Mathematica Slovaca

Ladislav Mišík

Halbborelsche Funktionen und extreme Ableitungen

*Mathematica Slovaca*, Vol. 27 (1977), No. 4, 409--421

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136158

**Terms of use:**

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Math. Slovaca 27, 1977, No. 4, 409—421

# HALBBORELSCHE FUNKTIONEN UND EXTREME ABLEITUNGEN

LADISLAV MIŠÍK

## 1. Einleitung

W. Sierpiński hat in [5] bewiesen, daß die Ableitungen von Dini einer Funktion aus der Klasse $\alpha$ aus der Klasse $\alpha+3$ sind. S. Banach hat in [1] bewiesen, daß die Ableitungen von Dini einer beschränkten Funktion aus der Klasse $\alpha$ aus der Klasse $\alpha+2$ sind. A. M. Bruckner und J. L. Leonard schreiben in ihrer Arbeit „Derivatives" ([2], S. 30), daß die Ableitungen von Dini einer Funktion aus der Klasse $\alpha$ aus der Klasse $\alpha+2$ sind. Ihre Behauptung basiert auf der Bemerkung, die W. Sierpiński in [5] machte, daß man durch eine Modifikation seines Beweises beweisen kann, daß die Ableitungen von Dini einer Funktion aus der Klasse $\alpha$ aus der Klasse $\alpha+2$ sind. W. Sierpiński gibt aber keine näheren Informationen über diese Modifikation. Also es existiert nur ein einziger veröffentlichter Beweis, daß die Ableitungen von Dini einer Funktion aus der Klasse $\alpha$ aus der Klasse $\alpha+2$ sind. Dieser Beweis ist der Beweis von S. Banach ([1]), der leider nur für beschränkte Funktionen durchgeführt ist.

O. Hájek hat in [3] bewiesen, daß die zweiseitigen extremen Ableitungen einer beliebigen Funktion aus der Klasse 2 sind.

In dieser Arbeit werden wir beweisen, daß die rechte obere Ableitung von Dini einer Funktion aus der Klasse $\alpha$ der Limes einer nichtsteigenden Folge von unterhalb Borelfunktionen der Klasse $\alpha$ ist. Daraus geht hervor, daß diese Ableitung aus der Klasse $\alpha+2$ ist. Weiter beweisen wir, daß die zweiseitige obere Ableitung einer Funktion der Limes einer nichtsteigenden Folge von Funktionen ist, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb stetig sind. Daraus sieht man, daß diese Behauptungen die Sätze von O. Hájek, W. Sierpiński und S. Banach verbessern.

Da die additive Borelklasse für $\alpha=0$ voll additiv ist, d.h. die Vereinigung beliebiger Mengen aus der additiven Borelklasse von Null aus dieser Klasse ist, ist der Beweis unserer Behauptung für $\alpha=0$ nicht so schwer und unterscheidet sich wesentlich von dem Fall, wo $\alpha>0$ ist. Für den Fall, wo $\alpha>0$ ist, basiert unser Beweis auf den Gedanken von S. Banach ([1]).

## 2. Definitionen und Bezeichnungen

Die Menge aller reellen Zahlen werden wir mit $R$ bezeichnen. Das Zeichen $f$ wird in der ganzen Arbeit eine reellen Funktion einer rellen Veränderlichen bedeuten. Das Zeichen $\alpha$ wird eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Klasse bedeuten.

Die additive (multiplikative) Borelklasse von Null ist das System aller offenen (abgeschlossenen) Mengen. Die additive (multiplikative) Borelklasse von $\alpha$, wo $\alpha > 0$ ist, ist das System aller Vereinigungen (Durchschnitte) von abzählbar vielen Mengen aus den multiplikativen oder additiven Borelklassen von Ordinalzahlen, die Kleiner als $\alpha$ sind ([4], S. 252). Die additive (multiplikative) Borelklasse von $\alpha$ werden wir mit $\mathcal{G}_\alpha(\mathcal{F}_\alpha)$ bezeichnen.

*Eine Funktion $f$ heißt unterhalb (oberhalb) Borelfunktion der Klasse $\alpha$, wenn die Menge $\{x : f(x) > c\}$ $(\{x : f(x) < c\})$ für jedes $c \in R$ eine Menge aus der additiven Borelklasse von $\alpha$ ist.* Eine unterhalb (oberhalb) Borelfunktion der Klasse Null heißt auch unterhalb (oberhalb) stetig. *Eine Funktion $f$ heißt im $x$, wo $x \in R$ ist, unterhalb (oberhalb) stetig von rechts, wenn es zu jedem $c \in R$, für welches $f(x) > c$ $(f(x) < c)$ ist, ein positives $\delta$ so gibt, daß $(x, x+\delta) \subset \subset \{u : f(u) > c\}$ $((x, x+\delta) \subset \{u : f(u) < c\})$ gilt.* Es ist klar, was wir unter „$f$ ist im $x$ unterhalb (oberhalb) stetig von links" verstehen.

Es sei $0 < a < b$ und $n$ eine natürliche Zahl. Dann setzen wir: $F_n(x\,;\, a, b) = = \sup\,\{f(x+h) : |f(x+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq b\}$, $\varphi_n(x\,;\, a, b) = \sup\,\{f(x+h) - f(x) : |f(x+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq b\}$ und $\Phi_n(x\,;\, a, b) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} : |f(x+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq b\right\}$.

Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Dann setzen wir: $\psi_n(x) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} : 0 < |h| < \frac{1}{n}\right\}$ und $\chi_n(x) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} : 0 < h < \frac{1}{n}\right\}$.

Wir werden mit $\bar{f}^+(x)(\bar{f}^-(x))$ die obere Ableitung von Dini der Funktion $f$ im $x$ von rechts (von links) und mit $\underline{f}^+(x)(\underline{f}^-(x))$ die untere Ableitung von Dini der Funktion $f$ im $x$ von rechts (von links) bezeichnen.

Die obere zweiseitige Ableitung von $f$ im $x$, d. h. der obere Limes $\limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, werden wir mit $\bar{f}'(x)$ und die untere zweiseitige Ableitung von $f$ im $x$, d.h. der untere Limes $\liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, werden wir mit $\underline{f}'(x)$ bezeichnen.

### 3. Hilfsätze über Halbborelsche Funktionen

**Lemma 1.** *Es sei f eine Funktion, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb (oberhalb) stetig ist. Dann ist* $\{x : f(x) > a\} = O \cup S$, $\{x : f(x) \leqq a\} = F - S_1$, $\{x : f(x) \geqq a\} = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right) \cup S_2$, $\{x : f(x) < a\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) - S_3$ ($\{x : f(x) < a\} = O \cup S$, $\{x : f(x) \geqq a\} = F - S_1$, $\{x : f(x) \leqq a\} = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right) \cup S_2$, $\{x : f(x) > a\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) - S_3$, *wobei* $O$ *und* $O_k$ *für* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *offen,* $F$ *und* $F_k$ *für* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *abgeschlossen,* $S$, $S_1$, $S_2$ *und* $S_3$ *höchstens abzählbar sind und* $O \cap S = \emptyset$, $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right) \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \subset F$ *und* $S_3 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ *gilt.*

Beweis. Es genügt nur den Fall von der Halbstetigkeit nach unten zu behandeln. Es sei $A = \{x : f(x) > a\}$. Es sei $K$ eine nichtleere Komponente der Menge $A$. Dann existiert ein $u \in K$. Da die Funktion $f$ im $u$ entweder von links oder von rechts unterhalb stetig ist, muß ein solches $h > 0$ existieren, daß entweder $(u - h, u> \subset A$ oder $<u, u + h) \subset A$ ist. Es muß also entweder $(u - h, u> \subset K$ oder $<u, u + h) \subset K$ sein, weil $u \in K$ und $K$ eine Komponente von $A$ ist. Daraus bekommt man, daß $K$ ein Intervall sein muß.

Es existiert also eine solche endliche oder unendliche Folge $\{J_n\}_{n=1}^{N}$ von untereinander fremden Intervallen, wo $N$ entweder eine natürliche Zahl oder $N = \infty$ ist, daß $A = \bigcup_{n=1}^{N} J_n$ ist. Setzen wir $O = \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int}(J_n)$ und $S = \bigcup_{n=1}^{N} (J_n - \operatorname{Int}(J_n))$. Dabei bedeutet $\operatorname{Int}(A)$ das Innere von $A$. Dann ist $O$ offen, $S$ höchstens abzählbar, $A = O \cup S$ und $O \cap S = \emptyset$.

Die restlichen Relationen bekommen wir leicht aus den Relationen: $\{x : f(x) \leqq a\} = R - \{x : f(x) > a\}$, $\{x : f(x) \geqq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > a - \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (O_k \cup S_k^*) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (O_k \cup S_k^*)\right) - \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (O_k)\right)\right) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right) \cup S_2$ und $\{x : f(x) < a\} = R - \{x : f(x) \geqq a\}$, wobei für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Mengen $O_k$ offen und die Mengen $S_k^*$ höchstens abzählbar sind und $S_2 = \left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (O_k \cup S_k^*)\right) - \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k\right)\right)$ ist.

**Lemma 2.** *Es sei f eine Funktion, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb (oberhalb) stetig ist. Dann existiert eine solche höchstens abzählbare Menge S, daß* $S \subset R$ *und f in jedem* $x \in R - S$ *unterhalb (oberhalb) stetig ist.*

Beweis. Wir werden den Beweis nur im Falle der Halbstetigkeit nach unten durchführen.

Es sei $x \in R$ und $C^-(f; x) = \{c$: *es existiert eine solche Folge* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $x_n < x$

*für* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ *ist*$\}$ und $C^+(f; x) = \{c$: *es existiert eine solche Folge* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $x_n > x$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ *ist*$\}$. Aus bekannten Satz von W. H. Young ([6]) über die Asymmetrie geht hervor, daß die Menge $S = \{x: C^-(f; x) \neq C^+(f; x)\}$ höchstens abzählbar ist.

Es sei jetzt $u \in R - S$. Dann ist $C^-(f; u) = C^+(f; u)$. Es sei $f$ im $u$ von links (von rechts) unterhalb stetig. Dann existiert für jedes $a \in R$, für welches $a < f(u)$ ist, ein solches Intervall $(u-h, u\rangle(\langle u, u+k))$, wo $h > 0$ $(k > 0)$ ist, daß $(u-h, u\rangle \subset \{x: a < f(x)\}$ $(\langle u, u+k) \subset \{x: a < f(x)\})$ ist. Daraus bekommt man leicht, daß $C^-(f; u) \subset \{c: c \geqq f(u)\}$ $(C^+(f; u) \subset \{c: c \geqq f(u)\})$ ist. Da $u \in R - S$ ist, muß auch $C^+(f; u) \subset \{c: c \geqq f(u)\}$ $(C^-(f; u) \subset \{c: c \geqq f(u)\})$ sein. Daraus geht hervor, daß für jedes $a \in R$, für welches $a < f(u)$ ist, solche Intervalle $\langle u, u+k)$ und $(u-h, u\rangle$, wo $h$ und $k$ positiv sind, existieren, daß $\langle u, u+k) \subset \{x: a < f(x)\}$ und $(u-h, u\rangle \subset \{x: a < f(x)\}$ gilt. Es ist also $(u-h, u+k) \subset \{x: a < f(x)\}$ für $a \in R$, für welches $a < f(u)$ ist. Daraus sieht man, daß die Funktion $f$ im $u$ unterhalb stetig ist.

**Lemma 3.** *Es sei* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine nichtsteigende (nichtfallende) Folge von Funktionen von einer reellen Veränderlichen, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb (oberhalb) stetig sind. Es sei* $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. *Dann ist für jedes* $a \in R$ $\{x: g(x) < a\} = A - S$, $\{x: g(x) > a\} = B \cup S_1$ $(\{x: g(x) > a\} = A - S$, $\{x: g(x) < a\} = B \cup S_1)$, *wobei gilt: $A$ ist eine Menge aus der Klasse* $\mathscr{G}_1$, *$B$ ist aus der Klasse* $\mathscr{G}_2$, $S \subset A$, $B \cap S_1 = \emptyset$ *und $S$ und $S_1$ sind zwei höchstens abzählbare Mengen.*

*Die Funktion $g$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse 2.*

B e w e i s. Wir werden nur den Fall, wo $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine nichtsteigende Folge von Funktionen von einer reellen Veränderlichen, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb stetig sind, behandeln.

Es sei $a \in R$.

Dann existieren nach dem Lemma 1 für jede natürliche Zahl $n$ solche abgeschlossene Mengen $F_k^{(n)}$ und solche höchstens abzählbare Menge $S^{(n)}$, daß $\{x: g_n(x) < a\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)}\right) - S^{(n)}$ ist. Daraus bekommen wir, daß $\{x: g(x) < a\} =$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: g_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)} \right) - S^{(n)} \right) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)} \right) - \left( \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k-1}^{\infty} F_k^{(n)} \right) - \right.$$

$$\left. - \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)} \right) - S^{(n)} \right) \right) \right) = A - S$$ ist, wobei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)}$ aus der Klasse $\mathscr{G}_1$

und $S = A - \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)} \right) - S^{(n)} \right) \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$ höchstens abzählbar ist.

Daraus bekommen wir, daß $\{x: g(x) \geqq a\} = R - \{x: g(x) < a\} = R - (A - S) =$

$= (R-A)\cup S = C\cup S$ ist, wobei $C$ aus der Klasse $\mathscr{F}_1$, $C\cap S=\emptyset$ und $S$ höchstens abzählbar ist.

Es sei jetzt $k$ eine natürliche Zahl. Dann existieren für jedes $k$ zwei solche Mengen $C_k$ und $S_k^*$, daß folgendes gilt: $\left\{x\colon g(x)\geqq a+\frac{1}{k}\right\} = C_k\cup S_k$, $C_k$ ist aus der Klasse $\mathscr{F}_1$ und $S_k^*$ ist höchstens abzählbar. Daraus geht hervor, daß $\{x\colon g(x)>a\}$ $= \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x\colon g(x)\geqq a+\frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\cup S_k^*) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\right)\cup\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\cup S_k^*)\right)-\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\right)\right)$ $= B\cup S_1$ ist, wo $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k$ eine Menge aus der Klasse $\mathscr{G}_2$ und $S_1=\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\cup S_k^*)\right)\right.$ $\left.-\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\right)\right)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k^*$ ist. Also ist $B\cap S_1=\emptyset$ und $S_1$ höchstens abzählbar.

Da die Mengen, die höchstens abzählbar sind, aus der Klasse $\mathscr{G}_1$ sind, die Mengen $\{x\colon g(x)>a\}$ und $\{x\colon g(x)<a\}$ sind aus der Klasse $\mathscr{G}_2$ für jedes $a\in R$ und die Funktion $g$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse 2.

**Lemma 4.** *Es sei $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine nichtsteigende (nichtfallende) Folge von unterhalb (oberhalb) Borelfunktionen der Klasse $\alpha$. Es sei $g=\lim_{n\to\infty}g_n$. Dann ist die Menge $\{x\colon g(x)<a\}$ $(\{x\colon g(x)>a\})$ aus der Klasse $\mathscr{G}_{\alpha+1}$ für jedes $a\in R$.*

*Die Funktion $g$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha+2$.*

Beweis. Wir behandeln nur den Fall, daß $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine nichtsteigende Folge von unterhalb Borelfunktionen der Klasse $\alpha$ ist. Für jedes $a\in R$ und jede natürliche Zahl $n$ ist die Menge $\{x\colon g_n(x)<a\}$ aus der Klasse $\mathscr{G}_{\alpha+1}$, weil $\{x\colon g_n(x)<a\}$ = $=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x\colon g_n(x)\leqq a-\frac{1}{k}\right\}$ und $\left\{x\colon g_n(x)\leqq a-\frac{1}{k}\right\}$ aus der Klasse $\mathscr{F}_\alpha$ für jedes $k$ ist.

Daraus bekommen wir, daß $\{x\colon g(x)<a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\colon g_n(x)<a\}$ aus der Klasse $\mathscr{G}_{\alpha+1}$ für jedes $a\in R$ ist. Es ist bekannt, daß die Funktion $g$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha+2$ ist, wenn $\{x\colon g(x)<a\}$ aus der Klasse $\mathscr{G}_{\alpha+1}$ für jedes $a\in R$ ist.

## 4. Der Fall $\alpha=0$

**Lemma 5.** a) *Die Funktion $\psi_n$ ist für jede natürliche Zahl $n$ in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb stetig.*

b) *Es sei $f$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $\chi_n$ für jede natürliche Zahl $n$ in jedem Punkt unterhalb stetig.*

Beweis. a) Es sei $a\in R$, $u\in R$ und $\psi_n$ sei nicht im $u$ von links unterhalb stetig. Dann existiert ein solches $b\in R$, daß $b<\psi_n(u)$ und $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\leqq b$ für jedes $h$, für welches $-\frac{1}{n}<h<0$ ist, gilt.

Wenn nämlich ein solches $b$ nicht existiert, dann muß für jedes $b$, für welches $b<\psi_n(u)$ ist, ein solches $h_b$ existieren, daß $-\frac{1}{n}<h_b<0$ und $\frac{f(u+h_b)-f(u)}{h_b}>b$ gilt. Weil $\psi_n(u)>b$ ist, muß $u\in\{x\colon \psi_n(x)>b\}$ sein und es genügt nur zu zeigen, daß $(u+h_b, u)\subset\{x\colon \psi_n(x)>b\}$ ist.

Es sei $z\in(u+h_b, u)$. Dann ist $z=u+k$, wo $-\frac{1}{n}<h_b<k<0$ ist. Weiter muß entweder $\frac{f(z+(h_b-k))-f(z)}{h_b-k}=\frac{f(u+h_b)-f(z)}{u+h_b-z}>b$ oder $\frac{f(z-k)-f(z)}{-k}=$ $=\frac{f(z)-f(u)}{z-u}>b$ sein, weil $u+h_b<z<u$ und $\frac{f(u+h_b)-f(u)}{h_b}>b$ ist. In erstem Falle ist $-\frac{1}{n}<h_b<h_b-k<0$ und ist also $\psi_n(z)=\sup\left\{\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z))\colon 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}\geqq\frac{f(z+(h_b-k))-f(z)}{h_b-k}>b$. In zweitem Falle ist $0<-k<-h_b<\frac{1}{n}$ und ist also $\psi_n(z)=\sup\left\{\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z))\colon 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}\geqq\frac{f(z-k)-f(z)}{-k}>b$. Daraus bekommen wir, daß $z\in\{x\colon \psi_n(x)>b\}$ ist. Da $(u+h_b, u)\subset\{x\colon \psi_n(x)>b\}$ für jedes $b$, für welches $b<\psi_n(u)$ ist, gilt, die Funktion $\psi_n$ ist im $u$ von links unterhalb stetig. Das ist aber ein Widerspruch.

Es sei also $b$ eine solche Zahl, für welche $b<\psi_n(u)$ und $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\leqq b$ für jedes $h$, das $-\frac{1}{n}<h<0$ erfüllt, gilt. Es sei $c_1<\psi_n(u)$ und $c=$ $=\max\left(c_1, \frac{b+\psi_n(u)}{2}\right)$. Es ist evident, daß $b<c<\psi_n(u)$ gilt. Da $b<c<\psi_n(u)$ und $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}\leqq b$ für jedes $h$, das $-\frac{1}{n}<h<0$ erfüllt, ist, muß eine solche Zahl $h_c$ existieren, für welche $0<h_c<\frac{1}{n}$ und $\frac{f(u+h_c)-f(u)}{h_c}>c$ gilt.

Es sei $z\in(u, u+h_c)$. Dann ist $z=u+k$, wo $0<k<h_c<\frac{1}{n}$ ist. Weiter ist entweder $\frac{f(z-k)-f(z)}{-k}=\frac{f(z)-f(u)}{k}>c$ oder $\frac{f(z+(h_c-k))-f(z)}{h_c-k}=$ $=\frac{f(u+h_c)-f(z)}{u+h_c-z}>c$, weil $u<z<u+h_c$ und $\frac{f(u+h_c)-f(u)}{h_c}>c$ ist. Da $-\frac{1}{n}<$ $<-h_c<-k<0$ ist, gilt im ersten Falle $\psi_n(z)=\sup\left\{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\colon 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}\geqq$ $\frac{f(z-k)-f(z)}{-k}>c$ und da $0<h_c-k<h_c<\frac{1}{n}$ ist, gilt im zweiten Falle $\psi_n(z)=$ $=\sup\left\{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\colon 0<|h|<\frac{1}{n}\right\}\geqq\frac{1}{h_c-k}(f(z+(h_c-k))-f(z))>c$.

Daraus sieht man, daß $\langle u, u+h_c) \subset \{x: \psi_n(x)>c\} \subset \{x: \psi_n(x)>c_1\}$ ist und die Funktion $\psi_n$ muß darum im Punkte $u$ von rechts unterhalb stetig sein.

b) Es sei $f$ eine stetige Funktion. Es sei $a \in R$ und $u \in \{x: \chi_n(x)>a\}$. Dann existiert eine solche Zahl $h_a$, für welche $0<h_a<\frac{1}{n}$ und $\frac{f(u+h_a)-f(u)}{h_a}>a$ ist. Wir setzen $\Psi(t) = \frac{f(u+h_a)-f(t)}{u+h_a-t}$ für $t \neq u+h_a$. Dann ist die Funktion $\Psi$ im $u$ stetig und $\Psi(u)>a$. Es existiert also eine solche Umgebung $(u-\eta, u+\eta)$ von $u$ für welche $0<\eta<\min\left(h_a, \frac{1}{n}-h_a\right)$ und $\Psi(t)>a$ für jedes $t \in (u-\eta, u+\eta)$ gilt. Weil

$$0<h_a-\eta = u+h_a-t - (u+\eta-t) < u+h_a - t<h_a+\eta<h_a + \left(\frac{1}{n}-h_a\right) = \frac{1}{n}$$

für jedes $t \in (u-\eta, u+\eta)$ ist, ist $\chi_n(t) = \sup\left\{\frac{f(t+h)-f(t)}{h}: 0<h<\frac{1}{n}\right\} \geqq$

$$\frac{f(t+u+h_a-t)-f(t)}{u+h_a-t} = \Psi(t)>a.$$

Daraus sieht man, daß $(u-\eta, u+\eta) \subset \{x: \chi_n(x)>a\}$ ist, wenn $0<\eta<$ $<\min\left(h_a, \frac{1}{n}-h_a\right)$ ist. Also ist die Funktion $\chi_n$ im Punkte $u$ unterhalb stetig.

**Satz 1.** $\mathrm{a}_1$) *Die zweiseitige obere Ableitung $\bar{f}'$ ist der Limes einer nichtsteigenden Folge von Funktionen, die in jedem Punkt entweder von links oder von rechts unterhalb stetig sind.*

$\mathrm{a}_2$) *Die zweiseitige obere Ableitung $\bar{f}'$ ist der Limes einer nichtsteigenden Folge von Funktionen, die bis auf eine höchstens abzählbare Menge in jedem Punkt unterhalb stetig sind.*

$\mathrm{a}_3$) *Die Menge $\{x: \bar{f}'(x)<a\}$ ist ein Durchschnitt von einer Menge aus der Klasse $\mathscr{F}_1$ und einer Menge aus der Klasse $\mathscr{G}_1$ für jedes $a \in R$.*

$\mathrm{a}_4$) *Die zweiseitige obere Ableitung $\bar{f}'$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse* 2.

b) *Es sei $f$ eine stetige Funktion.*

$\mathrm{b}_1$) *Die Ableitung $\bar{f}^+$ ist der Limes einer nichtsteigenden Folge von Funktionen, die in jedem Punkt unterhalb stetig sind.*

$\mathrm{b}_2$) *Die Menge $\{x: \bar{f}^+(x)<a\}$ ist aus der Klasse $\mathscr{G}_1$ für jedes $a \in R$.*

$\mathrm{b}_3$) *Die Ableitung $\bar{f}^+$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse* 2.

Beweis. $\mathrm{a}_1$) Diese Behauptung geht aus der Gleichung $\bar{f}' = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ und aus dem Lemma 5 a) hervor, weil $\psi_{n+1} \leqq \psi_n$ für $n=1, 2, 3, \dots$ ist.

$\mathrm{a}_2$) Das geht aus dem Lemma 2 und $\mathrm{a}_1$) hervor.

Die Behauptungen $\mathrm{a}_3$) und $\mathrm{a}_4$) gehen aus $\mathrm{a}_1$) und aus dem Lemma 3 hervor.

$\mathrm{b}_1$) Das ist eine Folge von der Relation $\bar{f}^+ = \lim_{n\to\infty} \chi_n$ und des Lemmas 5 b), weil $\chi_{n+1} \leqq \chi_n$ für $n=1, 2, 3, \dots$ ist.

Die Behauptungen $b_2$) und $b_3$) gehen aus $b_1$) und aus dem Lemma 4 hervor. Ähnliche Sätze wie Satz 1 gelten auch für die Ableitungen $\underline{f}'$, $\bar{f}^-$, $\underline{f}^+$ und $\underline{f}^-$.

5. Der Fall $\alpha > 0$

**Lemma 6.** *Es seien $g$ und $h$ Funktionen, für welche die Grenzwerte $\lim\limits_{u \to x+} g(u)$, $\lim\limits_{u \to x+} h(u)$, $\lim\limits_{u \to x-} g(u)$ und $\lim\limits_{u \to x-} h(u)$ existieren. Dann existieren auch $\lim\limits_{u \to x+} \max(g, h)(u)$ und $\lim\limits_{u \to x-} \max(g, h)(u)$.*

Beweis. Das ist klar.

**Lemma 7.** *Es sei $0 < a < b$, $n$ eine natürliche Zahl und $F_n(x;\ a, b) = \sup\ \{f(x+h)\colon\ |f(x+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq b\}$. Dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{u \to x+} F_n(u;\ a, b)$ und $\lim\limits_{u \to x-} F_n(u;\ a, b)$. Die Funktion $F_n(x;\ a, b)$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse 1.*

Beweis. Es sei $x \in R$ und $u - (b-a) < x < u$. Dann gilt $F_n(u;\ a, b) = \max\ (F_n(u;\ a, x+b-u),\ F_n(u;\ x+b-u,\ b))$.

Es sei jetzt $u_2 - (b-a) < x < u_1 < u_2$. Dann gilt:

$F_n(u_1;\ a, x+b-u_1) = \sup\ \{f(u_1+h)\colon\ |f(u_1+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq x+b-u_1\} = \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ u_1 + a \leqq v \leqq x + b\} \geqq \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ u_2 + a \leqq v \leqq x+b\} = \sup\ \{f(u_2+h)\colon\ |f(u_2+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq x+b-u_2\} = F_n(u_2;\ a, x+b-u_2)$,

$F_n(u_1;\ x+b-u_1,\ b) = \sup\ \{f(u_1+h)\colon\ |f(u_1+h)| \leqq n,\ x+b-u_1 \leqq h \leqq b\} = \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ x+b \leqq v \leqq u_1+b\} \leqq \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ x+b \leqq v \leqq u_2+b\} = \sup\ \{f(u_2+h)\colon |f(u_2+h)| \leqq n, x+b-u_2 \leqq h \leqq b\} = F_n(u_2;\ x+b-u_2,\ b)$.

Daraus sieht man leicht, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{u \to x+} F_n(u; a, x+b-u)$ und $\lim\limits_{u \to x+} F_n(u;\ x+b-u,\ b)$ existieren. Aus dem Lemma 6 folgt jetzt, daß auch $\lim\limits_{u \to x+} F_n(u;\ a, b)$ existiert.

Es sei $u < x < u + (b-a)$. Dann ist $F_n(u;\ a, b) = \max\ (F_n(u;\ a, x+a-u),\ F_n(u;\ x+a-u,\ b))$.

Es sei $u_1 < u_2 < x < u_1 + (b-a)$. Dann gilt:

$F_n(u_1;\ a,\ x+a-u_1) = \sup\ \{f(u_1+h)\colon\ |f(u_1+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq x+a-u_1\} = \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ u_1+a \leqq v \leqq x+a\} \geqq \sup\ \{f(v)\colon\ |f(v)| \leqq n,\ u_2+a \leqq v \leqq x+a\} = \sup\ \{f(u_2+h)\colon |f(u_2+h)| \leqq n, a \leqq h \leqq x+a-u_2\} = F_n(u_2;\ a, x+a-u_2)$,

$F_n(u_1;\ x+a-u_1,\ b) = \sup\ \{f(u_1+h)\colon\ |f(u_1+h)| \leqq n,\ x+a-u_1 \leqq h \leqq b =$

$= \sup \{f(v)\colon |f(v)| \leqq n,\ x+a \leqq v \leqq u_1 + b\} \leqq \sup \{f(v)\colon |f(v)| \leqq n,\ x+a \leqq v \leqq u_2 + b\} = \sup \{f(u_2+h)\colon |f(u_2+h)| \leqq n, x+a-u_2 \leqq h \leqq b\} = F_n(u_2;\ x+a-u_2, b)$.

Daraus ist leicht sichtbar, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{u \to x-} F_n(u;\ a, x+a-u)$ und $\lim\limits_{u \to x-} F_n(u;\ x+a-u, b)$ existieren und nach dem Lemma 6 existiert auch $\lim\limits_{u \to x-} F_n(u;\ a, b)$.

Es ist bekannt, daß jede Funktion einer reellen Veränderlichen, die in jedem Punkt die Grenzwerte von links wie von rechts besitzt, eine Borelfunktion aus der Klasse 1 ist. Darum ist die Funktion $F_n(x;\ a, b)$ eine Borelfunktion aus der Klasse 1.

**Lemma 8.** *Es sei $\alpha > 0$ und $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$. Es sei $0 < a < b$ und $n$ eine natürliche Zahl. Es sei $\varphi_n(x;\ a,\ b) = \sup \{f(x+h) - f(x)\colon |f(x+h)| \leqq n, a \leqq h \leqq b\}$. Dann ist die Funktion $\varphi_n(x;\ a, b)$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ und $|\varphi_n(x;\ a,\ b)| \leqq |f(x)| + n$ gilt, wenn $\varphi_n(x;\ a,\ b) > -\infty$ ist.*

Beweis. Es ist evident, daß $\varphi_n(x;\ a, b) = F_n(x;\ a, b) - f(x)$ für jedes $x \in R$ gilt. Weil $\alpha > 0$ ist, ist $\varphi_n(x;\ a, b)$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$, weil $F_n(x;\ a, b)$ nach dem Lemma 7 eine Borelfunktion aus der Klasse 1 und $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ ist.

Wenn $\varphi_n(x;\ a, b) > -\infty$ ist, dann gilt $|\varphi_n(x;\ a, b)| = |F_n(x;\ a, b) - f(x)| \leqq |f(x)| + |F_n(x;\ a, b)| \leqq |f(x)| + n$.

**Lemma 9.** *Es sei $\alpha > 0$. Es sei $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$, $n$ eine natürliche Zahl, $k$ eine nichtnegative ganze Zahl und $0 < a < b$. Es sei $a_i = a + \frac{i}{2^k}(b-a)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^k$. Es sei $G_n(x;\ a, b, k) = \max \left\{ \min \left( \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i} \right) \colon i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^k \right\}$ und $\Phi_n(x;\ a, b) = \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \colon |f(x+h)| \leqq n,\ a \leqq h \leqq b \right\}$.*

*Dann ist $G_n(x;\ a, b, k)$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $G_n(x;\ a, b, k) \leqq G_n(x;\ a, b, k+1)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $\lim\limits_{k \to \infty} G_n(x;\ a, b, k) = \Phi_n(x;\ a, b)$.*

Beweis. Aus dem Lemma 8 folgt, daß $G_n(x;\ a, b, k)$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Es sei $k$ eine nichtnegative ganze Zahl, $a_{i-1} = a + \frac{i-1}{2^k}(b-a)$, $a_i = a + \frac{i}{2^k}(b-a)$ und $c_i = a + \frac{2i-1}{2^{k+1}}(b-a)$. Dann gilt:

$$G_n(x;\ a,\ b,\ k+1) = \max\left\{\max\left\{\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{c_i}\right),\right.\right.$$

$$\left.\left.\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{c_i}, \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{a_i}\right)\right\}: i=1, 2, \ldots, 2^k\right\}.$$

Es sei $x \in R$ so gewählt, daß $G_n(x;\ a, b, k) > -\infty$ ist. Dann existiert ein solches $i \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, das $G_n(x;\ a,\ b,\ k) = \min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}\right)$ ist. Jetzt können zwei Fälle entstehen: entweder ist $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) \geqq 0$ oder $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) < 0$.

1) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) \geqq 0$. Dann ist $\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}\right) = \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}$. Es gilt entweder $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)$ oder $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ c_i, a_i)$.

$1_1$) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)$. Dann gilt:

$$G_n(x;\ a,\ b,\ k) = \min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}\right) = \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{a_i} < \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{c_i} \leqq \max\left(\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{c_i}\right), \min\left(\frac{\varphi_n(x;c_i, a_i)}{c_i}, \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{a_i}\right)\right) \leqq G_n(x;\ a,\ b,\ k+1).$$

$1_2$) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ c_i, a_i)$. Dann gilt:

$$G_n(x;\ a, b, k) = \min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}\right) = \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{a_i} \leqq$$

$$\leqq \max\left(\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{c_i}\right), \min\left(\frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{c_i}, \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{a_i}\right)\right)$$

$$\leqq G_n(x;\ a, b, k+1).$$

2) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) < 0$. Dann gilt: $\min\left(\frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i}{a_{i-1}}, \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_i}\right) = \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i)}{a_{i-1}}$. Es ist evident, daß entweder $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)$ oder $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ c_i, a_i)$ ist.

$2_1$) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)$. Dann gilt:

$$G_n(x;\ a,\ b,\ k) = \frac{\varphi_n(x;\ a_{i-1}, c_i)}{a_{i-1}} \leqq G_n(x;\ a,\ b,\ k+1).$$

$2_2$) Es sei $\varphi_n(x;\ a_{i-1}, a_i) = \varphi_n(x;\ c_i, a_i)$. Dann gilt:

$$G_n(x;\ a, b, k) = \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{a_{i-1}} < \frac{\varphi_n(x;\ c_i, a_i)}{c_i} \leqq G_n(x;\ a, b, k+1).$$

Es gilt also $G_n(x;\ a,\ b,\ k) \leqq G_n(x;\ a,\ b,\ k+1)$ für jedes $x \in R$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Es sei $\Phi_n(x; a, b) = -\infty$. Dann ist evident, daß für $k=0, 1, 2, \ldots$ $\varphi_n(x; a_{i-1}, a_i) = -\infty$ für $i=1, 2, \ldots, 2^k$. Es ist also $G_n(x; a, b, k) = -\infty$ für $k=0, 1, 2, \ldots$ und

$$\lim_{k\to\infty} G_n(x; a, b, k) = \Phi_n(x; a, b).$$

Es sei $\Phi_n(x; a, b) > -\infty$. Dann existiert ein solches $i \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, daß $\Phi_n(x; a, b) = \Phi_n(x, a_{i-1}, a_i) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}: |f(x+h)| \leqq n, a_{i-1} \leqq h \leqq a_i\right\}$ ist. Ähnlich wie im [1] (S. 130) wird für $j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, für welches $\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j) > -\infty$ ist, die Ungleichung abgeleitet:

$$\min\left(\frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_{j-1}}, \frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_j}\right) \leqq \Phi_n(x; a_{j-1}, a_j) \leqq \max\left(\frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_{j-1}}, \frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_j}\right).$$

Daraus bekommen wir:

$$G_n(x; a, b, k) = \max\left\{\min\left(\frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_{j-1}}, \frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_j}\right): j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}, \varphi_n(x; a_{j-1}, a_j) > -\infty\right\} \leqq \max\{\Phi_n(x; a_{j-1}, a_j): j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}, \Phi_n(x; a_{j-1}, a_j) > -\infty\} \leqq \Phi_n(x; a, b)$$ und $$\Phi(x; a, b) - G_n(x; a, b, k) \leqq \max\left\{\left|\frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_{j-1}} - \frac{\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)}{a_j}\right|: j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}, \varphi_n(x; a_{j-1}, a_j) > -\infty\right\} \leqq \max\left\{|\varphi_n(x; a_{j-1}, a_j)| \frac{1}{2^k} \frac{b-a}{a_{j-1} \cdot a_j}: j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}, \varphi_n(x; a_{j-1}, a_j) > -\infty\right\} \leqq$$
$$\leqq (|f(x)| + n) \frac{b-a}{2^k \cdot a^2}.$$

Daraus ist sichtbar, daß $\lim_{k\to\infty} G_n(x; a, b, k) = \Phi_n(x, a, b)$ ist.

**Lemma 10.** *Es sei $\alpha > 0$ und $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$. Für jedes $c \in R$ ist die Menge $\{x: \Phi_n(x; a, b) > c\}$ eine Menge aus der Klasse $\mathcal{G}_\alpha$.*

Beweis. Aus dem Lemma 9 geht hervor, daß $\{x: \Phi_n(x; a, b) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: G_n(x; a, b, k) > c\}$ aus der Klasse $\mathcal{G}_\alpha$ ist, weil $\{x: G_n(x; a, b, k) > c\}$ aus der Klasse $\mathcal{G}_\alpha$ für $k=1, 2, 3, \ldots$ ist.

**Lemma 11.** *Es sei $\alpha > 0$. Es sei $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ und $\Phi(x; a, b) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}: a \leqq h \leqq b\right\}$. Es sei $c \in R$. Dann ist die Menge $\{x: \Phi(x; a, b) > c\}$ aus der Klasse $\mathcal{G}_\alpha$.*

Beweis. Es gilt: $\{x: \Phi(x; a, b) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: \Phi_n(x; a, b) > c\}$. Die Menge

$\{x\colon \Phi(x\,;\,a,b)>c\}$ ist aus der Klasse $\mathscr{G}_\alpha$, weil die Mengen $\{x\colon \Phi_n(x\,;\,a,b)>c\}$ nach dem Lemma 10 aus der Klasse $\mathscr{G}_\alpha$ für $n=1, 2, 3. \dots$ sind.

**Lemma 12.** *Es sei $\alpha>0$. Es sei $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$. Dann ist für $n=1, 2, 3, \dots$ die Funktion $\psi_n(x) = \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\colon 0<h<\frac{1}{n}\right\}$ eine unterhalb Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$.*

Beweis. Es sei $0<a_{k+1}<a_k\leqq a_1<b_1\leqq b_k<b_{k+1}<\frac{1}{n}$ für $k=1, 2, 3, \dots$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=\frac{1}{n}$. Dann gilt $\{x\colon \psi_n(x)>c\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\colon \Phi(x\,;\,a_k, b_k)>c\}$. Die Menge $\{x\colon \psi_n(x)>c\}$ ist aus der Klasse $\mathscr{G}_\alpha$, weil die Mengen $\{x\colon \Phi(x\,;\,a_k, b_k)>c\}$ für $k=1, 2, 3, \dots$ nach dem Lemma 11 aus der Klasse $\mathscr{G}_\alpha$ sind. Damit haben wir bewiesen, daß für $n=1, 2, 3, \dots$ die Funktionen $\psi_n$ unterhalb Borelfunktionen aus der Klasse $\alpha$ sind.

**Satz 2.** *Es sei $\alpha>0$ und $f$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$. Dann ist die obere Ableitung von Dini von rechts $\bar{f}^+$ der Limes einer nichtsteigenden Folge von Funktionen, die unterhalb Borelfunktionen aus der Klasse $\alpha$ sind. Die Menge $\{x\colon \bar{f}^+(x)<a\}$ ist für jedes $a\in R$ eine Menge aus der Klasse $\mathscr{G}_{\alpha+1}$. Die Funktion $\bar{f}^+$ ist eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha+2$.*

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus dem Lemma 4, Lemma 12 und aus $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)=\bar{f}^+(x)$.

Ähnliche Sätze wie Satz 2 gelten auch für die Ableitungen $\bar{f}^-$, $\underline{f}^+$ und $\underline{f}^-$.

6. Eine Bemerkung

Für beschränkte Borelfunktionen aus der Klasse $\alpha$ ist in [1] bewiesen, daß die Funktion $\Phi(x\,;\,a,b)$ eine Borelfunktion aus der Klasse $\alpha$ ist, weil sie der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Borelfunktionen aus der Klasse $\alpha$ ist. Daraus folgt der Satz 2 für beschränkte Funktionen.

## LITERATUR


[1] BANACH, S.: Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables. Fundam. Math. 3, 1921, 128—132.

[2] BRUCKNER, A. M.—LEONARD, J. L.: Derivatives. Amer. Math. Monthly, 73, No 4, Part II, 1966, 24—56.

[3] HÁJEK, O.: Note sur la mésurabilité B de la dérivée supérieure, Fundam. Math., 44, 1957, 238—240.

[4] KURATOWSKI, C.: Topologie I. Édition troisième, Warszawa 1952.

[5] SIERPIŃSKI, W.: Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues. Fundam. Math, 3, 1921, 123—127.

[6] YOUNG, W. H.: La symmétrie de structure des fonctions de variables réelles. Bull. Scien. Math. 2, 52, 1928, 265—280.

Eingegangen am 26. 3. 1976

*Matematický ústav SAV*
*Obrancov mieru 49*
*886 25 Bratislava*

## ПОЛУБОРЕЛЕВСКИЕ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Ладислав Мишик

### Резюме

В этой работе доказывается, что правая верхняя производная борелевской функции класса $\alpha$ – предел невозрастающей последовательности снизу полуборелевских функций класса $\alpha$. Поэтому она является сверху полуборелевской функцией класса $\alpha + 1$.

Доказывается также, что двусторонняя верхняя производная произвольной функции – предел невозрастающей последовательности функций, во всякой точке являющихся снизу полунепрерывным либо справа, либо слева.

Эти результаты улучшают результаты В. Серпинского, С. Банаха и О. Гайека.