Anton Kotzig

Sur les tournois avec des 3-cycles régulièrement placés

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 2, 126--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127089

SUR LES TOURNOIS AVEC DES 3-CYCLES RÉGULIÈREMENT PLACÉS

ANTON KOTZIG, Bratislava

Par graphe, tournoi nous entendons les notions dans le sens de [4]. Parlant du cycle, nous entendons toujours un circuit élémentaire dans le sens de Berge [1] (= Zyklus de König [2]). Au lieu du cycle de longueur k nous parlerons de k-cycle.

Soit G un graphe, s un sommet et a une arête de G. Nous noterons: $\pi_G(s)$ = l'affluent de s (= le nombre des arêtes de G pour lesquelles s est l'extrémité terminale — voir [1]); $\omega_G(s)$ = l'écoulement de s (= le nombre des arêtes pour lesquelles s ets l'extrémité initiale); $\tau_G(a)$ = le nombre de tous les 3-cycles dans G qui contiennent l'arête a. Nous noterons par $\tau(G)$ le nombre de tous les 3-cycles dans G. Nous dirons du tournoi qu'il a les 3-cycles régurièrement placés, si chaque arête de G appartient au nombre égal de 3-cycles.

Si u est l'extrémité initiale et v l'extrémité terminale de l'arête orientée a (l'arête orientée dans le sens de König [2] = l'arc dans le sens de Berge [1]), nous la notons aussi $\overrightarrow{uv}$ or $\overleftarrow{vu}$. Si G est un tournoi et $x \neq y$ sont ses sommets, alors il est clair (d'après la définition du tournoi) que G contient exactement une des arêtes $\overrightarrow{xy}, \overleftarrow{xy}$. Le tournoi est complètement égalisé (bref: G est un ϱ-tournoi — voir [3], [4]) s'il vaut pour chaque son sommet s $\pi_G(s) = \omega_G(s)$.

On sait que chaque ϱ-tournoi contient un nombre impair de sommets. Soit G un ϱ-tournoi avec $2n + 1$ sommets, il vaut alors pour chaque son arête a: $1 \leqq \tau_G(a) \leqq n$ (voir [5]).

Lemme 1. *Soit G un ϱ-tournoi avec $2n + 1$ sommets; s soit son sommet quelconque. Soit $A(\to s)$ (resp. $A(s \to)$) l'ensemble de toutes les arêtes pour lesquelles s est l'extrémité terminale (resp. initiale). Il vaut alors:*

$$\tau(G) = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3}; \quad \tau_G(s) = \sum_{a \in A(s\to)} \tau_G(a) = \sum_{a \in A(\to s)} \tau_G(a) = \binom{n+1}{2}.$$

Démonstration. La validité de la première affirmation est prouvée dans [5] et la validité de la seconde affirmation découle du fait que chaque 3-cycle de G contenant s possède exactement une arête de $A(\to s)$ et exactement une arête de $A(s \to)$.

Théorème 1. *Dans un tournoi G il est valable: $\tau_G(a) = 0$ pour chaque arête a si et seulement si G est un tournoi acyclique.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence directe du théorème 2 de [3] (voir la remarque 2).

Remarque 1. On sait que pour chaque $n > 1$ entier naturel il existe un tournoi acyclique avec n sommets et que tous les tournois acycliques avec un nombre de sommets donné sont isomorphes (voir [3]). Alors — comme le montre le théorème 1 — la classe des tournois G pour lesquels il vaut: $\tau_G(a) = 0$ pour chaque arête $a \in G$, est facile à decrire.

Théorème 2. *Soit k un nombre entier naturel et dans le tournoi G soit valable $\tau_G(a) = k > 0$ pour chaque arête $a \in G$, alors G est un ϱ-tournoi avec $4k - 1$ sommets.*

Démonstration. Soit valable $\tau_G(a) = k > 0$ pour chaque arête $a \in G$ et soit m le nombre des arêtes de G. Il est évident que $km = 3\,\tau(G)$. Il découle du lemme 1 et de la supposition $\tau_G(a) = k$ pour chaque $a \in G$ que G est un ϱ-tournoi. Soit $2n + 1$ le nombre des sommets dans G. Il est alors valable: $m = n(2n + 1)$; $\tau(G) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$. Alors $km = kn(2n + 1) = 3\tau(G) = \frac{1}{2}n(n + 1)(2n + 1)$. C'est à dire: $2k = n + 1$ et alors $2n + 1 = 4k - 1$; q. e. d.

Nous dirons que le tournoi G est un tournoi rotatif (bref: un ξ-tournoi) si on peut noter ses sommets par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de façon qu'il est valable: si G contient l'arête $\overrightarrow{s_i s_j}$, il contient alors aussi l'arête $\overrightarrow{s_{i+1}s_{j+1}}$ (nous posons $s_{n+1} = s_1$). Nous disons d'une pareille notation des sommets du ξ-tournoi que c'est une notation normale. De la définition du ξ-tournoi et de la notation normale il résulte directement ce qui suit.

Lemme 2. *Soit G un ξ-tournoi et soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ la notation normale de ses sommets. Si G contient l'arête $a_0 = \overrightarrow{s_i s_j}$, il contient alors aussi l'arête $a_k = \overrightarrow{s_{i+k}s_{j+k}}$, où k est un nombre quelconque de $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$ (nous posons $s_p = s_q$ si et seulement si $p \equiv q \pmod n$) et il vaut: $\tau_G(a_k) = \tau_G(a_0)$. En déhors de cela il est valable $\pi_G(s_i) = \pi_G(s_{i+1})$; $\omega_G(s_i) = \omega_G(s_{i+1})$ pour tous les $i \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Démonstration. La validité du lemme est claire; elle découle directement de la définition du ξ-tournoi et de la notation normale de ses sommets.

Lemme 3. *Changue ξ-tournoi est un cas spécial du ϱ-tournoi.*

Démonstration. D'après le lemme 2 dans un ξ-tournoi G avec n sommets il est valable: $\pi_G(s_1) = \pi_G(s_2) = \ldots = \pi_G(s_n)$; $\omega_G(s_1) = \omega_G(s_2) = \ldots = \omega_G(s_n)$. La somme de tous les affluents et aussi la somme de tous les écoulements dans G est $\binom{n}{2}$. Pour chaque $s_i \in G$ il est valable alors. $\pi_G(s_i) = \omega_G(s_i) = \frac{1}{2}(n - 1)$. C'est à dire G est un ϱ-tournoi, q. e. d.

Lemme 4. *Soit G un ξ-tournoi et soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ une notation normale de ses sommets. Soient p, q des nombres entiers tels dont le plus grand diviseur commun est 1. Alors la notation $\{s_{p+q}, s_{2p+q}, s_{3p+q}, \ldots, s_{np+q}\}$ est aussi une notation normale des sommets de G.*

La démonstration est claire.

Soit G un ξ-tournoi et soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(n = 2k + 1)$ une notation normale de ses sommets. A l'aide de G nous allons définir une fonction φ_G sur l'ensemble de tous les nombres entiers à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ comme il suit: $[x \equiv 0 \pmod{n}] \Leftrightarrow [\varphi_G(x) = 0]$; $[\overrightarrow{s_n s_y} \in G;\ x \equiv y \pmod{n}] \Leftrightarrow [\varphi_G(x) = 1]$; $[\overleftarrow{s_n s_y} \in G;\ x \equiv y \pmod{n}] \Leftrightarrow [\varphi_G(x) = -1]$. Nous allons appeler le vecteur $\varphi_G(S) = \{\varphi_G(1), \varphi_G(2), \ldots, \varphi_G(k)\}$ une caractéristique du ξ-tournoi G près de la notation normale S. Directement de la définition de la fonction φ_G et de la caractéristique $\varphi_G(S)$ découle la validité du lemme:

Lemme 5. *Soit $\varphi_G(S) = \{\varphi_G(1), \varphi_G(2), \ldots, \varphi_G(k)\}$ la caractéristique du ξ-tournoi G près de la notation normale de ses sommets $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(n = 2k + 1)$. Les valeurs de la fonction $\varphi_G(x)$ pour les x qui n'appartiennent pas dans $\{1, 2, \ldots, k\} = K$ sont définies à l'aide de la caractéristique univoque de la manière suivante:* (1) $[x \equiv 0 \pmod{n}] \Rightarrow [\varphi_G(x) = 0]$; (2) $[x \equiv z \pmod{n};\ z \in K] \Rightarrow [\varphi_G(x) = \varphi_G(z)]$; (3) $[x \equiv -z \pmod{n};\ z \in K] \Rightarrow [\varphi_G(x) = -\varphi_G(z)]$.

Nous appelerons la fonction φ_G du lemme 5, qui est définie à l'aide de la caractéristique du ξ-tournoi G sur l'ensemble de tous les nombres entiers une caractéristique élargie du ξ-tournoi G près de la notation S. Nous dirons des nombres $\varphi_G(x)$, $\varphi_G(x + 1)$ qu'ils forment un μ-couple (resp. un ν-couple) dans la caractéristique élargie du ξ-tournoi G si et seulement si $\varphi_G(x) = 1$, $\varphi_G(x + 1) = -1$ (resp. si $\varphi_G(x) = -1$, $\varphi_G(x + 1) = 1$).

Lemme 6. *Chaque ξ-tournoi a pour chaque notation normale de ses sommets exactement une caractéristique. Soit $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ une séquence des éléments de $\{-1, 1\}$. Il existe alors un tel ξ-tournoi G avec $2k + 1$ sommets que, près d'une certaine notation normale de ses sommets, f est sa caractéristique et chaque ξ-tournoi avec la caractéristique f est isomorphe avec G.*

Démonstration. La validité de la première affirmation du lemme est claire. Soit $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ une séquence donnée des éléments de $\{-1, 1\}$. Nous allons construire le ξ-tournoi G avec les sommets $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} = S$ $(n = 2k + 1)$ comme il suit: G contient l'arête $\overrightarrow{s_x s_y}$ si et seulement si $f_z = 1$; $y - x \equiv z \pmod{n}$ et $z \in \{1, 2, \ldots, k\} = K$ or si $f_z = -1$; $y - x \equiv -z \pmod{n}$

$z \in K$. Il s'ensuit, de la construction du graphe G et des lemmes 2,5, que G est un ξ-tournoi. Si nous posons $\varphi_G(x) = f_x$, alors $\varphi_G(S)$ est la caractéristique du G près de la notation normale S. Il est clair, que chaque ξ-tournoi avec les propriétés exigées doit être isomorphe avec G.

Lemme 7. *Soit G un ξ-tournoi, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(n = 2k + 1)$ est une certaine notation normale de ses sommets et $\varphi_G(S) = \{\varphi_G(1), \varphi_G(2), \ldots, \varphi_G(k)\}$ sa caractéristique près de S. Soit $a = \overrightarrow{s_n s_r}$ une arête de G. Il vaut alors: $\tau_G(a)$ est le nombre de tels couples orientés $\{\varphi_G(j), \varphi_G(j + r)\}$ des valeurs de la caractéristique élargie de G qui ont les propriétés suivantes:* (1) $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; (2) $\varphi_G(j) = 1$; (3) $\varphi_G(j + r) = -1$.

Démonstration. Soit s_j un sommet quelconque de G; $s_j \notin \{s_n, s_r\}$. Les sommets s_n, s_j, s_r forment l'ensemble des sommets du 3-cycle dans G si et seulement si G contient celles deux arêtes $\overrightarrow{s_r s_j}$, $\overrightarrow{s_j s_n}$, c'est à dire si $\varphi_G(j) = 1$ et $\varphi_G(j + r) = -1$. De là découle la validité du lemme.

Théorème 3. *Soit G un ξ-tournoi avec la notation normale de ses sommets $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(n = 2k + 1)$ et avec la caractéristique $\varphi_G(S)$ et soit $a = \overrightarrow{s_n s_r}$ une de ses arêtes. Si n, r sont de tels nombres que leur le plus grand diviseur commun est* 1, *il vaut*: $\tau_G(a) = 1 + \zeta_r$, *où ζ_r est le nombre des changements de signes dans la séquence $F_G(r) = \{\varphi_G(r), \varphi_G(2r), \ldots, \varphi_G(kr)\}$.*

Démonstration. Soient r, n de tels nombres que leur le plus grand diviseur commun est 1. Définissons la notation $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ des sommets de G comme il suit: $w_i = s_{ir}$ pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $([s_x = s_y] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [x \equiv y \pmod{n}])$. D'après le lemme 4, W est une notation normale. D'après le lemme 6, il existe exactement une caractéristique $\eta_G(W)$ de G près de W où il est valable: $\eta_G(x) = \varphi_G(rx)$. Pour pouver la validité du théorème, il suffit de prouver qu'il vaut $\tau_G(a) = 1 + \xi_r$, où $a = \overrightarrow{s_n s_r} = \overrightarrow{w_n w_1}$ et où ζ_r est le nombre des changements de signes dans la caractéristique $F_G(r) = \eta_G(W) =$ $= \{\eta_G(1), \eta_G(2), \ldots, \eta_G(k)\}$. Pour simplifier les choses nous introduisons les notations suivantes des séquences:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\eta_G(1), \eta_G(2), \ldots, \eta_G(k)\}, \\ E_2 &= \{\eta_G(k + 1), \eta_G(k + 2), \ldots, \eta_G(2k)\}, \\ E_3 &= \{\eta_G(1), \eta_G(2), \ldots, \eta_G(2k)\}, \\ E_4 &= \{\eta_G(1), \eta_G(2), \ldots, \eta_G(n), \eta_G(1)\}. \end{aligned}$$

Le nombre des μ-couples (resp. des ν-couples dans E_i nous designerous par $\mu(E_i)$ (resp. $\nu(E_i)$).

D'après le lemme 7 il vaut: $\tau_G(a) = \mu(E_4)$. Il est valable aussi $\eta_G(1) = 1$ et parce que $\eta_G(n) = 0$; $\eta_G(2k) = -\eta_G(1) = -1$, il vaut alors $\mu(E_3) = \mu(E_4)$, $\nu(E)_3 = \nu(E_4)$. Nous distinguons deux cas: Le premier cas: $\eta_G(k) = 1$ et le deuxième cas: $\eta_G(k) = -1$. Dans le premier cas le nombre des changements des signes ζ_r dans E_1 est pair. Il s'ensuit $\mu(E_1) = \nu(E_1) = \frac{1}{2}\zeta_r$ (parcequ'à chaque μ-couple et aussi à chaque ν-couple — et seulement a tels couples — corresponde le changement de signes et les changements $+\ -$; $-+$ alternent). Parceque $\eta_G(n-j) = -\eta_G(j)$, il vaut: $\mu(E_2) = \mu(E_1) = \frac{1}{2}\zeta_r$. En dehors des μ-couples de E_1 et de E_2 la séquence E_3 contient un seul μ-couple et c'est $\{\eta_G(k), \eta_G(k+1)\}$. A cause de cela $\tau_G(a) = \mu(E_3) = 1 + \zeta_r$.

Dans le deuxième cas ζ_r est impair et il est valable: $\mu(E_1) = 1 + \nu(E_1)$; $\mu(E_1) + \nu(E_1) = \zeta_r$. Il s'ensuit $\mu(E_1) = \frac{1}{2}(\zeta_r + 1)$. Pour les mêmes raisons que dans le premier cas il est $\mu(E_3) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ (parceque $\{\eta_G(k), \eta_G(k+1)\}$ est un ν-couple) il s'ensuit ceci: $\tau_G(a) = \mu(E_3) = 1 + \zeta_r$. Dans tous les deux cas il vaut: $\tau_G(a) = 1 + \zeta_r$ et parcequ'un autre cas n'est pas possible, la validité du théorème est prouvée.

Remarque 2. Le théorème 3 rend possible de déterminer aisément, par la caractéristique du ξ-tournoi avec $n = 2k + 1$ sommets, les valeurs $\tau_G(a)$ pour chaque arête a de G dans le cas où n est un nombre premier. Dans ce cas pour chaque $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ le plus grand diviseur commun avec n est 1. Les arêtes $\overrightarrow{s_n s_r}$, $\overrightarrow{s_1 s_{1+r}}$, $\ldots$, $\overrightarrow{s_{n-1} s_{n-1+r}}$ forment un cycle hamiltonien et τ_G a pour toutes les arêtes de ce cycle une valeur égale (voir le lemme 2). Parceque $\omega_G(s_n) = k$ (voir le lemme 2), on peut décomposer G en k cycles hamiltoniens de sorte que dans chacun toutes les arêtes ont la même valeur τ_G. Pour déterminer toutes les valeurs τ_G il suffit alors de constater le nombre des chaqgements de signes dans k séquences avec k éléments.

Lemme 8. *Soit G un ξ-tournoi et soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(n = 2k + 1)$ une notation normale de ses sommets. Soit i un nombre quelconque de $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ et a l'arête incidente avec les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1+i}. Si certain 3-cycle de G contient les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1-j}, s_{k+1+i}, il existe alors dans G un 3-cycle contenant les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1+j}, s_{k1+i}. Le nombre $\tau_G(a)$ est impair exactement quand il existe dans G un cycle avec les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1}, s_{k+1+i}.*

Démonstration. Supposons que $a = \overrightarrow{s_{k+1-i} s_{k+1+i}}$. S'il existe dans G un 3-cycle avec les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1-j}, s_{k+1+i}, cela signifie que G contient aussi $\overrightarrow{s_{k+1-j} s_{k+1-i}}$, $\overrightarrow{s_{k+1+i} s_{k+1-j}}$. D'après le lemme 2 il s'ensuit que G contient aussi les arêtes $\overrightarrow{s_{k+1-j+x} s_{k+1-i+x}}$, $\overrightarrow{s_{k+1+i+x} s_{k+1-j+x}}$, où x est un nombre entier quelconque. Si nous posons $x = i + j$, et puis $x = j - i$ nous en obtenons tout de suite que G contient un 3-cycle avec les sommets s_{k+1-i}, s_{k+1+j}, s_{k+1+i}. Pour chaque 3-cycle dans lequel $j \in K$ il existe un autre 3-cycle contenant l'arête a. Si un pareil 3-cycle existe pour $j = 0$, alors $\tau_G(a)$ est impair. Donc si $a = \overrightarrow{s_{k+1-i} s_{k+1+i}}$, le lemme est valable. On peut prouver de la même façon la validité du lemme aussi pour le cas $a = \overrightarrow{s_{k+1+i} s_{k+1-i}}$.

Lemme 9. *Soit G un ξ-tournoi avec nr sommets $(n > 1)$ et soit* $\{s_1, s_2, \ldots, s_{nr}\}$

une notation normale de ses sommets, alors son soustournoi F contenant tous les sommets de $S = \{s_r, s_{2r}, \ldots, s_{kr}\}$ est un ξ-tournoi et S une notation normale de ses sommets. Pour chaque arête $a \in F$ il vaut $\tau_F(a) \equiv \tau_G(a)$ (mod 2).

Démonstration. La validité du lemme découle directement des lemmes 2 et 8.

Théorème 4. *Soit G un ξ-tournoi avec n sommets. Si n est divisible par un nombre de la forme $8p$-3 (où p est un certain nombre entier naturel), alors G contient l'arête qui appartient au nombre impair des 3-cycles de G et G contient aussi l'arête appartenant au nombre pair de ses 3-cycles.*

Démonstration. Soit n divisible par le nombre $q = 8p - 3$, $n = qr$ (p, r sont des entiers naturels). Soit $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{qr}\}$ une notation normale des sommets de G. Soit F le soustournoi du tournoi G contenant tous les sommets et seulement les sommets de $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$, où $s_i = w_{ir}$. D'après le lemme 8F est un ξ-tournoi avec $q = 8p - 3$ sommets et S est une notation normale de ses sommets. D'après le lemme 1 est valable ceci: $\tau_F(s_1) = $ $= \binom{4p-1}{2} = (2p-1)(4p-1)$. Ce nombre est la somme des nombres $\tau_G(a)$ pour toutes les arêtes $a = \overrightarrow{xs_1}$. Le nombre des membres de cette somme est $\pi_F(s_1) = 4p - 2$, alors le nombre pair. Un nombre pair des membres de la somme des nombres qui sont tous pairsor tous impairs ne peut pas donner un nombre impair $(2p-1)(4p-1)$. Il s'ensuit que F contient une arête avec τ_F impair et aussi une arête avec τ_F pair. D'après le lemme 9 G contient une arête avec τ_G impair et aussi une arête avec τ_G pair, q.e.d.

Remarque 3. Par la démonstration du théorème 4 on a prové plus que ne contient l'affirmation du théorème et notamment ceci: vers un sommet quelconque de G (et aussi de ce sommet) se dirigent deux arêtes a, b telles que $\tau_G(a) \equiv 1 + \tau_G(b)$ (mod 2).

Théorème 5. *Soit G un ξ-tournoi, soit S une notation normale de ses sommets et $\varphi_G(S)$ soit sa caractéristique élargie près de S. Si $\tau_G(a)$ est un nombre pair pour toutes les arêtes $a \in G$, il vaut alors: $\varphi_G(2^k) = \varphi_G(1)$ pour tous les k entiers naturels et, si $\tau_G(a)$ est un nombre impair pour chaque arête $a \in G$, il vaut $\varphi_G(2^k) = $ $= (-1)^k \varphi_G(1)$ pour tous les k entiers naturels.*

Démonstration. Le théorème découle directement du lemme 8.

Théorème 6. *Soit G un ξ-tournoi avec n sommets. Si pour certain k entier naturel les nombres n et $m = 4^k + 1$ ont un diviseur commun d plus grand que 1, alors G contient deux arêtes a, b telles que $\tau_G(a) \equiv 1 + \tau_G(b)$* (mod 2).

Démonstration. D'après le théorème 5 il vaut: $[\tau_G(x) \equiv \tau_G(y)$ (mod 2), pour toutes les deux arêtes $x, y \in G] \Rightarrow [\varphi_G(4^q) = \varphi_G(1)$ pour chaque q entier naturel$]$. Soit $d > 1$ le diviseur commun de m, n. Parceque $4^q \equiv -1$ (mod d)

chaque ξ-tournoi X avec d sommets doit contenir deux arêtes e, f telles pour lesquelles $\tau_X(e) \equiv 1 + \tau_X(f) \pmod 2$ (parcequ'autrement il vaudrait $\varphi_X(4^q) = \varphi_X(-1) = -\varphi_X(1)$, ce qui est en contrediction avec ce qui est mentionné ci-dessus). Parceque d est un diviseur de n et G contient n sommets, G doit — d'après le lemme 9 — contenir deux arêtes a, b telles, que $\tau_G(a) \equiv 1 + \tau_G(b) \pmod 2$. Cela prouve le théorème.

Théorème 7. *Soit p un nombre premier de la forme $4k - 1$. Soit $P = \{1, 2, \ldots, p - 1\}$ et soit Q l'ensemble de tous les restes des carrés des éléments de P modulo p. Définissons la fonction λ sur l'ensemble de tous les nombres entiers non divisibles par p à valeur dans $\{-1, 1\}$ comme il suit:* $[\lambda(x) = 1] \Leftrightarrow [x \equiv q \pmod p; q \in Q]$. *Il vaut:*

(1) $|Q| = 2k - 1$ *et chaque nombre de Q se rencontre parmi les restes modulo p dans la séquence $R = \{1^2, 2^2, \ldots, (2k - 1)^2\}$ une fois;*

(2) *soient $x, y \in P$, alors:* $[\lambda(x) = 1] \Leftrightarrow [\lambda(p - x) = -1]$; $\lambda(xy) = \lambda(x) . \lambda(y)$;

(3) *soit $r \in P$; dans la séquence $\{\lambda(r), \lambda(2r), \ldots, \lambda(2kr - r)\}$ il y a $\zeta_r = k - 1$ changements de signes.*

Démonstration. Nous savons (voir [6], affirmation 7, p. 69) que chaque modul qui est un nombre premier impair a exactement $\frac{1}{2}(p - 1)$ différents restes des carrés des éléments de P. Nous obtiendrons tous ces restes, si nous déterminons les restes modulo p pour les éléments de la séquence $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. De cela, la validité de l'affirmation (1) est claire.

Affirmation (4): *Si u, v sont des éléments de P, alors $u^2 + v^2 \not\equiv 0 \pmod p$.* Nous prouvons (indirectement) la validité de cette affirmation. Supposons, que pour certains $u, v \in P$ il est valable $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod p$. Alors $z = u^2 + v^2$ est un nombre entier naturel divisible par p. On sait (voir [6], affirmation 13, p. 80) qu'il vaut: La condition nécessaire et suffisante pour que le nombre naturel n soit la somme de deux carrés est que chaque nombre premier de la forme $4t - 1$ a une pussance paire dans sa décomposition en facteurs premiers. D'après la supposition $p \equiv -1 \pmod 4$ et alors $[z \equiv 0 \pmod p] \Rightarrow [z \equiv 0 \pmod{p^2}]$. Cela n'est pas possible, car si $0 < u$; $0 < v$; $u < \frac{1}{2}p$; $v < \frac{1}{2}p$; alors: $0 < u^2 + v^2 < \frac{1}{2}p^2$, ce qui est une contradiction. Si $u > \frac{1}{2}p$, posons $w = p - u$. Alors $w < \frac{1}{2}p$; $w^2 + v^2 = p^2 - 2pu + u^2 + v^2 \equiv u^2 + v^2 \pmod p$ et alors au lieu de u nous pouvons considérer w. De même façon si $v > \frac{1}{2}p$. Dans tous les cas nous obtenons une contradiction. La validité de l'affirmation (4) est prouvée.

De (4) découle tout de suite ceci: $[\lambda(x) = 1] \Rightarrow [\lambda(p - x) = -1]$ et parceque Q contient exactement la moitié des nombres de P, il est naturellement valable aussi ceci: $[\lambda(x) = 1] \Leftrightarrow [\lambda(p - x) = -1]$. Donc soit x soit $-x$ est un reste du carré d'un élément de P modulo p. Autrement dit: pour tous les deux nombres $x, y \in P$ ils existent des nombres entiers a, b, m, n de façon qu'il est valable: $a^2 = mp + x \,.\, \lambda(x)$; $b^2 = np + y \,.\, \lambda(y)$. C'est à dire $(ab)^2 = p[mnp + nx \,.\, \lambda(x) + my \,.\, \lambda(y) + xy \,.\, \lambda(x) \,.\, \lambda(y)]$, d'où il suit $\lambda(xy) = \lambda(x) \,.\, \lambda(y)$. La validité de l'affirmation (2) est prouvée.

Nous finissons maintenant la démonstration du théorème. De l'équation $\lambda(xy) = \lambda(x) \,.\, \lambda(y)$ il s'ensuit immédiatement ceci: $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_{p-1}$. Donc il suffit de prouver que $k - 1$ est le nombre des changements de signes dans la séquence $L = \{\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(2k - 1)\}$.

Soit G un graphe orienté avec les sommets de $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ qui est construit de la façon suivante: Pour tous les deux sommets $s_i, s_j \in S$ il vaut: $[G$ contient l'arête $\overrightarrow{s_i s_j}] \Leftrightarrow [\lambda(j - i) = 1]$. Alors: G contient soit l'arête $\overrightarrow{s_i s_j}$, soit l'arête $\overleftarrow{s_i s_j}$. Donc G est un tournoi. Il découle directement de la construction du tournoi G: $[G$ contient l'arête $\overrightarrow{s_u s_v}] \Rightarrow [G$ contient l'arête $\overrightarrow{s_{u+1} s_{v+1}}]$; c'est à dire G est un ξ-tournoi et S est la notation normale de ses sommets. Il est clair que G contient l'arête $a = \overrightarrow{s_p s_1}$ (parceque $\lambda(1 - p) = \lambda(1) = 1$). De la construction du ξ-tournoi G il résulte aussi que L est sa charactéristique. D'après le théorème 3 il vaut: $\tau_G(a) = 1 + \zeta_1$ et alors $\tau_G(h) = 1 + \zeta_1$ pour chaque arête $h \in G$. Du lemme 1 il résulte toute de suite que $\zeta_1 = \zeta_r = k - 1$; q.e.d.

Du théorème 7 et de sa démonstration découle la validité du théorème suivant:

Théorème 8. *Pour chaque nombre premier p de la forme $4k - 1 = p$ il existe un tel ξ-tournoi G avec p sommets que pour chaque arête $h \in G$ il est valable: $\tau_G(h) = k$.*

Remarque 4. Jusqu'ici nous ne connaissons pas un seul cas d'un ξ-tournoi avec des 3-cycles régulièrement placés dont le nombre des sommets ne serait pas un nombre premier (il faut que cela soit un nombre de la forme $4k - 1$; voir le théorème 2). La démonstration, de ce que le nombre des sommets d'un pareil ξ-tournoi doit être un nombre premier, n'est pas connue. La matrice carrée suivante est une matrice associée au tournoi avec des 3-cycles régulièrement placés pour le cas $k = 4$. C'est clair qu'il n'est pas un ξ-tournoi (voir théorème 4).

$$
\left\|\begin{matrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right\| .
$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

[2] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

[3] Kotzig A., *Des cycles dans les tournois*, Théorie des graphes (Journées internationales d'étude — Rome juillet 1966), Paris—New York 1967.

[4] Kotzig A., *Sur le nombre des 4-cycles dans un tournoi*, Mat. časop. *18* (1968), 247—254.

[5] Kotzig A., *Cycles in a complete graph oriented in equilibrium*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 175—182.

[6] Sierpiňski W., *Teoria liczb*, Warszawa—Wroclaw 1950.

Reçu le 27 février 1967.

Katedra matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava