Math. Slovaca 26, 1976, No. 3, 217—227

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ВИНЦЕНТ ШОЛТЕС

В работе [1] приведены 2 теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы решения уравнения

$$y''' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

или уравнения

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y) = 0,$$

которые обладают хотя бы одной нулевой точкой, были колебательными в $< t_0, \infty)$.

В этой работе мы будем рассматривать нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка вида

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)h(y) = f(x). \tag{1}$$

Приведенные результаты являются дополнением и обобщением результатов работы [1] для дифференциального уравнения (1).

Будем предпокладать, что функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ и $h(y)$ непрерывны в любой точке $x \in < x_0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$, и $x_0 \in (-\infty, \infty)$.

В дальнейшем будут рассматриваться такие решения уравнения (1), которые существуют в промежутке $\langle x_0, \infty)$.

Обозначим:

$$F(x) = y''(x)y(x) - \frac{1}{2} y'^2(x) + \frac{1}{2} q(x)y^2(x),$$

где $y(x)$ является решением уравнения (1).

Лемма 1. *Пусть* $q(x) \in C^1\langle x_0, \infty)$ *и пусть для всех* $x \in \langle x_0, \infty)$ *и* $y \in (-\infty, \infty)$, $y \neq 0$ *выполняются условия:* $p(x) \geqq 0$, $q(x) \geqq 0$, $q(x)p(x) + q'(x) + |f(x)| \leqq 0$, $\operatorname{sgn} r(x) = \operatorname{sgn} h(y)y$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} p(x)\,dx \leqq K < \infty$, *причем тождественное равенство в упомянутых неравенствах не выполняется одновременно ни на одном промежутке, который является подмножеством промежутка* (x_0, ∞).

Тогда для каждого решения уравнения (1), которое удовлетворяет условию

$$F(x_0)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} |f(x)| \exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \leqq 0, \tag{2}$$

имеет место только одно из следующих утверждений:

(i) $y(x)>0,\ y'(x)>0,$ *для всех* $x\geqq x_1\geqq x_0$

(ii) $y(x)<0,\ y'(x)<0,$ *для всех* $x\geqq x_1\geqq x_0$

(iii) $y(x)$ *колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1). Умножая уравнение (1) на $y(x)\exp\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$ и интегрируя от x_0 до $x\geqq x_0$, получим:

$$\begin{gathered}\exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right].\left[y''(x)y(x)-\frac{1}{2}y'^2(x)+\frac{1}{2}q(x)y^2(x)\right]+\\ +\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t).\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]y'^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[q(t)p(t)+\\ +q'(t)].\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]y^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x} r(t)h(y(t))y(t).\\ .\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=F(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t.\end{gathered} \tag{3}$$

Если предполагать, что $y(x)$ удовлетворяет (2), то из соотношения (3) имеем:

$$\begin{gathered}\exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right].\left[y''(x)y(x)-\frac{1}{2}y'^2(x)+\frac{1}{2}q(x)y^2(x)\right]+\\ +\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]y'^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[q(t)p(t)+q'(t)+|f(t)|].\\ .\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]y^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x} r(t).h(y(t))y(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\leqq 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Предположим, что $y(x)$ не колеблется в $\langle x_0, \infty)$. Тогда существует такое $x_1 \geqq x_0$ что $y(x) \neq 0$ для всех $x \geqq x_1$. Пусть напр. $y(x) > 0$. Из соотношения (4), если учесть условия леммы 1, получим

$$y''(x)y(x) - \frac{1}{2}\, y'^2(x) < -\frac{1}{2}\, q(x)y^2(x)$$

Это обозначает, что для $x \geqq x_1$ выполняется

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right] < -\frac{1}{2}\, q(x)$$

функция $\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ является убывающей, а это означает, что $y'(x) > 0$ для всех $x \geqq x_1$, и мы получим утверждение (i), или $y'(x) < 0$ для всех $x \geqq x_2 \geqq x_1$. Покажем, что второй случай приводит к противоречию. Рассмотрим функцию $y''(x)$. Случай $y''(x) \leqq 0$ для всех $x \geqq x_3 \geqq x_2$ исключается, потому что ведет к противоречию с тем, что $y(x)$ является неколебательным. Имеет место только один из двух случаев:

1. $y''(x) > 0$ для всех $x \geqq x_3 \geqq x_2$. Тогда существует $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = a \leqq 0$ и, так как $y(x) > 0$, должно быть $a = 0$. Из соотношения (4) имеем:

$$\frac{y'^2(x)}{2} \geqq y''(x)y(x) + \frac{1}{2}\, q(x)y^2(x) + \exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right] .$$

$$\cdot \left[\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right] y'^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [q(t)p(t) + q'(t) + |f(t)|]\,. \right.$$

(5)

$$\left. .\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right] y^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} r(t)h(y(t))\,.\,y(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\right] .$$

Следуя условиям леммы 1, из соотношения (5) вытекает, что $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = a < 0$, что является противоречием.

2. Для всякого $x_3 \geqq x_2$ существует $x \geqq x_3$ такое, что $y''(x) > 0$ и $\bar{x} \geqq x_3$ такое, что $y''(\bar{x}) < 0$. Так как для всех $x \geqq x_3$ является $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, отсюда следует, что $\limsup\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$. Значит существует последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойством $y''(z_n) = 0$ и $\lim\limits_{z_n \to \infty} y'(z_n) = 0$. Из соотношения (5) для $x = z_n$

имеем: $\lim\limits_{z_n\to\infty}[y'(z_n)]^2>0$, что тоже является противоречием. Отсюда следует, что справедливо (i).

Если предполагать, что $y(x)<0$, аналогично покажем, что должно быть $y'(x)<0$ для всех $x\geqq x_1$. Таким образом доказано утверждение (ii).

Из выше полученного заключаем, что утверждения леммы 1 выполнены

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы 1 и пусть*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x=\infty .$$

Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1), которое удовлетворяет условию (2), колеблется в $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $y(x)$ является решением уравнения (1), которое удовлетворяет условию (2) таким, что оно не колеблется в $\langle x_0, \infty)$. Тогда существует $x_1\geqq x_0$ такое, что $y(x)\neq 0$ для всех $x\geqq x_1$. Из соотношения (4) имеем:

$$y''(x)y(x)-\frac{1}{2}\,y'^2(x)<-\frac{1}{2}\,q(x)y^2(x),$$

значит, для всех $x\geqq x_1$ выполнено

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]<-\frac{1}{2}\,q(x).$$

Проинтегрировав последнее неравенство от x_1 до $x\geqq x_1$ получим:

$$\frac{y'(x)}{y(x)}\leqq\frac{y'(x_1)}{y(x_1)}-\frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x} q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Из последнего соотношения вытекает, что для всех $x\geqq x_2\geqq x_1$ имеет место условие $y(x)y'(x)<0$. В силу леммы 1 утверждение теоремы доказано.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 1 и пусть для всех $x\in\langle x_0, \infty)$, $y\in(-\infty, \infty)$ выполнено*

$$r(x)\geqq 0,\ \int\limits_{x_0}^{\infty} r(x)\,\mathrm{d}x=\infty .$$

Пусть $h(y)$ является неубывающей функцией.

Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1), которое удовлетворяет условию (2), колеблется в $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — неколебательное решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию (2). Пусть сначала $y(x)>0$ для всех $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Тогда в силу леммы 1 тоже $y'(x)>0$ для всех $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Потому, что:

$$y'''(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt + y''(x)p(x) \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt =$$

$$= \left[y''(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\right]',$$

из уровнения (1) имеем:

$$\left[y''(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\right]' = -q(x)y'(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt - r(x)h(y)\,.$$

$$.\exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt + f(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt,$$

откуда в силу выше полученного следует:

$$\left[y''(x) \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\right]' \leqq -q(x)y'(x) - h(y(x_1))r(x) + |f(x)| \exp \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt.$$

Проинтегрировав полученное неравенство от x_1 до $x \geqq x_1$ получим, что $y'(x)<0$ для всех $x \geqq x_2 \geqq x_1$. Это является противоречием.

Если предполагать $y(x)<0$, то в силу леммы 1 тоже $y'(x)<0$ для всех $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Аналогично как выше получим противоречие.

Тем доказано утверждение теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1 *и пусть вместо условия*

$$q(x)p(x) + q'(x) + |f(x)| \leqq 0$$

выполнено условие

$$q(x)p(x) + q'(x) < 0.$$

Тогда для каждого решения уравнения (1), *которое удовлетворяет условию*

$$F(x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{f^2(x) \exp \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}{[q(x)p(x) + q'(x)]}\,dx \leqq 0, \tag{6}$$

имеет место только одно из следующих утверждений:

(*i*) $y(x)>0,\ y'(x)>0$ *для всех* $x \geqq x_1 \geqq x_0$

(ii) $y(x)<0,\ y'(x)<0$ *для всех* $x \geqq x_1 \geqq x_0$

(iii) $y(x)$ *колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1), которое удовлетворяет (6). Так как для $a>0$ имеет место

$$ay^2+by \geqq -\frac{b^2}{4a}, \tag{7}$$

то из соотношения (3) легко можно вывести следующее неравенство:

$$\exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right] \cdot \left[y''(x)y(x)-\frac{1}{2}\,y'^2(x)+\frac{1}{2}\,q(x)y^2(x)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]y'^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x} r(t)h(y(t))y(t)\exp\left[\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \leqq 0.$$

В дальнейшем ходу доказательства можно поступать точно так же, как в доказательстве леммы 1.

Нетрудно доказать следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2 *и пусть*

$$\int_{x_0}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x=\infty.$$

Тогда любое решение $y(x)$ *уравнения* (1), *которое удовлетворяет условию* (6), *колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия леммы* 2 *и пусть для всех* $x \in \langle x_0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$ *выполнено*

$$r(x) \geqq 0,\ \int_{x_0}^{\infty} r(x)\,\mathrm{d}x=\infty,\ \left|\int_{x_0}^{\infty} f(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right|<\infty,$$

и пусть $h(y)$ *является неубывающей функцией.*

Тогда любое решение $y(x)$ *уравнения* 1), *которое удовлетворяет условию* (6), *колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия леммы* 2 *и пусть для всех* $x \in \langle x_0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$ *выполнено*

$$p(x) \in C^1 \in \langle x_0, \infty), \; p'(x) \leqq 0, \; r(x) \geqq 0,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} r(x)\,\mathrm{d}x = \infty, \; \left| \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \infty,$$

и пусть $h(y)$ является не убывающей функцией.

Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1), *которое удовлетворяет условию* (6), *колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — неколебательное решение уравнения (1), которое удовлетворяет (6). Пусть, непример, $y(x) > 0$ для всех $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Тогда в силу леммы 2 также $y'(x) > 0$ для vcex $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Из уравнения (1) имеем:

$$y''(x) \leqq y''(x_1) - p(x)y'(x) + p(x_1)y'(x_1) + \int_{x_1}^{x} p'(t)y'(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \int_{x_1}^{x} q(t)y'(t)\,\mathrm{d}t - h(y(x_1)) \int_{x_1}^{x} r(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

откуда следует:

$$y''(x) \leqq K_2 - h(y(x_1)) \int_{x_1}^{x} r(t)\,\mathrm{d}t$$

и, следовательно, $y'(x) < 0$, что является противоречием.

Если предполагать $y(x) < 0$, то в силу леммы 2 также $y'(x) < 0$ для всех $x \geqq x_1 \geqq x_0$. Аналогично как выше получим противоречие.

Тем доказательство теоремы закончено.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в уравнении (1) выполнено $f(x) \equiv 0$. Значит будет исследовано дифференциальное уравнение

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)h(y) = 0. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что решение $y(x)$ уравнения (8), обладающее хотя бы одной нулевой точкой в $\langle x_0, \infty)$, удовлетворяет в этой точке условию (2) для уравнения (8). Это означает, что справедлива лемма 1.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия леммы* 1 *у пусть для всех* $x \in \langle x_0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$ *выполнено*

$$p(x) \in C^1\langle x_0, \infty), \; q(x) - p'(x) \geqq 0, \; \frac{h(y)}{y} \geqq \varepsilon > 0,$$

где ε — *положительная постоянная.*

Если выполнено

$$\lim_{x\to\infty}\left[A+Bx-\int_{x_0}^{x}R(t)\,\mathrm{d}t\right]<0, \tag{9}$$

где A, B — любые положительные постоянные и $R(x)=\int_{x_0}^{x}r(t)\,\mathrm{d}t$, тогда любое решение $y(x)$ уравнения (8), *обладающее хотя бы одной нулевой точкой, колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — неколебательное решение уравнения (8), обладающее хотя бы одной нулевой точкой. Пусть $y(x_1)=0$ и $y(x)\neq 0$ для всех $x>x_1$. Для всех $x\geqq x_2>x_1$ можно уравнение (8) записать в виде:

$$\frac{y'''}{y}+p(x)\frac{y''}{y}+q(x)\frac{y'}{y}+r(x)\frac{h(y)}{y}=0,$$

и проинтегрировав последнее равенство от x_2 до $x\geqq x_2$, получим:

$$\begin{gathered}\frac{y''(x)}{y(x)}+\frac{1}{2}\frac{y'^2(x)}{y^2(x)}+\int_{x_2}^{x}\left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^3\mathrm{d}t+p(x)\frac{y'(x)}{y(x)}+\\+\int_{x_2}^{x}[q(t)-p'(t)]\frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t+\int_{x_2}^{x}p(t)\frac{y'^2(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t\leqq L_0-\varepsilon R(x)\end{gathered} \tag{10}$$

Интегрируя соотношение (10) от x_2 до $x\geqq x_2$, имеем:

$$\begin{gathered}\frac{y'(x)}{y(x)}+\frac{3}{2}\int_{x_2}^{x}\left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^2\mathrm{d}t+\int_{x_2}^{x}(x-t)\left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^3\mathrm{d}t+\\+\int_{x_2}^{x}p(t)\frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t+\int_{x_2}^{x}(x-t)p(t)\left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^2\mathrm{d}t+\\+\int_{x_2}^{x}(x-t)[q(t)-p'(t)]\frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t\leqq L_1+L_0x-\varepsilon\int_{x_2}^{x}R(t)\,\mathrm{d}t.\end{gathered}$$

Если предполагать, что $y(x)>0$ для всех $x\geqq x_2$, то из последнего соотношения вытекает, что не может выполняться $y'(x)>0$ для всех $x\geqq x_2$.

Если предполагать, что $y(x)<0$ для всех $x\geqq x_2$, то из последнего соотношения вытекает, что не может быть исполнено $y'(x)<0$ для всех $x\geqq x_2$. В силу леммы 1 теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия леммы* 1 *и пусть для все* $x \in \langle x_0, \infty), y \in (-\infty, \infty), y \neq 0$

$$p(x) \in C^1 \langle x_0, \infty), \ p(x) > 0, \ \frac{h(y)}{y} \geqq \varepsilon > 0,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{[q(x) - p'(x)]^2}{p(x)} \, dx < \infty.$$

Если выполняется условие (9), *тогда любое решение* $y(x)$ *уравнения обладающее хотя бы одной нулевой точкой, колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — неколебательное решение уравнения (обладающее хотя бы одной нулевой точкой. В силу соотношения (7) и соотношения (10) имеем:

$$\frac{y''(x)}{y(x)} + \frac{1}{2}\frac{y'^2(x)}{y^2(x)} + \int_{x_2}^{x} \left[\frac{y'(t)}{y(t)}\right]^3 dt + p(x)\frac{y'(x)}{y(x)} -$$

$$- \int_{x_2}^{x} \frac{[q(t) - p'(t)]^2}{4p(t)} \, dt \leqq L_0 - \varepsilon R(x).$$

В дальнейшем ходу доказательства можно поступать тем же образом, к в доказательстве теоремы 6.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия леммы* 1 *и пусть*

$$\frac{h(y)}{y} \geqq \varepsilon > 0, \quad \int_{x_0}^{\infty} x[r(x)\varepsilon - q'(x)] \, dx = +\infty.$$

Тогда любое решение $y(x)$ *уравнения* (8), *обладающее хотя бы од нулевой точкой, колеблется в* $\langle x_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — неколебательное решение уравнеı ия 8) обладающее хотя бы одной нулевой точкой. Пусть $y(x_1) = 0$ и $y(x) \neq 0$ д всех $x > x_1$. Пусть, например, $y(x) > 0$ для всех $x > x_1$. В силу леммы 1 т кж $y'(x) > 0$ для всех $x > x_1$. Из уравнения (8) вытекает:

$$y''' + p(x)y'' = -q(x)y' - r(x)h(y) \leqq 0 \quad \text{для всех} \quad x \geqq x_2 > x_1.$$

Последнее можно записать следующим образом:

$$\left[y''(x) \exp \int_{x_2}^{x} p(t) \, dt\right]' \leqq 0.$$

Интегрируя от x_2 до $x \geqq x_2$, получим

$$y''(x) \leqq y''(x_2) \exp\left[-\int_{x_2}^{x} p(t)\, \mathrm{d}t\right].$$

Если $y''(x_2) < 0$, то из выше полученного имеем:

$$y'(x) \leqq y'(x_2) + L_2(x - x_2), \quad \text{где} \quad L_2 < 0.$$

Но это противоречие, так как $y'(x) > 0$. Должно быть $y''(x) \geqq 0$ для всех $x > x_1$. Интегрируя уравнение (8), получим:

$$y''(x) - y''(x_2) + \int_{x_2}^{x} p(t) y''(t)\, \mathrm{d}t + q(x)y(x) - q(x_2)y(x_2) -$$

$$- \int_{x_2}^{x} q'(t)y(t)\, \mathrm{d}t + \int_{x_2}^{x} r(t)h(y(t))\, \mathrm{d}t = 0,$$

откуда, если учесть условия теоремы, следует:

$$y''(x) \leqq y''(x_2) + q(x_2)y(x_2) - \int_{x_2}^{x} [\varepsilon r(t) - q'(t)]y(t)\, \mathrm{d}t. \tag{11}$$

В силу того, что $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) \geqq 0$ для всех $x \geqq x_2$, справедливы следующие условия:

$$\int_{x_2}^{x} y'(t)\, \mathrm{d}t = y(x) - y(x_2) > \int_{x_2}^{x} y'(x_2)\, \mathrm{d}t = y'(x_2)(x - x_2).$$

Значит:

$$y(x) > y'(x_2)(x - x_2).$$

При помощи последнего неравенства из соотношения (11) получим:

$$y''(x) \leqq y''(x_2) + q(x_2)y(x_2) - y'(x_2) \int_{x_2}^{x} (t - x_2)[\varepsilon r(t) - q'(t)]\, \mathrm{d}t.$$

Это является противоречием ввиду того, что $y''(x) \geqq 0$.

Если предполагать, что $y(x) < 0$ для всех $x > x_1$, аналично получается противоречие.

Значит, $y(x)$ колеблетця в $\langle x_0, \infty)$. Тем доказано утверждение теоремы 8.

ЛИТЕРАТУРА

[1] WALTMAN, P.: Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations. Pacif. J. Math , 2, 1966, 385—389.

[2] ŠOLTÉS, V.: Asymptotické a oscilatorické vlastnosti riešení nelineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu. In: Zborník vedeckých prác VŠT v Košiciach (v tlači).

Поступило 29. 10. 1974

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Šmeralova 5A
040 01 Košice