Czechoslovak Mathematical Journal, 48 (123) (1998), 747–753

ÜBER SYMMETRISCHE OPERATOREN AUF BANACHVERBÄNDEN UND ARENS-REGULARITÄT

Egon Scheffold, Darmstadt

(Eingegangen am 12. Februar 1996)

Ist A eine kommutative Banachalgebra, so ist der Bidual A'' von A, versehen mit dem 1. oder 2. Arens-Produkt, i. a. nicht wieder kommutativ. In dieser Arbeit zeigen wir, daá die Arens-Triadjungierte symmetrischer, regulärer bilinearer Abbildungen, eingeschränkt auf die ordnungsstetigen Biduale, wieder symmetrisch ist. Dies bedeutet, daá bei kommutativen Banachverbandsalgebren der ordnungsstetige Bidual, versehen mit dem 1. oder 2. Arens-Produkt, stets wieder kommutativ ist. Solche Algebren sind also im Hinblick auf den ordnungsstetigen Bidual Arens-regulär.

Die Aussage über die Arens-Triadjungierte erhalten wir als eine Anwendung von Ergebnissen über Symmetrieeigenschaften gewisser Operatoren.

0. Vorbemerkungen

Im folgenden sei E ein Banachverband. Mit E' bzw. E'' bezeichnen wir den topologischen Dual bzw. Bidual von E. Das Band der ordnungsstetigen Linearformen in E'' wird mit $(E')'_n$ bezeichnet. Ist F ein ordnungsvollständiger Banachverband, so bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(E,F)$ den Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen von E nach F und mit $\mathscr{L}^r(E,F)$ den Banachverband der regulären linearen Abbildungen von E nach F (s. [5], Kap. IV, §1), wobei eine Abbildung regulär heiát, falls sie Differenz zweier positiver Abbildungen ist. Ansonsten benutzen wir die in der Banachverbandstheorie übliche Bezeichnungsweise.

Ist H ein reeller Hilbertraum, so heiát ein beschränkter linearer Operator T auf H selbstadjungiert, falls für alle $x,y\in H$ die Beziehung $(Tx,y)=(x,Ty)$ gilt, falls also $(x,Ty)=(y,Tx)$ gilt. Dies ist eine Symmetrieeigenschaft von T bezüglich x und y. In der angegebenen Identität der inneren Produkte kommt auch zum Ausdruck, daá man die Elemente von H mit Elementen des topologischen Duals H' identifizieren kann. Natürlich ist daher folgende Verallgemeinerung.

1. Symmetrische Operatoren

Es sei E ein Banachverband. Wir nennen einen Operator $T \in \mathscr{L}^r(E, E')$ symmetrisch, falls gilt:

$$(Tx)(y) = (Ty)(x)$$

für alle $x, y \in E$.

Ist $T = (t_{ik})$ eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix, so ist offensichtlich die Matrix $|T| = \big(|t_{ik}|\big)$ wieder symmetrisch. Daá für einen symmetrischen Operator T der Operator $|T|$ wieder symmetrisch ist, ist dagegen keineswegs trivial.

Satz 1. *Es sei E ein Banachverband. Dann bildet die Menge $\mathscr{S}$ der symmetrischen Operatoren einen abgeschlossenen Vektorunterverband im Banachverband $\mathscr{L}^r(E, E')$.*

Beweis. Die Menge $\mathscr{S}$ ist offensichtlich ein abgeschlossener linearer Teilraum. Es sei $T \in \mathscr{S}$. Es genügt zu zeigen, daá dann auch T^+ symmetrisch ist.

Sei nun x, $y \in E_+$. Dann gilt

$$\big(T^+\big)(x)(y) = \sup M, \quad \text{mit} \quad M = \big\{(Tx_1)(y_1) + \ldots + (Tx_n)(y_n)\big\},$$

wobei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ alle nichtleeren, endlichen Teilmengen des Ordnungsintervalls $[0, x]$ durchläuft und die dazugehörige Menge $\{y_1, \ldots y_n\}$ alle nichtleeren, endlichen Teilmengen des Ordnungsintervalls $[0, y]$ durchläuft und die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y$$

erfüllt.

Analog gilt $\big(T^+\big)(y)(x) = \sup N$, mit $N = \big\{(T\tilde{y}_1)(\tilde{x}_1) + \ldots + (T\tilde{y}_n)(\tilde{x}_n)\colon 0 \leqslant \tilde{y}_i \leqslant y,\ \tilde{x}_i \geqslant 0$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = x\big\}$. Wir zeigen $\sup M = \sup N$, indem wir nachweisen, daá jede Zahl aus M beliebig genau durch eine Zahl aus N approximiert werden kann und umgekehrt.

Sei nun $a := \sum\limits_{i=1}^{n} (Tx_i)(y_i)$ eine beliebige, aber feste Zahl aus M und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Mit Hilfe der kanonischen Darstellung des Hauptideals E_x als Funktionenverband $C(K)$ und einer geeigneten Partition der Einsfunktion läát sich zeigen, daá positive Elemente $\tilde{x}_j \in E$, $1 \leqslant j \leqslant m$, und Zahlen $\alpha_{ij} \in [0,1]$ existieren, so daá gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j = x \quad \text{und} \quad \left\| x_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{x}_j \right\| \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Setzt man

$$\tilde{y}_j := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} y_i$$

für $1 \leqslant j \leqslant m$, so gilt

$$\tilde{y}_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i = y \quad \text{und} \quad b := \sum_{j=1}^{m} (T\tilde{y}_j)(\tilde{x}_j) \in N.$$

Da T symmetrisch ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
b &= \sum_{j=1}^{m} (T\tilde{y}_j)\,(\tilde{x}_j) = \sum_{j=1}^{m} (T\tilde{x}_j)\,(\tilde{y}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (T\tilde{x}_j) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, (T\tilde{x}_j)\,(y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} T \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{x}_j \right) (y_i).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\left| a - b \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (Tx_i)(y_i) - \sum_{j=1}^{m} (T\tilde{y}_j)\,(\tilde{x}_j) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} (Tx_i)(y_i) - \sum_{i=1}^{n} \left(T \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{x}_j \right) \right) (y_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(T \left(x_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{x}_j \right) \right) (y_i) \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|T\| \left\| x_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{x}_j \right\| \|y_i\| \\
&\leqslant \left\| T \right\| \cdot \varepsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \right).
\end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, kann man jede Zahl aus M beliebig genau durch eine Zahl aus N approximieren. Die entsprechende Aussage für N zeigt man analog. Es ist also

$$\left(T^{+}\right)(x)(y) = \left(T^{+}\right)(y)(x).$$

□

Vom Studium Arens-regulärer symmetrischer bilinearer Abbildungen bzw. kommutativer Banachalgebren ist im Prinzip folgende Aussage bekannt ([1], Kap. 4; [3], Theorem 1; [9]):

Sei F ein Banachraum und T ein symmetrischer Operator aus $\mathscr{L}(F, F')$. Es gilt genau dann die symmetrische Beziehung $\nu(T'\mu) = \mu(T'\nu)$ für alle μ, $\nu \in F''$, wenn T schwachkompakt ist. Interessant ist nun, daá für den ordnungsstetigen Bidual diese Beziehung ohne eine zussätzliche Voraussetzung erfüllt ist.

Theorem 2. *Es sei E ein Banachverband und T ein symmetrischer Operator aus $\mathscr{L}^r(E, E')$. Dann gilt*

$$\nu\big(T'\mu\big) = \mu\big(T'\nu\big)$$

für alle $\mu, \nu \in (E')'_n$.

B e w e i s . Da mit T auch die Operatoren T^+ und T^- symmetrisch sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daá T positiv ist. Ferner genügt es, positive Elemente μ und ν zu betrachten.

Seien μ und ν positive Elemente von $(E')'_n$. Wir behandeln zunächst den Fall, daá zu μ ein positives Element $u \in E$ existiert mit $\mu \leqslant u''$, wobei u'' die kanonische Einbettung von u in E'' bedeutet.

Wir betrachten nun das von u'' erzeugte Hauptideal $E''_{u''}$, versehen mit der absoluten schwachen Topologie $|\sigma|\big((E')'_n, E'\big)$, welche von den Verbandshalbnormen $\varrho \to f\big(|\varrho|\big)$, $(f \in E'_+)$ erzeugt wird. Wie wir im Beweis von ([7], Satz 2) gezeigt haben, ist dann die kanonische Einbettung des Hauptideals E_u ein dichter Vektorunterverband von $E''_{u''}$. Es existiert daher ein Netz $(\tilde{x}_\alpha)$ in E_u mit $\mu = \lim_\alpha \tilde{x}''_\alpha$. Hieraus folgt

$$\mu = \lim_\alpha \big(|\tilde{x}_\alpha|\big)''.$$

Setzen wir

$$x_\alpha := \inf\big(|\tilde{x}_\alpha|, u\big)$$

für alle α, so gilt $0 \leqslant x''_\alpha \leqslant u''$ und $\mu = \lim_\alpha x''_\alpha$. Es gilt somit auch $\mu = \lim_\alpha x''_\alpha$ in der schwachen Topologie $\sigma\big((E')'_n, E'\big)$.

Nach der Nakano-Theorie ist das Ordnungsintervall $[0, Tu]$ kompakt in der $\sigma(E', (E')'_n)$-Topologie (s. [4], S. 38, 1.4.14). Zu dem Netz (Tx_α) gibt es daher ein Teilnetz (x_j) von (x_α) und ein Element $g \in E'$ mit $g = \lim_j Tx_j$ in der $\sigma(E', (E')'_n)$-Topologie.

Für alle $x \in E$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T'\mu(x) &= \mu(Tx) = \lim_\alpha x''_\alpha(Tx) \\ &= \lim_\alpha (Tx)(x_\alpha) = \lim_\alpha (Tx_\alpha)\,(x) \\ &= \lim_j (Tx_j)\,(x) = g(x). \end{aligned}$$

Dies bedeutet $T'\mu = g$. Es gilt somit $T'\mu = \lim_j Tx_j$ in der $\sigma(E', (E')'_n)$-Topologie. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mu(T'\nu) &= \lim_j (x''_j)\,(T'\nu) = \lim_j (T'\nu)\,(x_j) \\ &= \lim_j \nu(Tx_j) = \nu(T'\mu). \end{aligned}$$

Nun sei μ ein beliebiges positives Element in $(E')'_n$. Dann gibt es bekanntlich ein nach oben gerichtetes Netz (μ_α) in $(E')'_n$ und ein Netz (u_α) in E mit $\mu_\alpha \leqslant u''_\alpha$, für alle α und $\mu = \sup_\alpha\{\mu_\alpha\}$.

Da T' ordnungsstetig ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} T'\mu &= \sup_\alpha\{T'\mu_\alpha\}, \\ \nu(T'\mu) &= \sup_\alpha\{\nu(T'\mu_\alpha)\} = \sup_\alpha\{\mu_\alpha(T'\nu)\} = \mu(T'\nu). \end{aligned}$$

□

2. Die Arens-Triadjungierte symmetrischer bilinearer Abbildungen

Es seien E, F und G Banachräume. Ferner sei φ eine beschränkte bilineare Abbildung vom Produktraum $E \times F$ nach G. Im Falle $E = F$ heiát die Abbildung φ symmetrisch, falls $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ für alle x und y gilt.

In [1] wird für die Abbildung φ iterativ in drei Schritten die triadjungierte Abbildung $\varphi^{***}\colon\ E'' \times F'' \to G''$ definiert. Zunächst wird die Abbildung $\varphi^*\colon\ G' \times E \to F'$ erklärt durch $\varphi^*(\mu, x)\,(y) := \mu\big(\varphi(x,y)\big)$ für alle $(\mu, x) \in G' \times E$ und alle $y \in F$. Analog sind dann die Abbildungen $\varphi^{**}\colon\ F'' \times G' \to E'$ und $\varphi^{***}\colon\ E'' \times F'' \to G''$ definiert.

Die Abbildung φ induziert auch eine lineare Abbildung $\tilde\varphi$ (in [6] mit φ' bezeichnet) von G' nach $\mathscr{L}(E, F')$ durch die folgende Festsetzung: Für $\mu \in G'$ sei

$$\big(\tilde\varphi\mu\big)\,(x)\,(y) := \mu\big(\varphi(x,y)\big)$$

für alle $x \in E$ und $y \in F$. Wie man leicht verifiziert (vgl. [6], 1.2), läát sich die

Arens-Triadjungierte φ^{***} mit Hilfe der Abbildung $\tilde{\varphi}$ wie folgt darstellen:

$$\varphi^{***}(\mu,\nu)\,(g) = \mu\big((\tilde{\varphi}g)'\nu\big) \tag{1}$$

für alle $(\mu,\nu) \in E'' \times F''$ und $g \in G'$.

Wie in [1] gezeigt wird, ist die Arens-Triadjungierte φ^{***} einer symmetrischen Abbildung φ i. a. nicht wieder symmetrisch. Mit Hilfe von Theorem 2 läát sich nun zeigen, daá aber die Symmetrieeigenschaft noch auf die ordnungsstetigen Biduale vererbt wird.

Theorem 3. *Es seien E und F Banachverbände. Ferner sei φ eine symmetrische, reguläre bilineare Abbildung von $E \times E$ nach F. Dann ist die Arens-Triadjungierte*

$$\varphi^{***}\colon\ (E')'_n \times (E')'_n \to (F')'_n$$

wieder symmetrisch.

Beweis. Zunächst verifiziert man, daá der Wertevorrat von φ^{***}, eingeschränkt auf $(E')'_n \times (E')'_n$, in $(F')'_n$ enthalten ist (vgl. [8], Theorem 3).

Wir betrachten die zu φ gehörige Abbildung $\tilde{\varphi}$. Sei nun $f \in F'$. Dann gilt $\tilde{\varphi}f \in \mathscr{L}^r(E,E')$. Da φ symmetrisch ist, ist nunmehr auch $\tilde{\varphi}f$ symmetrisch. Wenden wir Theorem 2 auf die Abbildung $\tilde{\varphi}f$ an, so erhalten wir aufgrund der Darstellung (1) für $(\mu,\nu) \in (E')'_n \times (E')'_n$:

$$\begin{aligned}\varphi^{***}(\mu,\nu)\,(f) &= \mu\big((\tilde{\varphi}f)'\nu\big) = \nu\big((\tilde{\varphi}f)'\mu\big)\\ &= \varphi^{***}(\nu,\mu)\,(f).\end{aligned}$$

Es ist also $\varphi^{***}(\mu,\nu) = \varphi^{***}(\nu,\mu)$. □

Es sei A eine kommutative Banachverbandsalgebra. Die Multiplikation auf A kann dann als eine positive, symmetrische bilineare Abbildung m von $A \times A$ nach A betrachtet werden. Mit der Arens-Triadjungierten m^{***} von m läát sich das 1. Arens-Produkt auf A'' wie folgt darstellen:

$$F * G = m^{***}(F,G)$$

für alle F, $G \in A''$.

Bekanntlich ist A'', versehen mit dem 1. Arens-Produkt, eine Banachverbandsalgebra. Ferner ist der ordnungsstetige Bidual $(A')'_n$ eine Subalgebra und somit, für sich selbst betrachtet, eine Banachverbandsalgebra. Wenden wir Theorem 3 auf die symmetrische Abbildung m an, so erhalten wir sofort:

Satz 4. *Es sei A eine kommutative Banachverbandsalgebra. Dann ist der ordnungsstetige Bidual $(A')'_n$, versehen mit dem* 1. *Arens-Produkt, wieder kommutativ.*

Eine Banachalgebra heiát Arens-regulär, falls die beiden Arens-Produkte übereinstimmen. Eine kommutative Banachalgebra B ist bekanntlich Arens-regulär, falls das 1. oder 2. Arens-Produkt auf B'' wieder kommutativ ist. Kommutative Banachverbandsalgebren, bei denen der Bidual mit dem ordnungsstetigen Bidual übereinstimmt, sind also stets Arens-regulär, z. B. alle kommutativen Banachverbandsalgebren, bei denen der topologische Dual eine ordnungsstetige Norm besitzt (z. B. alle Banachverbandsalgebren $C_0(X)$).

Bibliographie

[1] *R. Arens*: The adjoint of a bilinear operation. Proc. A. M. S. *2* (1951), 839–848.

[2] *R. Cristescu*: Ordered Vector Spaces and Linear Operators. Ed. Academiei-Abacus Press, Kent, 1976.

[3] *J. Duncan, S. A. R. Hosseiniun*: The second dual of a Banach algebra. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A *84* (1979), 309–325.

[4] *P. Meyer-Nieberg*: Banach Lattices. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[5] *H. H. Schaefer*: Banach Lattices and Positive Operators. Springer, Berlin-Heidelberg -New York, 1974.

[6] *E. Scheffold*: Über Bimorphismen und das Arens-Produkt bei kommutativen D-Banachverbandsalgebren. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *39* (1994), no. 3, 259–270.

[7] *E. Scheffold*: Über den ordnungsstetigen Bidual von FF-Banachverbandsalgebren. Arch. Math. *60* (1993), 473–477.

[8] *E. Scheffold*: Über die Arens-triadjungierte Abbildung von Bimorphismen. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. *41* (1996), no. 9–10, 697–701.

[9] *A. Ülger*: Weakly compact bilinear forms and Arens regularity. Proc. A. M. S. *101* (1987), 697–704.

Anschrift des Verfassers: Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule, Schloágartenstraáe 7, D–64289 Darmstadt, Deutschland.