G является элементом хотя бы одной максимальной независимой системы $\mathscr{I}$-идеалов группоида G. К всякой максимальной независимой системе $\mathcal{N}$ $\mathcal{I}$-идеалов группоида G присоединен такой идеал $C_{\mathcal{N}}$ группоида G, что пересечение всех максимальных идеалов в $C_{\mathcal{N}}$ (см. определение 2.1) равняется пересечению всех $\mathcal{I}$-идеалов N из $\mathcal{N}$.

Доказывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы:

а) $\mathcal{I}$-идеал группоида G был простым идеалом группоида G,

б) пересечение независимой системы $\mathcal{I}$-идеалов группоида G было равно пересечению простых идеалов группоида G,

в) множество всех максимальных идеалов группоида G было равно множеству всех простых идеалов группоида G.

В этой же части работы определяется понятие ядра в группоиде G, понятие множества всех K-потентных элементов группоида G и доказывается:

i) если пересечение всех простых идеалов группоида G содержит идемпотент, то группоид G имеет ядро K и пересечение всех простых идеалов группоида G содержит те же идемпотенты, которые содержит ядро K.

ii) $\cap Q^* \subseteq N_1$, где $\cap Q^*$ – пересечение всех простых идеалов группоида G и N_1 – наибольший идеал, находящийся в множестве всех K-потентных элементов группоида.

В статье мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$X \subset Y$ обозначает, что X собственное подмножество множества Y, в отличие от $X \subseteq Y$.

$\mathbf{A}$ обозначает алгебру (под алгеброй A мы подразумываем пару $\langle A\,;F\rangle$, где A – непустое множество и F – система конечных операций, определенных на A см., напр., [4], [6]).

$\mathcal{P}(\mathbf{A})$ обозначает множество всех тех непустых подмножеств N множества A, что $\langle N; F\rangle$ – подалгебра алгебры $\mathbf{A}$;

$[H]$ обозначает такой элемент из $\mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $\langle [H]; F\rangle$ – подалгебра в $\mathbf{A}$, *порожденная* непустым подмножеством H множества A (вместо обозначения $[\{x\}]$, где $x \in A$, мы пользуемся обозначением $[x]$).

Пусть $\mathbf{N} = \langle N\,; F\rangle$ – подалгебра алгебры $\mathbf{A}$. Подалгебру $\langle M\,; F\rangle$ алгебры $\mathbf{A}$ назовем максимальной подалгеброй в $\mathbf{N}$, если $M \subset N$ и не существует такая подалгебра $\langle N'\,; F\rangle$ алгебры $\mathbf{A}$, что $N \subset N' \subset N$. Обозначим знаком $\mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N})$ множество всех таких элементов $M \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $\langle M; F\rangle$ – максимальная подалгебра в $\mathbf{N}$.

Подалгебру $\langle N; F\rangle$ алгебры $\mathbf{A}$ назовем *$\mathcal{I}$-простой* (или *минимальной*) в $\mathbf{A}$, если не существует такой элемент $N' \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $N' \subset N$. Если подалгебра $\langle N; F\rangle$ является *$\mathcal{I}$-простой* в $\mathbf{A}$ и $N = A$, то мы будем писать «алгебра $\mathbf{A}$ является $\mathcal{I}$-простой».

Пусть $\mathbf{A}$ – алгебра. Скажем, что два элемента x, $y \in A$ находятся в отношении $\mathcal{I}$, если $[x]=[y]$. Очевидно, отношение $\mathcal{I}$ на A является отношением эквивалентности на A. Обозначим через $A/\mathcal{I}$ множество всех $\mathcal{I}$-классов, соответствующих отношению эквивалентности $\mathcal{I}$ на A, и через

$[x]\mathscr{I}$ обозначим $\mathscr{I}$-класс из $A/\mathscr{I}$, содержащий элемент $x \in A$. На множестве $A/\mathscr{I}$ определим отношение $\leqslant$ следующим образом: $[x]\mathscr{I} \leqslant [y]\mathscr{I}$ $(x, y \in A)$ тогда и только тогда, когда $[x] \subseteq [y]$ (см. [1], [2]).

Пусть $\mathbf{A}$ – алгебра и пусть $\emptyset \neq B \subseteq A$. Символом $N_0(B)$ мы будем обозначать множество всех таких $x \in A$, что для каждого $b \in B$ имеет место $[b]\mathscr{I} \nless [x]\mathscr{I}$ и символом $N(B)$ обозначим множество всех таких $x \in A$, что для всякого $b \in B$ имеет место $[b]\mathscr{I} \nleqslant [x]\mathscr{I}$. Вместо обозначения $X(\{a\})$, где $X = N_0$, N и $a \in A$, мы пользуемся обозначением $X(a)$.

Очевидно, что имеют место следующие утверждения:

а) $N_0(B)$ является теоретико-множественным объединением всех таких $[x]\mathscr{I} \in A/\mathscr{I}$, что для каждого $b \in B$ имеет место $[b]\mathscr{I} \nless [x]\mathscr{I}$,

б) $N(B)$ является теоретико-множественным объединением всех таких $[x]\mathscr{I} \in A/\mathscr{I}$, что для каждого $b \in B$ имеет место $[b]\mathscr{I} \nleqslant [x]\mathscr{I}$,

в) $N_0(B) = \cap\{N_0(b) | b \in B\}$,

г) $N(B) = \cap\{N(b) | b \in B\}$.

На примере мы покажем, что существует такое непустое подмножество B алгебры $\mathbf{A}$ $(\emptyset \neq B \subset A)$, что $N_0(B) = \emptyset$.

Пример 1.1. Пусть A является множеством всех вещественных чисел x, для которых $0 < x < 1$. Если каждому элементу $a \in A$ сопоставлена унарная операция f_a на A, которая определена следующим образом: $f_a(x) = ax$ для каждого $x \in A$ (ax – обыкновенное произведение чисел a, x), и если положим $F = \{f_a | a \in A\}$, то $\langle A\,;F\rangle$ – унарная алгебра (алгебра $\mathbf{A}$ называется унарной, если F содержит лишь унарные операции). Пусть B является множеством всех чисел вида $\frac{1}{2^n}$, где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\emptyset \neq B \subset A$ и $N_0(B) = \emptyset$.

В работе [1] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *Пусть унарная алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$-простой и пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Тогда: $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A \setminus N$.*

Лемма 2. *Пусть унарная алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$-простой и пусть $N \subset A$. Тогда: $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда существует такое $x \in A$, что $N = A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ – максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра. Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, $|\mathscr{A}| \geqslant 2$ ($|\mathscr{A}|$ обозначает мощность множества $\mathscr{A}$), $N_1 \in \mathscr{A}$, $N_2 \in \mathscr{A}$, $N_1 \neq N_2$, $D_1 = A \setminus N_1$ и $D_2 = A \setminus N_2$. Тогда*

а) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,

б) $A \setminus \cap\mathscr{A} = \cup\{[x]\mathscr{I} | x \in A \setminus \cap\mathscr{A}\}$,

в) $D_1 \subseteq N_2$,

г) *если $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N \cap D_1 \neq \emptyset$, то $D_1 \subseteq N$,*

д) *если $x \in D_1$ и $y \in D_2$, то $[x] \cap [y] \subseteq \cap\mathscr{A}$.*

Лемма 1.1. *Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра и пусть $\emptyset \neq B \subseteq A$. Тогда*

а) *или $N_0(B) \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, или $N_0(B) = \emptyset$,*

б) *или $N(B) \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, или $N(B) = \emptyset$.*

Доказательство. а) Пусть $N_0(B) \neq \emptyset$. Предположим, что существует такое $x \in N_0(B)$ и такое $f \in F$, что $f(x) \notin N_0(B)$. Это означает, что существует такое $c \in B$, что $[c]\mathcal{I} < [f(x)]\mathcal{I}$. Так как $f(x) \in [x]$, то $[f(x)] \subseteq [x]$. Отсюда имеем $[c]\mathcal{I} < [x]\mathcal{I}$. Последнее противоречит тому, что $x \in N_0(B)$.

б) Если $N(B) \neq \emptyset$, то доказательство утверждения б) можно провести аналогичным образом, как доказательство утверждения а).

Примечание 1.1. На примере аддитивной группы целых чисел по mod 12, можно доказать, что усществует такая алгебра $\mathbf{A}$ и такое подмножество B алгебры $\mathbf{A}$, что имеет место:

а$_1$) $N_0(B) \notin \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и $N_0(B) \neq \emptyset$, а$_2$) $N(B) \notin \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и $N(B) \neq \emptyset$.

Пример 1.1. Пусть $\mathbf{G}_{12} = \langle G_{12};\ + \rangle$, где $G_{12} = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_{11}\}$ является аддитивной группой целых чисел по mod 12, и пусть $B = \{a_2, a_3\}$. Тогда $N_0(B) = \{a_0, a_2, a_3, a_4, a_6, a_8, a_9, a_{10}\}$, $N(B) = \{a_0, a_4, a_6, a_8\}$ и имеет место: а$_1$) $N_0(B) \notin \mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$ и $N_0(B) \neq \emptyset$, а$_2$) $N(B) \notin \mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$ и $N(B) \neq \emptyset$.

Определение 1.1. *Подалгебру $\langle N; F \rangle$ унарной алгебры $\mathbf{A}$ назовем $\mathcal{I}$-подалгеброй, если существует такое $b \in A$, что $N = N(b)$. Обозначим через $\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})$ множество всех таких элементов $N \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $\langle N; F \rangle$ является $\mathcal{I}$-подалгеброй унарной алгебры $\mathbf{A}$.*

Теорема 1.1. *Каждая максимальная полалгебра унарной алгебры $\mathbf{A}$ является $\mathcal{I}$-подалгеброй в $\mathbf{A}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 1.1 вытекает из леммы 2.

На примере мы покажем, что не всякая $\mathcal{I}$ – подалгебра унарной алгебры $\mathbf{A}$ является максимальной подалгеброй в $\mathbf{A}$.

Пример 1.2. Пусть $S_{12} = \{a_0, a_1, \dots a_{11}\}$ является множеством всех классов целых чисел по mod 12. Пусть бинарная операция на S_{12} является обыкновенным произведением классов по mod 12. Тогда $\langle S_{12}; \cdot \rangle$ является коммутативной полугруппой. Пусть F является множеством всех левых трансляций полугруппы $\langle S_{12}; \cdot \rangle$. Тогда $\mathbf{S}_{12} = \langle S_{12}; F \rangle$ является унарной алгеброй и $\langle N_1; F \rangle$, $\langle N_2; F \rangle$, $\langle N_3; F \rangle$ где $N_1 = \{a_0, a_4, a_8\}$, $N_2 = \{a_0, a_3, a_4, a_6, a_8, a_9\}$, $N_3 = \{a_0, a_2, a_3, a_4, a_6, a_8, a_9, a_{10}\}$ являются $\mathcal{I}$ – подалгебрами алгебры $\mathbf{S}_{12}$. Подалгебра $\langle N_3; F \rangle$ алгебры S_{12} является единственной максимальной подалгеброй в S_{12}.

На примере мы покажем, что существует такая унарная алгебра $\mathbf{A}_1$, которая не имеет ни одну максимальную подалгебру и имеет бесконечное множество $\mathcal{I}$ – подалгебр. Более того мы покажем, что алгебра имеет бесконечное множество подалгебр, которые не являются $\mathcal{J}$ – подалгебрами v $\mathbf{A}$.

Пример 1.3. Пусть A_1 – множество всех вещественных чисел, для которых $0 \leqq x < 1$. На A_1 определим бинарную операцию следующим образом $x \cdot y = \min\{x, y\}$ для каждых двух элементов x, $y \in A_1$. Тогда $\langle A_1; \cdot \rangle$ является коммутативной полугруппой. Пусть F является множеством всех левых трансляций полугруппы $\langle A_1; \cdot \rangle$. Тогда $\mathbf{A}_1 = \langle A_1; F \rangle$ является унарной алгеброй, которая не содержит ни одну максимальную подалгебру и для каждого $c \in (0,1)$ является $\langle N(c); F \rangle$, где $N(c) = \langle 0, c \rangle$, $\mathcal{J}$-подалгеброй в $\mathbf{A}_1$. Для всякого $c \in (0,1)$ подалгебра $\langle N_0(c); F \rangle$ алгебры $\mathbf{A}_1$, где $N_0(c) = \langle 0, c \rangle$, не является $\mathcal{J}$-подалгеброй в $\mathbf{A}_1$.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра, $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$ и $N = N(b)$, где $b \in A$. Тогда $N_0(b) \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $N_0(b) \backslash N = [b]\mathcal{J}$ и $N \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0(b))$.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$ и $N = N(b)$. Очевидно, что имеет место $N_0(b) = N(b) \cup [b]\mathcal{J}$. Тогда по лемме 1.1 мы получаем, что $N_0(b) \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Из этого вытекает, что $N(b) \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0(b))$.

Теорема 1.2. *Для каждого непустого подмножества N унарной алгебры $\mathbf{A}$ имеет место: $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда $N \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и существует такой элемент $N_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, что имеет место $N \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0)$, а для каждого $x \in A$ имеет место: $x \in A \backslash N$ тогда и только тогда, когда $N_0 \backslash N \subseteq [x]$.*

Доказательство. I. Пусть $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$. Тогда существует такое $b \in A$, что $N = N(b)$. Положим $N_0 = N_0(b)$. Тогда, согласно лемме 1.2, мы получаем $N_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $N \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0)$ и $N_0 \backslash N = [b]\mathcal{J}$. Из этого вытекает, что для каждого $x \in A$ имеет место: $x \in A \backslash N$ тогда и только тогда, когда $[b]\mathcal{J} \leqslant [x]\mathcal{J}$, т.е. $N_0 \backslash N \subseteq [x]$.

II. Предположим, что $N \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и существует такой элемент $N_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $N \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0)$, а для всякого $x \in A$ имеет место: $x \in A \backslash N$ тогда и только тогда, когда $N_0 \backslash N \subseteq [x]$. Согласно лемме 1 имеет место $N_0 \backslash N = [a]\mathcal{J}$, где $a \in N_0 \backslash N$. Это означает, что для каждого $x \in A$ имеет место: $x \in A \backslash N$ тогда и только тогда, когда $[a]\mathcal{J} \leqslant [x]\mathcal{J}$, т.е. $x \in A \backslash N(a)$. Значит, $N = N(a)$.

Лемма 1.3. *Пусть унарная алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathcal{J}$-простой. Пусть $N \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$ и $b \in A \backslash N$. Тогда $N(b) \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$.*

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент из N. Предположим, что $x \notin N(b)$. Тогда $[b]\mathcal{J} \leqslant [x]\mathcal{J} \subseteq [x] \subseteq N$. Это противоречит тому, что $b \in A \backslash N$. Значит, $N \subseteq N(b)$. Из этого, согласно лемме 1.1, мы получаем, что $N(b) \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$.

Определение 1.2. *Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра и пусть $\mathcal{N}$ – непустое подмножество множества $\mathcal{P}^{\mathcal{J}}(\mathbf{A})$. Систему $\mathcal{J}$ – подалгебр $\mathcal{N}' = \{\langle N; F \rangle / N \in \mathcal{N}\}$ назовем независимой системой $\mathcal{J}$ – подалгебр унарной алгеб-*

ры $\mathbf{A}$, *если для каждых двух элементов* $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ *имеет место: если* $N_1 \neq N_2$, *то* $N_1 \not\subseteq N_2$. *Дальше мы будем вместо* „$\mathcal{N}^{\mathcal{I}}$“ *писать* „$\mathcal{N}$“.

Очевидно имеет место: *если* $\mathbf{A}$ *является унарной алгеброй и* $\emptyset \neq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}_{max}(\mathbf{A})$, *то* $\mathcal{N}$ *является независимой системой* $\mathcal{I}$ *– подалгебр алгебры* $\mathbf{A}$.

Теорема 1.3. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathcal{I}$ *– простой. Тогда*

(а) $\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$;

(б) *Каждая* $\mathcal{I}$ *– подалгебра унарной алгебры* $\mathbf{A}$ *является элементом по крайней мере одной независимой системы* $\mathcal{I}$ *– подалгебр алгебры* $\mathbf{A}$;

(в) *К каждой независимой системе* $\mathcal{N}$ $\mathcal{I}$ *– подалгебр унарной алгебры* $\mathbf{A}$ *существует такая максимальная независимая система* $\mathcal{M}$ $\mathcal{I}$ *– подалгебр алгебры* $\mathbf{A}$, *что* $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.

Доказательство. а) Утверждение (а) вытекает из леммы 1.3.

б) Утверждение (б) очевидно.

в) Множество $\mathcal{T}$ всех независимых систем $\mathcal{I}$ – подалгебр унарной алгебры $\mathbf{A}$ частично упорядачено по включению. Пусть $\mathcal{R}$ – произвольная цепь в $\mathcal{T}$ и пусть $\mathcal{M} = \cup\{N | N \in \mathcal{R}\}$. Тогда очевидно, что $\mathcal{M}$ является независимой системой $\mathcal{I}$ – подалгебр унарной алгебры $\mathbf{A}$. Из этого, согласно теореме Куратовского–Цорна, мы получаем, что имеет место утверждение (б).

Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра и пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – подалгебр алгебры $\mathbf{A}$. Тогда, согласно определению 1.1, к каждому элементу $N \in \mathcal{N}$ существует такой элемент $b \in A$, что $N = N(b)$. Обозначим через $B(\mathcal{N})$ множество таких элементов из A, что для каждого элемента $N \in \mathcal{N}$ существует такой элемент $b \in B(\mathcal{N})$, что $N = N(b)$, и для всякого элемента $b \in B(\mathcal{N})$ имеет место $\mathcal{N}(b) \in \mathcal{N}$. Обозначим через $C_{\mathcal{N}}$ множество $N_0(B(\mathcal{N}))$.

Лемма 1.4. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathcal{I}$ *– простой и пусть* $\mathcal{N}$ *– независимая система* $\mathcal{I}$ *– подалгебр в* $\mathbf{A}$. *Тогда:*

(а) $b \in C_{\mathcal{N}}$ *для каждого* $b \in B(\mathcal{N})$;

(б) $C_{\mathcal{N}} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *и* $\mathbf{C}_{\mathcal{N}} = \langle C_{\mathcal{N}}\,; F\rangle$ *не является* $\mathcal{I}$ *– простои в* $\mathbf{A}$;

(в) $[b]\mathcal{I}$ *– максимальный элемент в* $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}$ *для каждого* $b \in B(\mathcal{N})$;

(г) *Если* $\mathcal{N}$ *является максимальной независимой системой* $\mathcal{I}$ *– подалгебр* v $\mathbf{A}$, *то* $[a]\mathcal{I}(a \in A)$ *– максимальный элемент в* $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}$ *тогда и только тогда, когда существует такое* $b \in B(\mathcal{N})$, *что* $[a]\mathcal{I} = [b]\mathcal{I}$.

Доказательство. а) Предположим, что существует такое $c \in B(\mathcal{N})$, что $c \notin C_{\mathcal{N}}$, т.е. $c \notin N_0(B(\mathcal{N}))$. Тогда существует такое $d \in B(\mathcal{N})$, что $[d]\mathcal{I} < [c]\mathcal{I}$. Отсюда вытекает, что $N(d) \subset N(c)$. Это противоречит тому, что $N(c)$, $N(d) \in \mathcal{N}$.

б) Так как по а) $C_{\mathcal{N}} \neq \emptyset$, то по лемме 1.1 имеет место $C_{\mathcal{N}} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Предположим, что $\mathbf{C}_{\mathcal{N}}$ является $\mathcal{I}$ – простой в $\mathbf{A}$. Тогда $C_{\mathcal{N}} = [b]\mathcal{I}$, где $b \in B(\mathcal{N})$, и по (а) $B(\mathcal{N}) \subseteq [b]\mathcal{I}$. Отсюда вытекает $C_{\mathcal{N}} = N_0(B(\mathcal{N})) = N_0([b]\mathcal{I}) = N_0(b)$. Из этого по лемме 1.2 мы получаем $N(b) \subset C_{\mathcal{N}}$. Это противоречит тому, что $\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}}$ является $\mathcal{I}$ – простой в $\boldsymbol{A}$. Значит, $\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}}$ не является $\mathcal{I}$ – простой в $\boldsymbol{A}$.

в) Из (а) и (б) вытекает, что $[b]\mathcal{I} \subseteq C_{\mathcal{N}}$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$. Предположим, что существует такое $c \in B(\mathcal{N})$ и такое $x \in A$, что $[c]\mathcal{I} < [x]\mathcal{I}$. Тогда $x \notin C_{\mathcal{N}}$. Из этого вытекает, что $[b]\mathcal{I}$ – максимальный элемент в $C_{\mathcal{N}}$ $\mathcal{I}$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.

г) Предположим, что существует такой максимальный элемент $[a]\mathcal{I}$ в $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}$, что для каждого $b \in B(\mathcal{N})$ имеет место $[b]\mathcal{I} \neq [a]\mathcal{I}$. Если $N(a) = \emptyset$, то из того, что $[a]\mathcal{I}$ – максимальный элемент в $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}$, мы получаем, что $[a]\mathcal{I} = [x]\mathcal{I}$ для всех $x \in C_{\mathcal{N}}$, т.е. $\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}}$ является $\mathcal{I}$ – простой в $\boldsymbol{A}$. Это противоречит утверждению (б). Тогда $N(a) \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{A})$ и $N(a) \notin \mathcal{N}$. Так как $\mathcal{N}$ является максимальной независимой системой $\mathcal{I}$ – подалгебр в $\boldsymbol{A}$, то существует такое $d \in B(\mathcal{N})$, что или $N(a) \subset N(d)$, или $N(d) \subset N(a)$. Отсюда следует, что или $[a]\mathcal{I} < [d]\mathcal{I}$, или $[d]\mathcal{I} < [a]\mathcal{I}$. Это противоречит тому, что $[a]\mathcal{I}$, $[d]\mathcal{I}$ – максимальные элементы в $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}$.

Примечанир 1.2. Необходимо отметить, что подалгебра $\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}}$, присоединенная независимой системе $\mathcal{N}$ $\mathcal{I}$ – подалгебр унарной алгебры $\boldsymbol{A}$, будет использована особенно во второй части этой работы.

Теорема 1.4. *Пусть унарная алгебра* $\boldsymbol{A}$ *не является* $\mathcal{I}$ *– простой и пусть* $\mathcal{N}$ *– независимая система* $\mathcal{I}$ *– подалгебр в* $\boldsymbol{A}$*. Тогда*

а) $C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}})$ *и* $C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \subseteq N(b)$ *для каждого* $b \in B(\mathcal{N})$.

б) $\cap \{C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})\} = \cap \mathcal{N}$.

в) *Если* $\mathcal{N}$ *– максимальная независимая система* $\mathcal{I}$ *– подалгебр алгебры* $\boldsymbol{A}$*, то для каждого непустого подмножества* $N \subset A$ *имеет место:* $N \in \mathcal{P}_{\max}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}})$ *тогда и только тогда, когда существует такое* $b \in B(\mathcal{N})$*, что* $N = C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I}$.

Доказательство. а) Из леммы 1.4 и леммы 2 следует $C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}})$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.

Пусть b – произвольный элемент из $B(\mathcal{N})$ и x – любой элемент из $C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I}$. Очевидно, что $[x]\mathcal{I} \neq [b]\mathcal{I}$. Так как $C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\boldsymbol{C}_{\mathcal{N}})$, то для каждого $c \in B(\mathcal{N})$ имеет место $[c]\mathcal{I} \nless [x]\mathcal{I}$. Значит, $[b]\mathcal{I} \nleq [x]\mathcal{I}$ для всех $x \in C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I}$, т.е. $x \in N(b)$.

б) I. Согласно (а) $\cap \{C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})\} \subseteq \cap \mathcal{N}$.

II. Предположим, что существует такое $y \in \cap \mathcal{N}$, что $y \notin \cap \{C_{\mathcal{N}} \backslash [b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})$. Тогда существует такое $c \in B(\mathcal{N})$ что $y \notin C_{\mathcal{N}} \backslash [c]\mathcal{I}$. Тогда или $y \notin C_{\mathcal{N}}$, или $y \in [c]\mathcal{I}$. Если $y \notin C_{\mathcal{N}}$, то существует такое $d \in B(\mathcal{N})$, что $[d]\mathcal{I} < [y]\mathcal{I}$. Значит, $y \notin N(d)$. Если $y \in [c]\mathcal{I}$, то $y \notin N(c)$. Это противоречит тому, что $N(c)$, $N(d) \in \mathcal{N}$ и $y \in \cap \mathcal{N}$.

в) Утверждение с) следует из леммы 1.4 и леммы 2.

Теорема 1.5. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– унарная алгебра и пусть* $\mathcal{N}$ *– независимая система* $\mathcal{I}$

– *подалгебр алгебры* $\mathbf{A}$. *Пусть* $|\mathcal{N}|\geqslant 2$, $N(a)$, $N(b)\in\mathcal{N}$, $N(a)\neq N(b)$, $N_a=C_{\mathcal{N}}\backslash[a]\mathcal{I}$ *и* $N_b=C_{\mathcal{N}}\backslash[b]\mathcal{I}$. *Тогда*

а) $[a]\mathcal{I}\cap[b]\mathcal{I}=\emptyset$.

б) $C_{\mathcal{N}}\backslash\cap\mathcal{N}=\cup\{[b]\mathcal{I}\,|\,b\in B(\mathcal{N})\}$.

в) $[a]\mathcal{I}\subseteq N_b$.

г) *Если* $N\in\mathcal{P}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}})$ *и* $N\cap[a]\mathcal{I}\neq\emptyset$, *то* $[a]\mathcal{I}\subseteq N$.

д) $[a]\cap[b]\subseteq\cap\mathcal{N}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.4 мы получаем, что N_a, $N_b\in\mathcal{P}_{\max}(\mathbf{C}_{\mathcal{N}})$. Предположим, что $N_a=N_b$. Тогда $[a]\mathcal{I}=[b]\mathcal{I}$. Отсюда мы получаем $N(a)=N(b)$. Это противоречит тому, что $N(a)\neq N(b)$ и $N(a)$, $N(b)\in\mathcal{N}$. Значит, $N_a\neq N_b$. Из этого, согласно лемме 3 и теореме 1.4, мы получаем утверждение теоремы 1.5.

Пусть $\mathbf{A}$ – унарная алгебра. Положим $K=\cap\{N|N\in\mathcal{P}(\mathbf{A})\}$. Если $K\neq\emptyset$, то подалгебра $\langle K\,;\,F\rangle$ алгебры $\mathbf{A}$ является $\mathcal{I}$ – простой в $\mathbf{A}$, и назовем ее *ядром* алгебры $\mathbf{A}$.

Теорема 1.6. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– унарная алгебра. Тогда* $K=\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})$.

Доказательство. I. Очевидно, имеет место $K\subseteq\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})$.

II. Пусть *a – произвольный элемент из* $\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})$. Тогда $N(a)=\emptyset$. Предположим, что существует такое $N\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $a\notin N$. Пусть $b\in N$. Так как $N(A)=\emptyset$, то $[a]\mathcal{I}\leqslant[b]\mathcal{I}$. Отсюда вытекает, что $a\in[a]\mathcal{I}\leqslant[b]\mathcal{I}\subseteq[b]\subseteq N$. Это противоречит тому, что $a\notin N$. Значит, $\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})\subseteq K$.

Следствие 1.1. *Если* $\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})\neq\emptyset$, *то унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *имеет ядро* $\langle K\,;\,F\rangle$ *и* $K=\cap\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A})$.

Примечание 1.3. На следующем примере мы покажем, что существует такая алгебра $\mathbf{A}=\langle A\,;\,F\rangle$, что имеет место:

a_1) существует такое $b\in A$, что $N=N(b)\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$ и $N_0(b)\notin\mathcal{P}(\mathbf{A})$ (см. лемму 1.2);

a_2) существует такое $b\in A$, что $N=N(b)\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$, существует такое $N_0\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $N\in\mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0)$, и существует такое $x\in A$, что $N_0\backslash N\nsubseteq[x]$ (см. теорему 1.2);

a_3) алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathcal{I}$ – простой, существуют такие $N_1=N(a)\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$, $N_2=N(b)\in\mathcal{P}(\mathbf{A})$, что $N_1\neq N_2$, $N_1\nsubseteq N_2$, $N_2\nsubseteq N_1$ и $N_0(\{a,\,b\})\notin\mathcal{P}(\mathbf{A})$ (см. лемму 1.4).

Пример 1.4. Пусть $\mathbf{G}_{12}=\langle G_{12};\,+\rangle$, где $G_{12}=\{a_0,\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_{11}\}$ является аддитивной группой целых чисел по mod 12. Тогда имеет место:

a_1) $N=N(a_3)=\{a_0,\,a_2,\,a_4,\,a_6,\,a_8,\,a_{10}\}\in\mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$ и $N_0(a_3)\;=\;N(a_3)\cup\{a_3,\,a_9\}\notin\mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$;

a_2) $N=N(a_3)\in\mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$, $N_0=G_{12}\in\mathcal{P}(\mathbf{G}_{12})$, $N\in\mathcal{P}_{\max}(\mathbf{N}_0)$, $a_9\in G_{12}\backslash N$ и $N_0\backslash N\nsubseteq[a_9]$;

a_3) алгебра $\boldsymbol{G}_{12}$ не является $\mathcal{I}$ – простой, $N_1 = N(a_4) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{G}_{12})$, $N_2 = N(a_3) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{G}_{12})$, $N_1 \neq N_2$, $N_1 \not\subset N_2$, $N_2 \not\subset N_1$ и $N_0(\{a_3, a_4\}) \notin \mathcal{P}(\boldsymbol{G}_{12})$.

Далее, мы заметим, что имеет место: если R^3 является векторным пространством над телом вещественных чисел и если каждому вещественному числу $r \in R$ сопоставлена унарная операция f_r на R, которая определена следующим образом: $f_r(\bar{a}) = r\bar{a}$ для каждого $\bar{a} \in R^3$, и если положим $F = \{f_r | r \in R\}$, то $\boldsymbol{A}(R^3) = \langle R^3; \{+\} \cup F \rangle$ является алгеброй $\mathcal{P}_{\max}(\boldsymbol{A}(R^3)) \neq \emptyset$ и $N(\bar{a}) \notin \mathcal{P}(\boldsymbol{A}(R^3))$ для всех $\bar{a} \in R^3$.

II

В дальнейшем вместо „$\boldsymbol{G} = \langle G; \cdot \rangle$ – группоид“ мы будем писать „G – группоид“.

Пусть G – группоид. Если A, B – непустые подмножества группоида G, то положим $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Непустое подмножество N группоида G называется *идеалом* в G, если $GN \subseteq N$ и $NG \subseteq N$.

Если A – непустое подмножество группоида G, то обозначим через $\mathcal{P}(A)$ множество всех таких идеалов N в G, что $N \subseteq A$.

Обозначим через $[x]_G$ идеал группоида G, *порожденный* элементом $x \in G$.

Определение 2.1. *Пусть N – идеал группоида G. Идеал M группоида G назовем максимальным идеалом в N, если $M \subset N$ и не существует такой элемент $M' \in \mathcal{P}(G)$, что $M \subset M' \subset N$.* Обозначим через $\mathcal{P}_{\max}(N)$ множество всех максимальных идеалов в N и через $\cap\mathcal{P}_{\max}(N)$ множество $\cap\{M | M \in \mathcal{P}_{\max}(N)\}$.

Идеал N группоида G назовем *$\mathcal{I}$ – простым*, если не существует такое $N' \in \mathcal{P}(G)$, что $N' \subset N$.

Пусть G – группоид. Если каждому элементу $a \in G (b \in G)$ сопоставлена унарная операция $f_a (g_b)$ на G, которая определена следующим образом: $f_a(x) = ax (g_b(x) = xb)$ для каждого элемента $x \in G$, и если положим $F_1 = \{f_a | a \in G\}$, $F_2 = \{g_b | b \in G\}$ и $F = F_1 \cup F_2$, то $\boldsymbol{A}(G) = \langle G; F \rangle$ есть унарная алгебра; назовем ее унарной алгеброй, присоединенной группоиду G. Очевидно, имеет место:

Лемма 2.1. *Пусть $\boldsymbol{A}(G)$ – унарная алгебра, присоединенная к группоиду G. Тогда для каждого непустого подмножества N группоида G справедливо:*

а) $N \in \mathcal{P}(G)$ тогда и только, когда $\langle N; F \rangle$ является подалгеброй алгебры $\boldsymbol{A}(G)$.

б) $N = [x]_G (x \in N)$ тогда и только тогда, когда $\langle N; F \rangle$ является подалгеброй в $\boldsymbol{A}(G)$, порожденной элементом $x \in N$.

Пусть G – группоид. Скажем, что два элемента x, $y \in G$ находятся в отношении $\mathcal{I}_G$, если $[x]_G = [y]_G$. Очевидно, отношение $\mathcal{I}_G$ на G является отношением эквивалентности. Обозначим через $G/\mathcal{I}_G$ множество всех $\mathcal{I}_G$ – классов, соответствующих отношению эквивалентности $\mathcal{I}_G$ на G, и знаком $[x]\mathcal{I}_G$ обозначим $\mathcal{I}_G$ – класс из $G/\mathcal{I}_G$, содержающий элемент $x \in G$. На множестве $G\ \mathcal{I}_G$ определим отношение $\leqslant$ следующим образом: $[x]\mathcal{I}_G \leqslant [y]\mathcal{I}_G (x, y \in G)$ тогда и только тогда, когда $[x] \subseteq [y]$. Если N является идеалом группоида G, то обозначим через $N/\mathcal{I}_G$ множество всех таких элементов $[x]\mathcal{I}_G$ из $G\ \mathcal{I}_G$, что $[x]\mathcal{I}_G \subseteq N$. Очевидно, имеет место: если $\mathbf{A}(G)$ – унарная алгебра, присоединенная к группоиду G, то $\mathcal{I}_G = \mathcal{I}$.

Пусть G – группоид и пусть $\emptyset \neq B \subseteq G$. Обозначим через $N_0(B)$ множество всех таких $x \in G$, что для каждого $b \in B$ имеет место $[b]\mathcal{I}_G \not< [x]\mathcal{I}_G$, и через $N(B)$ обозначим множество всех таких $x \in G$, что для каждого $b \in B$ справедливо $[b]\mathcal{I}_G \not\leqslant [x]\mathcal{I}_G$. В дальнейшем вместо $X(\{a\})$, где $X = N_0$, N и $a \in G$, мы будем писать $X(a)$.

Определение 2.2. *Идеал N группоида G назовем $\mathcal{I}$ – идеалом в G, если существует такое $b \in G$, что $N = N(b)$. Множество всех $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G обозначим через $\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$.*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbf{A}(G)$ – унарная алгебра, присоединенная группоиду G. Тогда для каждого подмножества N группоида G имеет место: $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$ тогда и только тогда, когда $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A}(G))$.*

Доказательство. Утверждение леммы 2.2 вытекает из леммы 2.1.

Следствие 2.1. *Каждый максимальный идеал группоида G является $\mathcal{I}$ – идеалом группоида G.*

Лемма 2.3. *Пусть G – группоид, $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$ и $N = N(b)$, где $b \in G$. Тогда $N_0(b) \in \mathcal{P}(G)$, $N_0(b) \backslash N = [b]\mathcal{I}_G$ и $N \in \mathcal{P}_{\max}(N_0(b))$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}(G)$ – унарная алгебра, присоединенная группоиду G. Пусть $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$ и $N = N(b)$. Тогда по лемме 2.2 $N = N(b) \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(\mathbf{A}(G))$. Из этого, согласно лемме 1.2 и лемме 2.1, мы получаем утверждение леммы 2.3.

Теорема 2.1. *Для каждого подмножества N группоида G имеет место: $N \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$ тогда и только тогда, когда $N \in \mathcal{P}(G)$ и существует такое $N_0 \in \mathcal{P}(G)$, что $N \in \mathcal{P}_{\max}(N_0)$, и для каждого $x \in G$ справедливо: $x \in G \backslash N$ тогда и только тогда, когда $N_0 \backslash N \subseteq [x]_G$.*

Доказательство. Утверждение георемы 2.1 вытекает из леммы 2.1 и теоремы 1.2.

Лемма 2.4. *Пусть группоид G не является $\mathcal{I}$ – простым. Пусть $N \in \mathcal{P}(G)$, $N \neq G$ и $b \in G \backslash N$. Тогда $N(b) \in \mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$.*

Доказательство. Утверждение леммы 2.4 вытекает из леммы 2.1, леммы 1.3 и леммы 2.2.

Определение 2.3. *Пусть G – группоид. Непустое подмножество $\mathcal{N}$ множества $\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G)$ назовем независимой системой $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G (или в G), если для каждых двух элементов N_1, $N_2 \in \mathcal{N}$ имеет место: из $N_1 \neq N_2$ вытекает $N_1 \not\subseteq N_2$.*

Теорема 2.2. *Пусть группоид G не является $\mathcal{I}$ – простым. Тогда:*

а) $\mathcal{P}^{\mathcal{I}}(G) \neq \emptyset$;

б) *Каждый $\mathcal{I}$ – идеал группоида G является элементом по крайней мере одной независимой системы $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G;*

в) *К каждой независимой системе $\mathcal{N}$ $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G существует такая максимальная независимая система $\mathcal{M}$ $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2 вытекает из теоремы 1.3, леммы 2.2 и леммы 2.1.

Пусть G – группоид а пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов в G. Обозначим через $B(\mathcal{N})$ множество таких элементов из G, что для каждого $N \in \mathcal{N}$ существует такое $b \in B(\mathcal{N})$, что $N = N(b)$, а для каждого $b \in B(\mathcal{N})$ есть $N(b) \in \mathcal{N}$. Обозначим через $C_{\mathcal{N}}$ множество $N_0(B(\mathcal{N}))$.

Лемма 2.5. *Пусть группоид G не является $\mathcal{I}$ – простым и пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Тогда:*

а) *$b \in C_{\mathcal{N}}$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.*

б) *$C_{\mathcal{N}} \in \mathcal{P}(G)$ и $C_{\mathcal{N}}$ не является $\mathcal{I}$ – простым в G.*

в) *$[b]\mathcal{I}_G$ – максимальный элемент в $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}_G$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.*

г) *Если $\mathcal{N}$ – максимальная независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов в G, тогда $[a]\mathcal{I}_G$ $(a \in G)$ – максимальный элемент в $C_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}_G$ тогда и только тогда, когда существует такое $b \in B(\mathcal{N})$, что $[a]\mathcal{I}_G = [b]\mathcal{I}_G$.*

Доказательство. Утверждение леммы 2.5 вытекает из леммы 2.1 и леммы 1.4.

При помощи леммы 2.1, теоремы 1.4 и теоремы 1.5 можно легко показать следующие две теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть группоид G не является $\mathcal{I}$ – простым и пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов в G. Тогда:*

а) *$C_{\mathcal{N}} \setminus [b]\mathcal{I}_G \in \mathcal{P}_{\max}(C_{\mathcal{N}})$ и $C_{\mathcal{N}} \setminus [b]\mathcal{I}_G \subseteq N(b)$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.*

б) *$\cap\{(C_{\mathcal{N}} \setminus [b]\mathcal{I}_G \mid b \in B(\mathcal{N})\} = \cap\mathcal{N}$.*

в) *Если $\mathcal{N}$ – максимальная независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G, то для каждого непустого подмножества $N \subset G$ имеет место: $N \in \mathcal{P}_{\max}(C_{\mathcal{N}})$ тогда и только тогда, когда существует такое $b \in B(\mathcal{N})$, что $N = C_{\mathcal{N}} \setminus [b]\mathcal{I}_G$.*

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathcal{N}$ *– независимая система* $\mathcal{I}$ *– идеалов группоида* G *и пусть* $|\mathcal{N}|\geqslant 2$. *Пусть* $N(a)$, $N(b)\in\mathcal{N}$, $N(a)\neq N(b)$, $N_a=C_{\mathcal{N}}\backslash[a]\mathcal{I}_G$, $N_b=C_{\mathcal{N}}\backslash[b]\mathcal{I}_G$. Тогда:

а) $[a]\mathcal{I}_G\cap[b]\mathcal{I}_G=\emptyset$.

б) $C_{\mathcal{N}}\backslash\cap\mathcal{N}=\cup\{[b]\mathcal{I}_G|b\in B(\mathcal{N})\}$.

в) $[a]\mathcal{I}_G\subseteq N_b$.

г) Если $N\in\mathcal{P}(C_{\mathcal{N}})$ и $N\cap[a]\mathcal{I}_G=\emptyset$, то $[a]\mathcal{I}_G\subseteq N$.

д) $[a][b]\subseteq\cap\mathcal{N}$.

Теорема 2.4 обобщает утверждение теоремы 2 из работы [9].

В дальнейшем вместо $[x]_G$ ($\mathcal{I}_G$, G $\mathcal{I}_G$, $[x]\mathcal{I}_G$) мы будем писать $[x]$ ($\mathcal{I}$, G $\mathcal{I}$, $[x]\mathcal{I}$).

Идеал Q группоида G назовем *простым* идеалом в G, если для каждых двух идеалов A, B в G из $AB\subseteq Q$ вытекает $A\subseteq Q$ или $B\subseteq Q$.

Теорема 2.5. *Пусть* G *– группоид и пусть* $N\in\mathcal{P}^{\mathfrak{s}}(G)$ *и* $N=N(a)$, *где* $a\in G$. *Тогда:* $N(a)$ *является простым идеалом группоида* G *тогда и только тогда, когда* $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}\neq\emptyset$.

Доказательство. I. Пусть $\mathcal{I}$ – идеал $N(a)$ – простый идеал в G и $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}=\emptyset$. Тогда $(N_0(a))^2=(N(a)\cup[a]\mathcal{I})^2\subseteq N(a)$ и $N_0(a)\nsubseteq N(a)$. Это противоречит тому, что $N(a)$ является простым идеалом в G. Значит, $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}\neq\emptyset$.

II. Пусть $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}\neq\emptyset$. Предположим, что $\mathcal{I}$ – идеал $N(a)$ не является простым идеалом в G, т.е. существуют такие идеалы A, B в G, что $AB\subseteq N(a)$ и $A\nsubseteq N(a)$, $B\nsubseteq N(a)$. Пусть $c\in A\backslash N(a)$, $d\in B\backslash N(a)$. Тогда $[a]\mathcal{I}\subseteq[a]\subseteq[c]\subseteq A$ и $[a]\mathcal{I}\subseteq[d]\subseteq B$. Отсюда следует $([a]\mathcal{I})^2\subseteq[c][d]\subseteq AB\subseteq N(a)$. Это означает, что $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}=\emptyset$. Однако последнее противоречит тому, что $([a]\mathcal{I})^2\cap[a]\mathcal{I}\neq\emptyset$.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathcal{N}$ *– независимая система* $\mathcal{I}$ *– идеалов группоида* G. *Тогда: каждый* $\mathcal{I}$ *– идеал* N *из* $\mathcal{N}$ *является простым идеалом в* G *тогда и только тогда, когда для каждого* $b\in B(\mathcal{N})$ *имеет место* $([b]\mathcal{I})^2\cap[b]\mathcal{I}\neq\emptyset$.

Идеал I группоида G назовем *изолированным* в G, если из $a^2\in I$ $(a\in G)$ вытекает $a\in I$.

Следствие 2.3. *Пусть* G *– группоид и пусть* $a\in G$. *Если* $\mathcal{I}$ *– идеал* $N(a)$ *является изолированным идеалом в* G, *то* $N(a)$ *– простой идеал в* G.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{I}$ – идеал $N(a)$ является изолированным идеалом в G. Согласно лемме 2.3 мы получаем, что $a^2\in[a]\mathcal{I}$. Из этого, согласно теореме 2.5, мы заключаем, что $N(a)$ является простым идеалом в G.

Следствие 2.4. *Пусть* G *– группоид и пусть* $a\in G$. *Если* $N(a)$ *является таким*

$\mathcal{J}$ – *идеалом в* G, *что* $[a]\mathcal{J}$ *содержит идемпотент, то* $N(a)$ *является простым идеалом в* G.

Доказательство. *Пусть* $[a]\mathcal{J}$ содержит идемпотент e. Тогда $e^2 \in [a]\mathcal{J}$. Из этого, согласно теореме 2.5, мы получаем, что $N(a)$ является простым идеалом в G.

Следствие 2.5. *Если* $N(a)$ *является таким максимальным идеалом в* G $(a \in G)$, *что* $[a]\mathcal{J}$ *содержит более одного элемента, то* $N(a)$ *является простым идеалом в* G.

Доказательство. Пусть $[a]\mathcal{J}$ содержит более одного элемента. По лемме 2.3 мы имеем $G = N(a) \cup [a]\mathcal{J}$. Предположим, что $([a]\mathcal{J})^2 \cap [a]\mathcal{J} = \emptyset$. Согласно теореме 2.4 имеет место $ga \in N(a)$ и $ag \in N(a)$ для каждого $g \in G$. Из этого вытекает $N(a) \subset N(a) \cup \{a\} \neq G$ и $N(a) \cup \{a\} \in \mathcal{P}(G)$. Это противоречит тому, что $N(a)$ является максимальным идеалом в G. Значит, $([a]\mathcal{J})^2 \cap [a]\mathcal{J} \neq \emptyset$. Из этого, по теореме 2.5, мы получаем, что $N(a)$ является простым идеалом в G.

На примере мы покажем, что следующее утверждение не имеет место.

Для каждого группоида G имеет место: если $N(a)$ $(a \in G)$ является таким идеалом в G, что $[a]\mathcal{J}$ содержит более одного элемента, то $N(a)$ является простым идеалом в G.

Пример 2.1. Пусть $G_1 = \{0, a, b, c\}$ и бинарная операция $\cdot$ на G_1 определена таблицей:

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
c	0	b	a	0

Тогда G – группоид и $\{0\} = N(a)$, $[a]\mathcal{J} = \{a, b\}$, $\{0, a, b\} \cdot \{0, a, b\} = \{0\}$ и $\{0, a, b\} \nsubseteq \{0\}$. Вследствие последнего $\mathcal{J}$ – идеал $N(a) = \{0\}$ в G_1 не является простым идеалом в G.

Следствие 2.6. *Если* $N(a)$ $(a \in G)$ *является таким максимальным идеалом в группоиде* G, *что* $[a]\mathcal{J}$ *содержит идемпотент или более одного элемента, то* $N(a)$ *является простым идеалом в* G.

Теорема 2.6. *Пусть* $\mathcal{N}$ – *независимая система* $\mathcal{J}$ – *идеалов группоида* G. *Тогда: если* $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^2$, *то каждый* $\mathcal{J}$ – *идеал* N *из* $\mathcal{N}$ *является простым идеалом v* G.

Доказательство. Пусть $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^2$. Предположим, что существует такое N из $\mathcal{N}$, что N не является простым идеалом в G. Тогда существует такое $c \in B(\mathcal{N})$, что $N = N(c)$, и по теореме 2.5 мы получаем $([c]\mathcal{J})^2 \cap [c]\mathcal{J} = \emptyset$.

Согласно теореме 2.3 мы имеем, что $N(c) = C_{\mathcal{N}} \setminus [c]\mathcal{J} \in \mathcal{P}_{\max}(C_{\mathcal{N}})$. Отсюда следует $C_{\mathcal{N}}^2 = (N(c) \cup [c]\mathcal{J})^2 \subseteq N(c) \subset C_{\mathcal{N}}$. Это противоречит тому, что $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^2$.

На примере мы покажем, что не для каждого группоида G имеет место следующее утверждение.

Пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{J}$ – идеалов группоида G. Тогда: если $N(b)$ является простым идеалом для каждого $b \in B(\mathcal{N})$, то $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^2$.

Пример 2.2. Пусть $G_2 = \{a, b, c, d\}$ и бинарная операция $\cdot$ на G_2 определена таблицей:

	a	b	c	d	e
a	b	b	b	b	a
b	b	b	b	b	a
	b	b	c	b	b
d	b	b	b	d	d
e	a	a	c	b	e

Тогда G_2 – группоид, $\mathcal{N} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ является независимой системой $\mathcal{J}$ – идеалов группоида G_2 и $B(\mathcal{N}) = \{c, d\}$. Далее, для каждого $x \in B(\mathcal{N})$ имеет место $([x]\mathcal{J})^2 \cap [x]\mathcal{J} \neq \emptyset$, т.е. по теореме 2.5 идеалы $\{a, b\ c\}$, $\{a, b, d\}$ являются простыми в G_2, и $C_{\mathcal{N}} \neq C_{\mathcal{N}}^2$, где $C_{\mathcal{N}} = \{a, b, c, d\}$.

Лемма 2.6. *Пусть G – группоид и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{P}_{\max}(G) \neq \emptyset$. Тогда:*

а) $C_{\mathcal{N}} = G$,

б) *$N(b)$ является простым идеалом в G для каждого элемента $b \in B(\mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда $G = G^2$.*

Доказательство. Пусть b – любой элемент из $B(\mathcal{N})$. Тогда $N(b) \in \mathcal{N}$ и по лемме 2.1 и лемме 2 существует такое $a \in G \setminus N(b)$, что $N(b) = G \setminus [a]\mathcal{J}$, где $[a]\mathcal{J}$ – максимальный элемент в $G/\mathcal{J}$. Из этого вытекает, что $b \in [a]\mathcal{J}$ т.е. $[b]\mathcal{J}$ – максимальный элемент в $G/\mathcal{J}$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$ Значит, $C_{\mathcal{N}} = G$.

в) I. Пусть $N(b)$ является простым идеалом в G для каждого $b \in B(\mathcal{N})$. Тогда по теореме 2.5 для каждого $b \in B(\mathcal{N})$ имеет место $([b]\mathcal{J})^2 \cap [b]\mathcal{J} \neq \emptyset$. Пусть $a \in G \setminus G^2$. Тогда $G(G \setminus \{a\} \subseteq G^2 \subseteq G \setminus \{a\}$ и $(G \setminus \{a\})G \subseteq G \subseteq G \setminus \{a\}$. Отсюда $G \setminus \{a\} \in \mathcal{N}$. Поэтому существует такое $c \in B(\mathcal{N})$, что $N(c) = G \setminus \{a\}$. Из этого вытекает, что $c = a$, $[c]\mathcal{J} = \{a\}$ и $([c]\mathcal{J})^2 \cap [c]\mathcal{J} = \emptyset$. Это противоречит тому, что $([b]\mathcal{J})^2 \cap [b]\mathcal{J} \neq \emptyset$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$. Значит $G = G^2$.

II. Пусть $G = G^2$. Тогда в силу (а) мы получаем, что $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^2$. Из этого, согласно теореме 2.6, следует, что $N(b)$ – простой идеал в G.

Теорема 2.7. *Пусть G – группоид и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{P}_{\max}(G) \neq \emptyset$. Тогда каждый максимальный идеал в G является простым в G тогда и только тогда, когда $G = G^2$* (см. теорему 1 из [9]).

Доказательство. Утверждение теоремы 2.7 непосредственно вытекает из теоремы 2.6 и леммы 2.6.

Пусть G – группоид и $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Обозначим через $\mathcal{Q}(C)$ множество всех таких простых идеалов в G, что $(G\setminus Q)\cap C_{\mathcal{N}}\neq\emptyset$, и через $\cap\mathcal{Q}(C)$ обозначим множество $\cap\{Q|Q\in\mathcal{Q}(C)\}$.

Теорема 2.8. *Пусть G – группоид и $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Пусть $Q\in\mathcal{Q}(C)$. Тогда $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$ тогда и только тогда, когда существует один и только один такой элемент $b\in B(\mathcal{N})$, что $(G\setminus Q)\cap C_{\mathcal{N}}=[b]\mathcal{I}$.*

Доказательство. I. Пусть $Q\in\mathcal{Q}(C)$ и пусть $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$. Согласно теореме 2.4 $(G\setminus Q)\cap\{\cup[b]\mathcal{I}|\ b\in B(\mathcal{N})\}\neq\emptyset$. В силу последнего существует такое $b\in B(\mathcal{N})$, что $[b]\mathcal{I}\cap(G\setminus Q)\neq\emptyset$. Предположим, что существуют элементы c, $d\in B(\mathcal{N})$ такие, что $[c]\mathcal{I}\neq[d]\mathcal{I}$ и $[c]\mathcal{I}\cap(G\setminus Q)\neq\emptyset$, $[d]\mathcal{I}\cap(G\setminus Q)\neq\emptyset$. Тогда, по теореме 2.4, $[c][d]\subseteq\cap\mathcal{N}\subseteq Q$. Это противоречит тому, что Q является простым идеалом в G. Из предыдущего, по теореме 2.4, следует, что существует один и только один такой элемент $b\in B(\mathcal{N})$, что $(G\setminus Q)\cap C_{\mathcal{N}}=[b]\mathcal{I}$.

II. Пусть $Q\in\mathcal{Q}(C)$ и предположим, что существует такое $b\in B(\mathcal{N})$, что $(G\setminus Q)\cap C_{\mathcal{N}}=[b]\mathcal{I}$. Тогда по теореме 2.4 мы получаем $(G\setminus Q)\cap(\cap\mathcal{N})=\emptyset$. Отсюда следует, что $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$.

Следствые 2.7. *Пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Пусть Q является таким простым идеалом в G, что $\cap\mathcal{N}\subseteq Q\subset C_{\mathcal{N}}$. Тогда Q является максимальным идеалом в $C_{\mathcal{N}}$.*

Доказательство. По теореме 2.8 существует один и только один такой элемент $b\in B(\mathcal{N})$, что $[b]\mathcal{I}\subseteq G\setminus Q$. Согласно последнему существует такой элемент $b\in B(\mathcal{N})$, что $[b]\mathcal{I}\subseteq C_{\mathcal{N}}\setminus Q$. Отсюда $[b]\mathcal{I}=C_{\mathcal{N}}\setminus Q$. Из этого, по теореме 2.3, мы получаем $Q\in\mathcal{P}_{\max}(C_{\mathcal{N}})$.

Следствие 2.8. *Пусть G – группоид и пусть $\emptyset\neq\mathcal{N}\subseteq\mathcal{P}_{\max}(G)\neq\emptyset$. Пусть Q является таким простым идеалом группоида G, что $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$. Тогда $Q\in\mathcal{P}_{\max}(G)$* (см. теорему 3 из [9]).

Теорема 2.9. *Пусть $\mathcal{N}$ – максимальная независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Пусть Q является простым идеалом в G и $Q\subset C_{\mathcal{N}}$. Тогда Q является максимальным идеалом в $C_{\mathcal{N}}$ тогда и только тогда, когда $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$.*

Доказательство. I. Если Q – максимальный идеал в $C_{\mathcal{N}}$, то по теореме 2.3 мы получаем $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$.

II. Если $\cap\mathcal{N}\subseteq Q\subset C_{\mathcal{N}}$, то в силу следствия 2.7 Q является максимальным идеалом в $C_{\mathcal{N}}$.

Следствие 2.8. *Пусть G – группоид и пусть $\mathcal{N}=\mathcal{P}_{\max}(G)\neq\emptyset$. Пусть Q является таким простым идеалом в G, что $Q\neq G$. Тогда $Q\in\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $\cap\mathcal{N}\subseteq Q$* (см. теорему 4 из [9]).

Доказательство. Утверждение следствия 2.9 вытекает из леммы 2.6 и теоремы 2.9.

Обозначим через Q^* множество всех таких простых идеалов группоида G, что $Q \neq G$, и через $\cap Q^*$ обозначим множество $\cap\{Q \mid Q \in Q^*\}$. Если группоид G не содержит простой идеал $Q \neq G$, то положим $\cap Q^* = G$.

Следствие 2.10. *Пусть G – группоид а пусть $\mathcal{N} = \mathcal{P}_{\max}(G) \neq \emptyset$. Тогда каждый простой идеал $Q \neq G$ является максимальным в G тогда и только тогда, когда* $\cap\mathcal{N} \subseteq \cap Q^*$ (см. теорему 5 из [9])

Теорема 2.10. *Пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов группоида G. Тогда $\cap\mathcal{N} = \cap\mathcal{Q}(C)$ тогда и только тогда, когда для каждого простого идеала $Q \in \mathcal{Q}(C)$ имеет место $\cap\mathcal{N} \subseteq Q$ и $\mathcal{N}(b)$ является простым идеалом для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.*

Доказательство. I. Пусть $\cap\mathcal{N} = \cap\mathcal{Q}(C)$. Тогда, очевидно, для каждого $Q \in \mathcal{Q}(C)$ имеет место $\cap\mathcal{N} \subset Q$. Пусть b – любой элемент из $B(\mathcal{N})$. Тогда по теореме 2.4 мы имеем $b \in C_{\mathcal{N}}$ и $b \notin \cap\mathcal{N}$, т.е. $b \notin \cap\mathcal{Q}(C)$. Следовательно, существует такое $Q \in \mathcal{Q}(C)$, что $b \notin Q$. Из этого согласно теореме 2.8 $(G\backslash Q)\cap C_{\mathcal{N}} = [b]\mathcal{I}$. Тогда для каждого $b \in B(\mathcal{N})$ существует такое $Q \in \mathcal{Q}(C)$, что имеет место $C_{\mathcal{N}}\backslash[b]\mathcal{I} \subseteq Q$ и $C_{\mathcal{N}} = (C_{\mathcal{N}}\backslash[b]\mathcal{I})\cup[b]\mathcal{I} \nsubseteq Q$. Предположим, что существует такое $b \in B(\mathcal{N})$, что $([b]\mathcal{I})^2\cap[b]\mathcal{I} = \emptyset$. Отсюда по теореме 2.3 вытекает, что $C_{\mathcal{N}}^2 \subseteq C_{\mathcal{N}}\backslash[b]\mathcal{I} \subseteq Q$. Это противоречит тому, что $C_{\mathcal{N}} \nsubseteq Q$ и Q является простым идеалом в G. Значит, $([b]\mathcal{I})^2\cap[b]\mathcal{I} \neq \emptyset$ для каждого $b \in B(\mathcal{N})$. Из этого по теореме 2.5 следует, что $N(b)$ является простым идеалом в G для каждого $b \in B(\mathcal{N})$.

II. Пусть для каждого $Q \in \mathcal{Q}(C)$ имеет место $\cap\mathcal{N} \subseteq Q$ и $N(b)$ является простым идеалом в G для каждого $b \in B(\mathcal{N})$. Отсюда $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q}(C)$. Из предыдущего следует $\cap\mathcal{Q}(C) \subseteq \cap\mathcal{N} \subseteq \cap\mathcal{Q}(C)$.

Следствие 2.10. *Пусть G – группоид и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{P}_{\max}(G) - \emptyset$. Тогда $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $\cap\mathcal{Q}(C) = \cap\mathcal{N}$* (см. теорему 6 из [9]).

Доказательство. I. Если $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{N}$, то, очевидно, $\cap\mathcal{Q}(C) = \cap\mathcal{N}$

II. Если $\cap\mathcal{Q}(C) = \cap\mathcal{N}$, то по следствию 2.8 мы имеем $\mathcal{Q}(C) \subseteq \mathcal{N}$, а по теореме 2.10 и следствию 2.2 мы получаем $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}(C)$.

Пусть G – группоид. Положим $K = \cap\{N \mid N \in \mathcal{P}(G)\}$. Если $K \neq \emptyset$, то идеал K группоида G является $\mathcal{I}$ – простым и назовем его *адром* группоида G.

Теорема 2.11. *Если $\cap Q^*$ содержит идемпотенты, то группоид G имеет ядро K и $\cap Q^*$ содержит точно те же идемпотенты, которые содержит ядро K группоида G* (см. теорему 7 из [9])

Доказательство. Пусть e – произвольный идемпотент из $\cap Q^*$. Предположим, что существует такой элемент $N \in \mathcal{P}(G)$, что $e \notin N$ Пусть x – любой элемент из $G\backslash N(e)$, т.е. $[e]\mathcal{I} \leqslant [x]\mathcal{I}$. Пусть $b \in [x]\mathcal{I}\cap N$. Тогда $e \in [e]\mathcal{I} \leqslant [x]\mathcal{I}$

$= [b]\mathscr{I} \subseteq [b] \subseteq N$. Это противоречит тому, что $e \notin N$. Из этого вытекает, что $N \cap (G \setminus N(e)) = \emptyset$. Значит, $N \subseteq N(e) \in \mathscr{P}^{\mathscr{I}}(G)$ и $e \in [e]\mathscr{I}$. Согласно следствию 2.4 $N(e)$ является простым идеалом в G. Так как $e \notin N(e)$, то $e \notin \cap Q^*$. Последнее противоречит тому, что $e \in \cap Q^*$. Значит, $e \in N$ для каждого $N \in \mathscr{P}(G)$. Из предыдущего следует, что для каждого идемпотента $e \in \cap Q^*$ имеет место $e \in K$. Так как $K \subseteq \cap Q^*$, то для всякого идемпотента $e \in K$ имеет место $e \in \cap Q^*$. Значит, $\cap Q^*$ содержит такие и только такие идемпотенты, которые содержит ядро K группоида G.

Теорема 2.12. *Пусть G – группоид. Тогда $K = \cap \mathscr{P}^{\mathscr{I}}(G)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.12 вытекает из теоремы 1.6 и леммы 2.1.

Следствие 2.11. *Если $\cap \mathscr{P}^{\mathscr{I}}(G) \neq \emptyset$, то G имеет ядро K и $K = \cap \mathscr{P}^{\mathscr{I}}(G)$.*

Пусть группоид G имеет ядро K. Элемент $x \in G$ назовем K-потентным, если существует такое натуральное число n, что $x^n \cap K \neq \emptyset$ (вместо $\{x\}^n$ мы будем писать x^n и $x^n = xx^{n-1} \cup x^2x^{n-2} \cup \ldots \cup x^{n-1}x$ для каждого натурального числа n, см. [3] стр. 99).

Обозначим через:

N_0 множество всех K-потентных элементов в G,

N_1 наибольший идеал, находящийся в N_0.

Тогда, очевидно, $K \subseteq N_1 \subseteq N_0$.

Теорема 2.13. *Для каждого группоида G, который имеет ядро K, имеет место* $\cap Q^* \subseteq N_1$ (см. теорему 8 из [9]).

Доказательство. Сперва докажем, что $\cap Q^* \subseteq N_0$. Предположим, что $G \setminus N_0 \neq \emptyset$. Пусть z – произвольный элемент из $G \setminus N_0$. Покажем, что $z \in \cap Q^*$. Обозначим через $\mathscr{T}$ множество таких идеалов I в G, что $I \cap z^n = \emptyset$ для каждого натурального числа n. Так как z неявляется K-потентным элементом в G, то $K \in \mathscr{T}$, т.е. $\mathscr{T} \neq \emptyset$. Согласно лемме Цорна существует максимальный элемент в $\mathscr{T}$, обозначим его Q_z. Предположим, что существуют такие идеали A, B в G, что $AB \subseteq Q_z$ и $A \nsubseteq Q_z$ и $B \nsubseteq Q_z$. Так как $Q_z \subset Q_z \cup A$ и $Q_z \cup A$ является идеалом в G, то существует такое натуральное число p, что $z^p \cap A \neq \emptyset$. Аналогично можно доказать, что существует такое натуральное число q, что $z^q \cap B \neq \emptyset$. Из этого вытекает, что $z^{p+q} \cap AB \neq \emptyset$. Значит, $z^{p+q} \cap Q_z \neq \emptyset$. Это противоречит тому, что $Q_z \in \mathscr{T}$. Отсюда вытекает, что Q_z является простым идеалом в G и $z \notin Q_z$, т.е. $z \notin \cap Q^*$. Из предыдущего следует $\cap Q^* \subseteq N_0$. Так как $\cap Q^*$ является идеалом в G, N_1 является наибольшим идеалом в N_0 и $\cap Q^* \subseteq N_0$, то $\cap Q^* \subseteq N_1$.

Теорема 2.14. *Пусть G – полугруппа и пусть G имеет ядро K. Пусть $\mathscr{N}$ – независимая система $\mathscr{I}$ – идеалов в G и пусть $C_{\mathscr{N}} = C_{\mathscr{N}}^2$. Пусть $Gd = C_{\mathscr{N}}d$ и*

$dG = dC_{\mathcal{N}}$ для каждого $d \in \{[b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})\}$. Тогда $N_1 \subseteq \cap\mathcal{N}$ (см теорему 9 из [9]).

Доказательство. Предположим, что $N_1 \nsubseteq \cap\mathcal{N}$, Это означает, что существует такой элемент $x \in N_1$ а такой элемент $c \in B(\mathcal{N})$, что $x \notin N(c)$ Отсюда следует $[c]\mathcal{I} \leqslant [x]\mathcal{I} \subseteq [x] \subseteq N_1$, т е $c \in N_1$, Так как $c \in N_1$, то существует такое натуральное число n, что $c^n \in K$. По теореме 1.4 мы получаем $N = C_{\mathcal{N}} \setminus [c]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(G)$. Тогда $K \subseteq N$; итак, $c^n \in N$. Значит, существует такое наименьшее натуральное число k_0, что $c^{k_0+1} \in N$. Тогда для всех натуральных чисел $k > k_0 (\geqslant 1)$ мы имеем $c^k \in N$. Далее имеет место $C_{\mathcal{N}} = N \cup [c]\mathcal{I}$ и $N \cap [c]\mathcal{I} = \emptyset$. Так как $c \in [c]\mathcal{I}$ и по лемме 1.4 $C_{\mathcal{N}} \in \mathcal{P}(G)$, то $c^{k_0} \in [c]\mathcal{I}$ Если мы положим $d = c^{k_0}$, то $d^2 = (c^{k_0})^2 = c^{2k_0} \in N (2k_0 > k_0)$. Значит, существует такой элемент $d \in [c]\mathcal{I}$, что $d^2 \in N$.

Пусть $A = \{x \in G \mid xd \in N \text{ и } dx \in N\}$. Тогда, очевидно, $d \in A$, т.е $A \cap [c]\mathcal{I} = \emptyset$. Покажем, что $A \in \mathcal{P}(G)$. Пусть z – произвольный элемент из G и x – произвольной элемент из A. Тогда $(zx)d = z(xd) \in zN \subseteq N$ и $d(xz) = (dx)z \in Nz \subseteq N$, т.е. $zx \in A$ и $xz \in A$. Значит, $A \in \mathcal{P}(G)$. Из этого по теореме 2.4 мы получаем $[c]\mathcal{I} \subseteq A$.

Пусть u – любой элемент из $C_{\mathcal{N}}$. Тогда по теореме 2.4 мы имеем или $u \in \cap\mathcal{N}$, или $u \in \cup\{[b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})\}$. Предположим, что $u \in \cap\mathcal{N}$. Согласно теореме 2.3 мы получаем $u \in \cap\mathcal{N} \subseteq C_{\mathcal{N}} \setminus [c]\mathcal{I} = N$; итак, $ud \in N$ и $du \in N$. Предположим, что $u \in \cup\{[b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})$, Тогда существует такои элемент $b \in B(\mathcal{N})$, что $u \in [b]\mathcal{I}$. Если $b = c$, то $ud \in N$ и $du \in N$ (так как $[c]\mathcal{I} \subseteq A$). Если $b \neq c$, то по теореме 2.4 мы получаем $ud \in [b]\mathcal{I}[c]\mathcal{I} \subseteq [b][c] \subseteq \cap\mathcal{N} \subseteq N$ и аналогично $du \in \cap\mathcal{N} \subseteq N$. Из предыдущих рассуждений вытекает $C_{\mathcal{N}}d \subseteq N$ и $dC_{\mathcal{N}} \subseteq N$.

Так как $d \in \cup\{[b]\mathcal{I} \mid b \in B(\mathcal{N})\}$, то по предположению мы получаем $Gd = C_{\mathcal{N}}d$ и $dG = dC_{\mathcal{N}}$. Следовательно, $Gd \subseteq N$ и $dG \subseteq N$. Отсюда $GdG \subseteq N$, т.е. $dG \cup Gd \cup GdG \subseteq N = C_{\mathcal{N}} \setminus [c]\mathcal{I}$ и $d \in [c]\mathcal{I}$. Тогда очевидно, что $[d] \cap [c]\mathcal{I}$ содержит точно один элемент, т.е. $[d] \cap [c]\mathcal{I} = \{d\}$. Следовательно, $[c]\mathcal{I} = \{d\}$ и $d^2 \in N$. Тогда $C_{\mathcal{N}}^2 = (N \cup \{d\})^2 \subseteq N \subset C_{\mathcal{N}}$ Это противоречит тому, что $C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}$ Значит, $N_1 \subseteq \cap\mathcal{N}$.

Пример 2.3. Пусть $\langle S_{12}, \cdot \rangle$ – полугруппа из прим ра 1.2 и п сть $\langle A_1, \cdot$ – полугруппа из примера 1.3. Положим $a_0 = 0$ и $S - S_{12} \cup A$ На множестве S определим бинарную операцию следующим обр. зом.

$x \cdot y =$ xy, если или $x, y \in S_{12}$ и xy – произведение элементов x, y в $S_{12}, \cdot \rangle$,
или $x, y \in A_1$ и xy пр)изведение элементов x, y в $\langle A_1 \cdot \cdot \rangle$,
$y \cdot$ -0, если $x \in S_{12}$ и $y \in A_1$.

Тогда $S=\langle S\,;\,\cdot\rangle$ является полугруппой $K=\{0\}$, $N_0=N_1=\{0, a_6\}$ (см. определение K, N_0, N_1) и $M=S\backslash\{a_1, a_5, a_7, a_{11}\}$ является единственным максимальным идеалом в S. Очевидно, имеет место $S^2=S$. Тогда по теореме 9 из [9] мы получаем

$$N_1\subseteq M^*=S\backslash\{a_1, a_5, a_7, a_{11}\}\,,$$

где M^* – пересечение всех максимальных идеалов в S.

Пусть c – произвольный (фиксированый) элемент из $(0,1)$. Тогда $\mathcal{N}=\{N(a_3), N(a_4), N(c)\}$ является независимой системой $\mathcal{I}$ – идеалов в S, где $N(a_3)=\{a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}\}\cup A_1$, $N(a_4)=\{a_3, a_6, a_9\}\cup A_1$, $N(c)=S_{12}\cup\{x\in A_1|x<c\}$. Тогда $B(\mathcal{N})=\{a_3, a_4, c\}$, $C_{\mathcal{N}}=\{a_3, a_4, a_6, a_8, a_9\}\cup\{x\in A_1|x\leqslant c\}$ и $\cap\mathcal{N}=\{a_6\}\cup\{x\in A_1|x<c\}$. Так как $a_3\cdot a_9=a_3$, $a_4\cdot a_4=a_4$, $a_3\cdot a_6=a_6$, $a_4\cdot a_8=a_8$, $a_3\cdot a_3=a_9$ и $\{x\in A_1|\ x\leqslant c\}^2=\{x\in A_1|\ x\leqslant c\}$, то $C^2_{\mathcal{N}}=C_{\mathcal{N}}$. Далее имеет место $C_{\mathcal{N}}\cdot a_3=S\cdot a_3=C_{\mathcal{N}}\cdot a_9=S\cdot a_9=\{0, a_3, a_6, a_9\}$, $C_{\mathcal{N}}\cdot a_4=S\cdot a_4=C_{\mathcal{N}}\cdot a_8=S\cdot a_8=\{0, a_4, a_8\}$ и $C_{\mathcal{N}}\cdot c=S\cdot c=\langle 0, c\rangle$. В силу последнего $S\cdot d=C_{\mathcal{N}}\cdot d$ и $d\cdot S=d\cdot C_{\mathcal{N}}$ для каждого $d\in\cup\{[b]\mathcal{I}|\ b\in B(\mathcal{N})\}$. Из предыдущего по теореме 2.14 мы получаем, что $N_1\subseteq\cap\mathcal{N}\subset M^*$.

Пусть S – полугруппа с ядром K. Идеал I полугруппы S называется K-потентным, если существует такое натуральное число n, что $I^n=K$. Обозначим через N_2 теоретико-множественное объединение всех K-потентных идеалов полугруппы S (см. [9]).

Следствие 2.12. *Пусть G – полугруппа с ядром K. Пусть $\mathcal{N}$ – независимая система $\mathcal{I}$ – идеалов в G и пусть $C_{\mathcal{N}}=C^2_{\mathcal{N}}$. Пусть $Gd=C_{\mathcal{N}}\cdot d$ и $dG=dC_{\mathcal{N}}$ для всех $d\in\cup\{[b]\mathcal{I}|\ b\in B(\mathcal{N})\}$. Тогда $K\subseteq N_2\subseteq\cap Q^*\subseteq(\cap\mathcal{N})\cap N_0$.*

Доказательство вытекает из следствия в [9] (стр. 79) и теоремы 2.14.

ЛИТЕРАТУРА

[1] АБРГАН, И.: О максимальных подалгебрах в унарных алгебрах. Mat Čas., 24, 1974, 113—128.

[2] АБРГАН, И.: О минимальных множествах образующих в унарных алгебрах. Mat. Čas., 25, 1975, 305—317.

[3] BORŮVKA, O.: Základy teorie grupoidů a grup. Praha, 1962.

[4] GRATZER, G. Universal algebra. van Nostrand, Princeton, N. J. 1968.

[5] GRILLET, P. A.: Intersections of maximal ideals in semigroups. Amer. Math. Monthly, 76, 503—509.

[6] КОН, П.: Универсальная алгебра. Москва.

[7] KUCZKOWSKI, J. E.: On the Frattini ideal in a certain class of semigroups. Mat. Čas., 22, 1972, 3—5.

[8] PONDELÍČEK, B.: Right prime ideals and maximal right ideals in semigroups. Math. Čas., 21, 1971, 87—90.
[9] SCHWARZ, Š.: Prime ideals and maximal ideals in semigroups. Czechosl. Math. J., 12, 94, 1969, 72—79.

Поступило 16. 6. 1976

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty SVŠT
Gottwaldovo nam. 50
880 31 Bratislava