Applications of Mathematics

Miroslav Šisler

On iterative methods of higher order for systems of linear algebraic equations

Applications of Mathematics, Vol. 39 (1994), No. 4, 287–298

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/134258

ÜBER DIE ITERATIONSVERFAHREN VON HÖHERER ORDNUNG FÜR LINEARE ALGEBRAISCHE GLEICHUNGSSYSTEME

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Eingegangen am 11. December 1992)

Summary. The paper is concerned with certain k-degree iterative methods for the solution of linear algebraic systems. The successive approximation $x_{\nu+1}$ is determined by means of approximations $x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-k+1}$. In this article to each iterative method of the first degree some k-degree iterative method is found in order to accelerate the convergence of the intial method.

Keywords: Linear system, iterative method, convergence acceleration of convergence

AMS classification: 65F10

In der Arbeit wird ein gewisses Iterationsverfahren k-ter Ordnung für die Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems der Form

$$x = Bx + b \tag{1}$$

untersucht, wobei $I - B$ eine nichtsinguläre $q \times q$ Matrix ist. Das untersuchte Iterationsverfahren wird durch die folgende Formel definiert:

$$x_{\nu+1} = T_0 x_\nu + T_1 x_{\nu-1} + \ldots + T_{k-1} x_{\nu-k+1} + c, \quad c = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Falls $\hat{x}$ eine Lösung des Systems (1) bezeichnet und das Iterationsverfahren (2) zu $\hat{x}$ konvergiert, gelten gleichzeitig die Formeln

$$\begin{aligned}(I - T_0 - T_1 - \ldots - T_{k-1})\hat{x} &= c,\\ (I - B)\hat{x} &= b.\end{aligned}$$

Davon folgt sofort die Konsistenzbedingung des Verfahrens (2) in der Form

$$(I - T_0 - T_1 - \ldots - T_{k-1})(I - B)^{-1} b = c, \tag{3}$$

wo $I - T_0 - T_1 - \ldots - T_{k-1}$ eine nichtsinguläre Matrix ist.

Falls speziell $T_0 + T_1 + \ldots + T_{k-1} = B$ und $c = b$ gilt, ist das Verfahren mit (1) konsistent.

Man stellt leicht fest, dass die Beziehung

$$
(4) \qquad \begin{pmatrix} x_{\nu-k+2} \\ x_{\nu-k+3} \\ \cdots \\ x_\nu \\ x_{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ T_{k-1} & T_{k-2} & T_{k-3} & \ldots & T_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\nu-k+1} \\ x_{\nu-k+2} \\ \cdots \\ x_{\nu-1} \\ x_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ c \end{pmatrix}
$$

mit der Beziehung (2) und den trivialen Beziehungen $x_i = x_i$, $i = \nu - k + 2, \nu - k + 3, \ldots, \nu$ äquivalent ist. Man bezeichne

$$
(5) \qquad \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ T_{k-1} & T_{k-2} & T_{k-3} & \ldots & T_0 \end{pmatrix}.
$$

Es ist klar, dass die Methode (4) und also auch (2) genau dann konvergiert, wenn der Spektralradius $\varrho(\tilde{T})$ der Matrix $\tilde{T}$ kleiner als 1 ist. Es gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Die Eigenwerte der Matrix $\tilde{T}$ sind genau alle Wurzeln der Gleichung*

$$
(6) \qquad \det(\lambda^k I - \lambda^{k-1} T_0 - \ldots - \lambda T_{k-2} - T_{k-1}) = 0.
$$

Aus dem Satz 1 folgt also sofort, dass das Iterationsverfahren (2) genau dann konvergiert, wenn die Wurzeln der Gleichung (6) in dem Einheitskreis liegen.

B e w e i s d e s S a t z e s 1. Der Einfachheit wegen beweisen wir den Satz für den Fall $k = 3$ (für eine beliebige Zahl k läuft der Beweis ganz analogisch). Es gilt für $\lambda \neq 0$ schrittweise

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - \widetilde{T}) &= \det \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ 0 & I & -I \\ -T_2 & -T_1 & \lambda I - T_0 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -I \\ -T_2 & -\frac{1}{\lambda}T_2 - T_1 & \lambda I - T_0 \end{pmatrix} \\
&= \det(\lambda I) \det \begin{pmatrix} \lambda I & -I \\ -\frac{1}{\lambda}T_2 - T_1 & \lambda I - T_0 \end{pmatrix} \\
&= \det(\lambda I) \det \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}T_2 - T_1 & -\frac{1}{\lambda^2}T_2 - \frac{1}{\lambda}T_1 - T_0 + \lambda I \end{pmatrix} \\
&= \det(\lambda I) \det(\lambda I) \det \left(\frac{1}{\lambda^2}T_2 - \frac{1}{\lambda}T_1 - T_0 + \lambda I\right) \\
&= \lambda^{2q} \det(\lambda^3 I - \lambda^2 T_0 - \lambda T_1 - T_2),
\end{aligned}$$

wodurch die Behauptung des Satzes 1 beweisen ist. Für $\lambda = 0$ ist der Beweis trivial, da $\det \widetilde{T} = \det T_2$ gilt.

Es sei jetzt

$$x_{\nu+1} = Tx_\nu + d \tag{7}$$

ein beliebiges Iterationsverfahren der Ordnung 1, das mit dem System (1) konsistent ist. Man definiere weiter ein Iterationsverfahren der Ordnung k, wo die Matrizen $T_0, \ldots, T_{k-1}$ folgenderweise definiert sind:

$$T_0 = pI + tT,\ T_1 = t_1 I,\ \ldots,\ T_{k-1} = t_{k-1} I, \tag{8}$$

wo p, t, $t_1, \ldots, t_{k-1}$ Konstanten sind und $1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1} \neq 0$ gilt. Aus der Beziehung

$$x = T_0 x + T_1 x + \ldots + T_{k-1} x + c$$

und aus (8) folgt schrittweise

$$\begin{aligned}
&x = (pI + tT)x + t_1 Ix + \ldots + t_{k-1} Ix + c, \\
&x = tTx + (p + t_1 + \ldots + t_{k-1})x + c, \\
&(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})x = tTx + c, \\
&x = \frac{t}{1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}} Tx + \frac{1}{1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}} c.
\end{aligned}$$

Die Methode ist offensichtlich mit (7) für

$$t/(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}) = 1, \quad c/(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}) = d$$

konsistent, d.h.

$$0 \neq t = 1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1} \quad \text{und} \quad c = (1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})d.$$

Nach (4) und (5) hängt die Konvergenzgeschwindigkeit des oben definierten Iterationsverfahrens von dem Spektralradius der Matrix $\tilde{T}$ ab. Um die Konvergenzgeschwindigkeit des, durch die Formeln (2) und (8) definierten, Iterationsverfahrens mit der Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens (7) vergleichen zu können, beweisen wir jetzt den Satz 2, der die Beziehung zwischen den Eigenwerten λ der Matrix $\tilde{T}$ und μ der Matrix T beschreibt. □

Satz 2. I. *Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix $\tilde{T}$. Dann ist die, der Gleichung*

$$\lambda^k - p\lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1} = \mu\lambda^{k-1}(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}) \tag{9}$$

genügende, Zahl μ ein Eigenwert der Matrix T.

II. *Es sei μ ein Eigenwert der Martix T. Dann ist jede Wurzel der Gleichung* (9) *ein Eigenwert der Matrix $\tilde{T}$.*

Beweis. I. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix $\tilde{T}$. Dann ist nach dem Satz 1 die Zahl λ eine Wurzel der Gleichung (6), die im untersuchten Spezialfall die Form

$$0 = \det[\lambda^k I - \lambda^{k-1}(pI + tT) - \lambda^{k-2}t_1 I - \ldots - t_{k-1}I] \tag{10}$$

besitzt. Davon folgt sofort

$$0 = \det\{\lambda^k I - \lambda^{k-1}[pI + (1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})T] - \lambda^{k-2}t_1 I - \ldots - t_{k-1}I\},$$

so dass

$$0 = \det\{-\lambda^{k-1}(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})T + (\lambda^k - p\lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1})I\} \tag{11}$$

gilt. Da $1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1} \neq 0$ nach der Voraussetzung ist, folgt aus (11) sofort die Beziehung

$$0 = \det\left\{T - \frac{\lambda^k - p\lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1}}{(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})\lambda^{k-1}} I\right\}, \tag{12}$$

so dass ein solcher Eigenwert μ der Matrix T existiert, für welchen

$$(\lambda^k - p\lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1})/(1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1})\lambda^{k-1} = \mu \tag{13}$$

gilt. Die Beziehung (11) ist in diesem Fall mit (9) äquivalent.

II. Es sei $\mu \neq 0$ ein Eigenwert der Matrix T und λ eine Wurzel der Gleichung (9), $\lambda \neq 0$. Aus den Beziehungen (9) und $0 = \det\{T - \mu I\}$ folgt sofort die Gleichheit (12), die äquivalent mit (10) ist. Aus dem Satz 1 folgt sofort, dass λ ein Eigenwert der Matrix $\widetilde{T}$ ist. Falls $\mu \neq 0$ und $\lambda = 0$ eine Wurzel der Gleichung (9) ist, gilt die Gleichung $\lambda^k - \lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1} = 0$, so dass $t_{k-1} = 0$ gilt und die Matrix $T_{k-1} = t_{k-1}I$ singulär ist. Davon folgt aber, dass auch die Matrix $\widetilde{T}$ singulär sein muss und dass die Zahl $\lambda = 0$ ein Eigenwert der Matrix $\widetilde{T}$ ist.

Es sei $\mu = 0$ ein Eigenwert der Matrix T und λ eine Wurzel der Gleichung (9). Dann gilt $\lambda^k - p\lambda^{k-1} - t_1\lambda^{k-2} - \ldots - t_{k-1} = 0$. Wenn $\lambda = 0$ ist, ist auch $t_{k-1} = 0$, so dass die Matrix T_{k-1} und also auch die Matrix $\widetilde{T}$ singulär mit dem Eigenwert $\lambda = 0$ ist. Wenn $\lambda \neq 0$, folgt aus der Beziehung $\det T = 0$ sofort die Beziehung (12) und also auch (10), so dass λ nach dem Satz 1 ein Eigenwert der Matrix T ist.

Dadurch is der Satz 2 bewiesen. □

Im Folgenden werden wir die Frage der Konvergenzoptimierung des, durch die Formeln (2) und (8) definierten, Iterationsverfahrens untersuchen. Die Parameter p, $t_1, \ldots, t_{k-1}$ werden dabei auf eine spezielle Weise gewählt (der Parameter t hängt infolge der Konsistenzbedingung des Verfahrens (2) und (7) von den Parametern p, $t_1, \ldots, t_{k-1}$ ab, da die Beziehung $t = 1 - p - t_1 - \ldots - t_{k-1}$ gilt).

Spezialfall I. Die Parameter $p, t_1, \ldots, t_{k-1}$ werden folgenderweise gewählt:

$$-p = \binom{k}{1}s, \quad -t_1 = \binom{k}{2}s^2, \quad \ldots, \quad -t_{k-1} = \binom{k}{k}s^k. \tag{14}$$

Dabei ist s eine beliebige, von Null verschiedene, reelle Zahl. Man stellt leicht fest, dass die Gleichung (9) in diesem Fall die Form

$$(\lambda + s)^k = \mu\lambda^{k-1}(1 + s)^k \tag{15}$$

oder

$$\lambda^k + \lambda^{k-1}\left[\binom{k}{1}s - \mu(1+s)^k\right] + \lambda^{k-2}\binom{k}{2}s^2 + \ldots + \lambda\binom{k}{k-1}s^{k-1} + s^k = 0 \tag{16}$$

besitzt.

Im Folgenden werden wir voraussetzen, dass die Eigenwerte μ der Matrix T in dem Inneren des Kreises mit dem Mittelpunkt auf der Realachse liegen, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M mit $m < M$ enthält. Der folgende Satz 3 befasst sich mit der Wahl des optimalen Parameters s, für den die Wurzeln λ

der Gleichung (16), d.h. angesichts der Sätze 1 und 2 die Eigenwerte der Matrix $\widetilde{T}$, im möglichst minimalen Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung liegen.

Satz 3. *Die Eigenwerte μ der Matrix T liegen in dem Inneren des Kreises mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M mit $m < M$ und $m + M < 0$ enthält. Sei $s = s_0$ eine im Intervall $-1 < s < 0$ liegende Wurzel der Gleichung*

$$(m + M)(1 + s)^k - 2ks = 0 \tag{17}$$

(in diesem Intervall existiert eine einzige Wurzel). Es existierte eine, im Intervall $1 < \varrho$ liegende Wurzel $\varrho = \varrho_0$ der Gleichung

$$\varrho M(1 + s_0)^k + (1 - \varrho s_0)^k - 2 = 0. \tag{18}$$

Dann gilt für den Spektralradius $\varrho(\widetilde{T})$ der Matrix $\widetilde{T}$ die Ungleichung

$$\varrho(\widetilde{T}) \leqslant \frac{1}{\varrho_0}. \tag{19}$$

B e w e i s. Man lege $\tau = \varrho\lambda$. Dann folgt aus (16) die Gleichung

$$\tau^k + \tau^{k-1}\varrho\left[\binom{k}{1}s - \mu(1 + s)^k\right] + \tau^{k-1}\varrho^2\binom{k}{2}s^2 + \ldots + \varrho^k s^k = 0. \tag{20}$$

Nach der Gerschgorin-Abschätzung für die Lage der Eigenwerte der Matrix, die der Gleichung (20) entspricht folgt, dass die Wurzeln der Gleichung (20) in der Vereinigung der Kreise

$$|\tau| \leqslant 1, \tag{21}$$

$$\left|\tau + \varrho\left[\binom{k}{1}s - \mu(1 + s)^k\right]\right| \leqslant \varrho^2\binom{k}{2}|s|^2 + \ldots + \varrho^k\binom{k}{k}|s|^k \tag{22}$$

liegen. Der Mittelpunkt des zweiten Kreises liegt also bei gegebenem μ im Punkte $\varrho[\mu(1+s)^k - ks]$. Da die Punkte μ in dem Inneren des Kreises k_1 mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M mit $m < M$ und $m + M < 0$ enthält, liegen (der Mittelpunkt dieses Kreises liegt also links von dem Ursprung), liegen die Punkte $\varrho[\mu(1 + s)^k - ks]$ wieder in dem Inneren des Kreises k_2 mit dem Mittelpunkt auf der Realachse, dessen Grenzkreislinie durch die Punkte

$\varrho[m(1+s)^k - ks]$, $\varrho[M(1+s)^k - ks]$ geht. Man suche eine solche Zahl s_0, dass der Mittelpunkt des Kreises k_2 im Ursprung liegt. Das tritt dann ein, wenn

$$\varrho[m(1+s)^k - ks] = -\varrho[M(1+s)^k - ks]$$

gilt, d.h. wenn s_0 die Wurzel der Gleichung (17) ist. Man beweist leicht, dass eine einzige, im Intervall $-1 < s_0 < 0$ liegende Wurzel s_0, existiert. (Für $s = -1$ gleicht nämlich die linke Seite der Gleichung (22) der Zahl $2k > 0$, während für $s = 0$ die linke Seite der Zahl $m + M < 0$ gleich ist, wobei die Ableitung des Polynoms an der linken Seite der Gleichung (20) im Intervall $-1 < s_0 < 0$ negativ ist.)

Für die Zahl $s = s_0$ liegt also der Mittelpunkt des Kreises k_2 im Punkt 0 und dessen Radius ist der Zahl $\varrho[M(1+s_0)^k - ks_0]$ gleich. Angesichts der Ungleichungen (21) und (22) liegen alle Wurzeln der Gleichung (20) für verschiedene Zahlen μ aus dem Kreis k_1 in der Vereinigung der Kreise

$$|\tau| \leqslant 1$$

und

$$|\tau| \leqslant \varrho[M(1+s_0)^k - ks_0] + \varrho^2\binom{k}{2}|s_0|^2 + \ldots + \varrho^k\binom{k}{k}|s_0|^k. \tag{23}$$

Die Ungleichung (23) kann man folgenderweise schreiben:

$$|\tau| \leqslant \varrho M(1+s_0)^k + (1-\varrho s_0)^k - 1. \tag{24}$$

Es existiere eine solche Zahl $\varrho = \varrho_0$, dass die Gleichung

$$\varrho M(1+s_0)^k + (1-\varrho s_0)^k - 1 = 1$$

gilt, d.h. dass ϱ_0 eine Wurzel der Gleichung (18) ist. Dann gilt für jede Wurzel τ der Gleichung (20) die Ungleichung $|\tau| \leqslant 1$, d.h. $|\lambda| \leqslant 1/\varrho_0 < 1$, wodurch der Satz 3 bewiesen ist. □

B e i s p i e l 1. Es sei $m = -0.8$, $M = 0.2$, $k = 2$. Die Gleichung (17) besitzt dann die Form $s^2 + 8.666s + 1 = 0$ und ihre, im Intervall $(-1, 1)$ liegende Wurzel ist $s_0 = -0.11696$. Es ist also

$$p = 0.2339, \quad t = -0.01368, \quad t = 1 - p - t_1 = 0.77977,$$

so dass die Iterationsvorschrift angesichts (2), (8) die Form

$$x_{\nu+1} = (0.2339\, I + 0.7797\, T)x_\nu - 0.01368 x_{\nu-1} + c$$

besitzt. Die Gleichung (18) hat dann die Form

$$0.2\varrho(1+0.11696)^2+(1+\varrho 0.11696)^2-2=0$$

oder

$$0.01368\varrho^2+0.38988\varrho-1=0,$$

wobei ihre, im Intervall $1<\varrho$ liegende, Wurzel $\varrho=2.36813$ ist. Es ist also

$$\varrho(\widetilde{T})\leqslant 0.42227.$$

Für Vergleichung: $\varrho(T)=0.8$.

Man bemerke noch, dass der tatsächliche Spektralradius der Matrix $\widetilde{T}$ mit oben erwähnten Werten p, t_1, t_2 nach dem Satz 2 kleiner oder gleich der Zahl 0.353 ist.

B e i s p i e l 2. Es sei $m=-1.2$, $M=-0.2$, $k=3$. Dann besitzt die Gleichung (17) die Form

$$s^3+3s^2+7.2857s+1=0$$

und die, im Intervall $(-1,0)$ liegende Wurzel $s=s_0=-0.1455$. Dann ist

$$p=0.4365,\quad t_1=-0.0635,\quad t_2=0.00308,\quad t=1-p-t_1-t_2=0.62392,$$

so dass die Iterationsvorschrift die Form

$$x_{\nu+1}=(0.4365\,I+0.6239\,T)x_\nu-0.0365x_{\nu-1}+0.00308x_{\nu-2}+c$$

besitzt. Die Gleichung (18) ist dann der Form

$$0.00308\varrho^3+0.0635\varrho^2+0.3117\varrho-1=0$$

und deren Wurzel ist $\varrho=\varrho_0=2.1593>1$. Es ist also

$$\varrho(\widetilde{T})\leqslant 1/\varrho_0=0.463.$$

B e m e r k u n g 1. Aus der Gleichung (17) folgt offensichtlich, dass die Wurzel s_0 der Gleichung (17) von der Zahl $\frac{1}{2}(M+m)$, d.h. von der Lage des Mittelpunktes des Intervalls $\langle m,M\rangle$, abhängt. Der Wert der Wurzel ϱ_0 der Gleichung (18) bei gegebener Zahl s_0 hängt dann also nur vom Wert M ab. Aus der Gleichung (18) folgt sofort, dass $\varrho_0>1$ ist, solange $M<[-(1-s_0)^k+2]/(1+s_0)^k$ gilt.

In dem Beispiel 1 bekommt man also die obere Grenze $M < 0.965$ und im Beispiel 2 $M < 0.796$.

Für die Illustration bemerke man noch, dass im Falle, wenn die Matrix T z.B. die Eigenwerte $\mu_1 = -0.8$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0.2$ besitzt, gleicht nach dem Satz 2 der tatsächlige Spektralradius $\varrho(\widetilde{T})$ bei den Werten der Parameter p, t, t_1, wie im Beispiel 1, der Zahl $\varrho(\widetilde{T}) = 0.351$. Ähnlicherweise (siehe Beispiel 2) bei den Eigenwerten $\mu_1 = -1.2$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = -0.2$ und den Parameterwerten p, t, t_1, t_2 wie im Beispiel 2 ist der tatsächliche Spektralradius $\varrho(\widetilde{T}) = 0.28$.

Spezialfall II. Die Parameter p, t_1, …, t_{k-1} werden wir folgenderweise wählen:

$$p = -r, \quad t_1 = -r^2, \dots, t_{k-1} = -r^k, \tag{25}$$

wo r eine von Null verschiedene reelle Zahl ist. Die Gleichung (9) ist dann der Form

$$\lambda^k + r\lambda^{k-1} + r^2\lambda^{k-2} + \ldots + r^k = \mu\lambda^{k-1}(1 + r + r^2 + \ldots + r^k). \tag{26}$$

Durch die Umformung der Gleichung (26) bekommt man die Gleichung

$$\lambda^k + \lambda^{k-1}\left[r - \mu\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}\right] + \lambda^{k-2}r^2 + \ldots + r^k = 0. \tag{27}$$

Ähnlicherweise, wie im Spezialfall I, kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Die Eigenwerte μ der Matrix T liegen in dem Inneren des Kreises mit dem Mittelpunkt an der Realachse, dessen Grenzkreislinie die Punkte m, M mit $m < M$ enthält und $-4/k < m + M < 0$ für k gerade, bzw. $-4/(k-1) < m + M < 0$ für k ungerade, gilt. Sei $r = r_0$ eine im Intervall $-1 < r < 0$ liegende Wurzel der Gleichung*

$$(m + M)(1 - r^{k+1})/(1 - r) = 2r \tag{28}$$

(in diesem Intervall existiert eine einzige Wurzel dieser Gleichung). Es existiere eine, im Intervall $1 < \varrho$ liegende Wurzel $\varrho = \varrho_0$ der Gleichung

$$\varrho M\frac{1 - r_0^{k+1}}{1 - r_0} + \frac{1 - \varrho^{k+1}|r_0|^{k+1}}{1 - \varrho|r_0|} - 2 = 0. \tag{29}$$

Dann gilt für den Spektralradius $\varrho(\widetilde{T})$ der Matrix $\widetilde{T}$ die Ungleichung

$$\varrho(\widetilde{T}) \leqslant \frac{1}{\varrho_0}. \tag{19}$$

B e m e r k u n g 2. Die Gleichung (29) kann man in der Form

$$(30)\quad (-1)^k \varrho^k r^k + (-1)\varrho^{k-1} r^{k-1} + \ldots + (-1)^2 \varrho^2 r^2 + \varrho\Big[M \frac{1-r^{k+1}}{1-r} - r\Big] = 1 - 0$$

schreiben.

B e w e i s. Der Beweis des Satzes 4 ist analogisch zum Beweis des Satzes 3. Den Beziehungen (20), (21), (22) und (19) entsprechen der Reihe nach die Beziehungen

$$(31)\qquad \tau^k + \tau^{k-1}\varrho\Big[r - \frac{1-r^{k+1}}{1-r}\Big] + \tau^{k-2}\varrho^2 r^2 + \ldots + \varrho^k r^k = 0,$$

$$(32)\qquad |\tau| \leqslant 1,$$

$$(33)\qquad \Big|\tau + \varrho\Big(r - \mu\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\Big)\Big| \leqslant \varrho^2 |r|^2 + \ldots + \varrho^k |r|^k,$$

$$(34)\qquad [(m+M)(1-r^{k+1})/(1-r)] - 2r = 0.$$

Die Gleichung (34) hat offensichtlich wenigstens eine Wurzel $r = r_0$, $-1 < r < 0$, da für $r = 0$ ihre linke Seite der Zahl $m + M < 0$ und für $r = -1$ der Zahl 2, bzw. $m + M + 2 > 0$ gleich ist, je nach dem ob eine k eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Um zu beweisen, dass im Intervall $(-1, 0)$ eine einzige Wurzel r_0 existiert, beweisen wir, dass die Ableitung der Funktion an der linken Seite der Gleichung (34) im Intervall $-1 < r < 0$ negativ ist, d.h. die linke Seite der Gleichung (34) eine abnehmende Funktion ist. Es ist also zu beweisen, dass für $-1 < r < 0$ die Ungleichung

$$(35)\qquad (m+M)(1 + 2r + \ldots + kr^{k-1}) - 2 < 0$$

gilt. Es sei zuerst k eine gerade Zahl, d.h. $k = 2n$, $n \geqslant 1$. Man kann durch die vollständige Induktion die Ungleichung

$$(36)\qquad 1 + 2r + \ldots + 2nr^{2n-1} \geqslant -n$$

beweisen. Für $n = 1$ ist die Ungleichung der Form $1 + 2r \geqslant -1$ oder $r \geqslant -1$ und die Behauptung (36) gilt. Es gilt weiter nach (36) die Ungleichung

$$(37)\qquad \begin{aligned} &1 + 2r + \ldots + 2nr^{2n-1} + (2n+1)r^{2n} + (2n+2)r^{2n+1} \\ &\geqslant -n + (2n+1)r^{2n} + (2n+2)r^{2n+1}. \end{aligned}$$

Man kann leicht beweisen dass die Ungleichung

$$f(r) = (2n+1)r^{2n} + (2n+2)r^{2n+1} \geqslant -1, \tag{38}$$

d.h.

$$f(r) = r^{2n}[(2n+1) + (2n+2)r] \geqslant -1 \tag{39}$$

gilt. Für $r = 0$ und $r = -1$ ist $f(0) = 0$ und $f(-1) = -1$, so dass die Ungleichung (39) gilt. Es ist

$$f'(r) = (2n+1)r^{2n-1}[2n + r(2n+2)],$$

so dass $f'(r) = 0$ für $r = 0$ und $r = -2n/(2n+2)$, $-1 < -2n/(2n+2) < 0$ ist, wobei $f(0) = 0$, $f\big(-2n/(2n+2)\big) = \big(2n/(2n+2)\big)^{2n} > 0$ gilt. Die Ungleichungen (39) sind also gültig. Aus (37) und (39) folgt dann sofort die Ungleichung

$$1 + 2r + \ldots + (2n+2)r^{2n+1} \geqslant -n-1,$$

wodurch die Ungleichung (36) bewiesen ist. Aus (36) folgen dann die Ungleichungen

$$\begin{aligned}(m+M)(1 + 2r + \ldots + 2nr^{2n-1}) &\leqslant -n(m+M)\\ &= n[-(m+M)] < n(4/k) = n(2/n) = 2,\end{aligned}$$

wodurch die Ungleichung (35) bewiesen ist.

Wenn nun k eine ungerade Zahl ist, d.h. $k = 2n+1$, $n \geqslant 1$, besitzt die zu beweisende Ungleichung (35) die Form

$$(m+M)(1 + 2r + \ldots + (2n+1)r^{2n}) - 2 \leqslant 0.$$

Da $(2n+1)r^{2n} \geqslant 0$ ist, gilt nach (36) die Ungleichung

$$1 + 2r + \ldots + 2nr^{2n-1} + (2n+1)r^{2n} \geqslant 1 + 2r + \ldots + 2nr^{2n-1} > -n$$

oder

$$\begin{aligned}(m+M)\big(1 + 2r + \ldots + (2n+1)r^{2n}\big) &\leqslant -n(m+M)\\ &= n[-(m+M)] < n(4/k-1) = n(2/n) = 2,\end{aligned}$$

wodurch die Ungleichung (35) in diesem Fall bewiesen ist. Es existiert also eine einzige Wurzel r_0 der Gleichung (34) im Intervall $(-1, 0)$.

Aus (33) folgt dann ähnlicherweise, wie im Beweis des Satzes 3, die Gleichung (29), die analogisch der Gleichung (18) aus dem Satz 3 ist. □

B e i s p i e l 3. Es sei $m = -0.8$, $M = 0.2$, $k = 2$. Die Gleichung (28) besitzt dann die Form

$$r^2 + 4.3333r + 1 = 0,$$

so dass $r_0 = -0.2446$ ist. Dann ist

$$p = 0.2446, \quad t_1 = -0.0598, \quad t = 1 - p - t_1 = 0.6956$$

und die Iterationsvorschrift ist der Form

$$x_{\nu+1} = (0.2446\ I + 0.6956\ T)x_\nu - 0.0598x_{\nu-1} + c.$$

Die Gleichung (29) besitzt nun die Form

$$0.0598\varrho^2 + 0.4076\varrho - 1 = 0$$

und es existiert die Wurzel $\varrho = \varrho_0 = 1.9152$. Es ist also

$$\varrho(\widetilde{T}) \leqslant 0.5221.$$

B e i s p i e l 4. Es sei $m = -0.8$, $M = 0.2$, $k = 3$. Dann ist

$$r^3 + r^2 + 4.3333r + 1 = 0, \tag{28}$$

$r_0 = -0.2409$, $p = 0.2409$, $t_1 = -0.0581$, $t_2 = -0.0140$, $t = 1 - p - t_1 - t_2 = 0.8311$. Die Iterationsvorschrift ist dann der Form

$$x_{\nu+1} = (0.2409\ I + 0.8311\ T)x_\nu - 0.0581x_{\nu-1} + 0.0141x_{\nu-2} + c$$

und es ist ferner

$$0.0140\varrho^3 + 0.0581\varrho^2 + 0.4900\varrho - 1 = 0, \tag{29}$$

$\varrho_0 = 1.6126$, $\varrho(\widetilde{T}) \leqslant 0.6201$.

Ähnlicherweise, wie in der Bemerkung 2, hängt die Wurzel $r = r_0$ der Gleichung (28) von dem Mittelpunkt des Intervalls $\langle m, M \rangle$ ab und die Gleichung (29) besitzt für

$$M < \left[2 - \frac{1 - |r_0|^{k+1}}{1 - |r_0|}\right] \Big/ \frac{1 - r_0^{k+1}}{1 - r_0}$$

die Wurzel $\varrho = \varrho_0 > 1$.

Bibliographie

[1] *D. M. Young*: Iterative Solution of large Systems. Academia Press, New York and London, 1971.

Anschrift des Verfasser: Miroslav Šisler, ČVUT, Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 – Dejvice.