Jaroslav Krbiľa

Algebraická štruktúra množiny hlavných hyperbolických fáz diferenciálnych rovníc $y'' = q(t)y$ v intervale $(-\infty, \infty)$

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 3, 195--204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127074

Matematický časopis 20 (1970), No. 3

ALGEBRAICKÁ ŠTRUKTÚRA MNOŽINY HLAVNÝCH HYPERBOLICKÝCH FÁZ DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC $y'' = q(t)y$ V INTERVALE $(-\infty, \infty)$

JAROSLAV KRBIĽA, Žilina

Akademik O. Borůvka v knihe [1] str. 97 vyšetruje algebraickú štruktúru množiny všetkých prvých fáz lineárnych homogénnych oscilatorických diferenciálnych rovníc Jacobiho tvaru v intervale $(-\infty, \infty)$. V tejto práci ukážeme algebraickú štruktúru množiny z obidvoch strán neohraničených prvých hyperbolických fáz neoscilatorických diferenciálnych rovníc typu (1) v intervale $(-\infty, \infty)$, ktoré sú tiež Jacobiho tvaru.

Poznamenávame, že diferenciálnu rovnicu $y'' = q(t)y$ nazývame neoscilatorickou, resp. neoscilatorickou typu (m) $(m \geqq 1$, celé), v intervale J, ak jej integrály majú v intervale J konečne mnoho, resp. m, ale nie $m + 1$, nulových bodov.

Skutočnosť, že nejaká funkcia $f(t)$ je spojitá aj so svojimi deriváciami, včítane radu k, na nejakom intervale $j = (a, b)$ budeme označovať nasledovne $f(t) \in C_k(j)$. V prípade, že interval $j = (-\infty, \infty)$ budeme písať $f(t) \in C_k$.

Majme neoscilatorickú diferenciálnu rovnicu:

$$(q) \qquad y'' = q(t)y, \quad q(t) \in C_0(I),$$

kde I je nejaký otvorený interval (a, b), ktorého koncové body a, b môžu byť aj $-\infty$, ∞. Nech funkcie $u(t)$, $v(t) \in C_2(I)$ sú nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (q), to znamená, že ich Wronskián $w = uv' - u'v \neq 0$. V práci [3] je za predpokladu, že riešenia $u(t)$, $v(t)$ v intervale $i \subset I$ spĺňajú nerovnosť $|u(t)| < |v(t)|$, definovaná v intervale i *prvá hyperbolická fáza* $\alpha(t)$, bázy (u, v), pomocou hyperbolického tangensu, vzťahom: $\operatorname{tgh} \alpha(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$. V ďalšom, kvôli stručnosti, budeme niekedy prívlastok prvá hyperbolická vynechávať. Tam je tiež dokázané, že fáza $\alpha(t)$ má vlastnosť:

$$(\alpha) \qquad \alpha(t) \in C_3(i),\ \alpha'(t) \neq 0 \text{ pre všetky } t \in i$$

a že pre všetky $t \in i$ vyhovuje nelineárnej diferenciálnej rovnici

$$(1, q) \qquad -\{\alpha, t\} + \alpha'^2 = q(t),$$

kde symbol $\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2$, je *Schwarzova derivácia* funkcie α v bode t.

Výpočtom sa môžeme ľahko presvedčiť, že pre každé $t \in i$ platí vzťah: $\{\operatorname{tgh} \alpha, t\} = \{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$, použitím ktorého môžeme rovnicu $(1, q)$ zapísať kratšie takto:

$$(1) \qquad q(t) = -\{\operatorname{tgh} \alpha, t\}.$$

Vidíme, že platí:

Veta 1. *Fázou $\alpha(t)$ je koeficient $q(t)$ diferenciálnej rovnice (q) jednoznačne určený v zmysle vzorca $(1, q)$, resp. (1).*

V ďalšom budeme koeficient diferenciálnej rovnice (q), určený podľa vzorca (1), resp. $(1, q)$ nazývať *hyperbolickým nosičom* diferenciálnej rovnice (q), prípadne len nosičom rovnice (q) a označovať q_α.

V knihe [1] je na str. 5 a 6 dokázané o Schwarzových deriváciách nasledujúce tvrdenie, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Lema. *Schwarzove derivácie $\{X, t\}$, $\{Y, t\}$ funkcií $X, Y \in C_3(j)$ sú práve vtedy identické, keď X a Y sú v projektívnej relácii:*

$$Y(t) = \frac{c_{11}X(t) + c_{12}}{c_{21}X(t) + c_{22}}, \quad t \in j;$$

c_{ik}, $i, k = 1, 2$ sú konštanty.

Nech (u, v), $(\bar{u}, \bar{v})$ sú dve rôzne bázy diferenciálnej rovnice (q), ktoré spĺňajú v intervale i nerovnosti $|u| < |v|$, $|\bar{u}| < |\bar{v}|$. Otázkou existencie takýchto báz, ako aj vzťahom intervalov i, I sa zaoberá práca [4]. Označme Wronskiány uvedených báz po rade w, $\bar{w}$ a fázy tých báz, definované v intervale i, po rade α, $\bar{\alpha}$. Nech c_{ik} $i, k = 1, 2$ sú konštanty, z ktorých determinant $\Delta = |c_{ik}| \neq 0$. O vzťahu fáz α, $\bar{\alpha}$ hovorí nasledujúca veta.

Veta 2. *V intervale i zo vzťahov*

$$(2) \qquad \bar{u} = c_{11}u + c_{12}v, \quad \bar{v} = c_{21}u + c_{22}v$$

vyplýva vzťah:

$$(3) \qquad \operatorname{tgh} \bar{\alpha} = \frac{c_{11} \operatorname{tgh} \alpha + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tgh} \alpha + c_{22}}$$

a obrátene, zo vzťahu (3) vyplýva, že:

$$(4) \qquad \bar{u} = \pm \sqrt{\frac{\bar{w}}{\Delta w}}\,(c_{11}u + c_{12}v), \quad \bar{v} = \pm \sqrt{\frac{\bar{w}}{\Delta w}}\,(c_{21}u + c_{22}v).$$

Dôkaz. Na základe definície fázy α, $\bar{\alpha}$ zo vzťahov (2) dostávame

$$\operatorname{tgh} \bar{\alpha} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{c_{11}u + c_{12}v}{c_{21}u + c_{22}v} = \frac{c_{11} \operatorname{tgh} \alpha + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tgh} \alpha + c_{22}},$$

t. j. vzťah (3). Druhú časť tvrdenia dostaneme zo vzťahu, ktorý dostaneme podľa definície fáz α, $\bar{\alpha}$ z (3): $\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{c_{11}u + c_{12}v}{c_{21}u + c_{22}v}$ a z jeho derivácie $\left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}}\right)' = \frac{-\bar{w}}{\bar{v}^2}$, vezmúc do úvahy súvis medzi Wronskiánmi $\bar{w} = \Delta w$:

$$\frac{\bar{w}}{\bar{v}^2} = \frac{\Delta w}{(c_{21}u + c_{22}v)^2}.$$

Ľahko nahliadneme, že platia tieto dôsledky:

Dôsledok 1. *Ak α je fáza bázy (u, v) a k ľubovoľné číslo, tak $\alpha + k$ je fázou bázy $(\bar{u}, \bar{v})$, určenej nasledovne:*

$$\bar{u} = u \cosh k + v \sinh k, \quad \bar{v} = u \sinh k + v \cosh k.$$

Dôsledok 2. *Dve fázy α, $\bar{\alpha}$ diferenciálnej rovnice (q) súvisia podľa vzorca* (3) *a obrátene, ak α je fáza diferenciálnej rovnice (q) a funkcia $\bar{\alpha}$ splňuje vzťah* (3), *tak je tiež fázou diferenciálnej rovnice (q).*

V ďalšom fázou rovnice (q) budeme rozumieť fázu niektorej bázy diferenciálnej rovnice (q) a *fázovou funkciou* definovanou v intervale i budeme rozumieť funkciu $\alpha(t)$ s vlastnosťou (α).

Veta 3. *Každá fázová funkcia $\alpha(t)$, definovaná v intervale i, je v ňom prvou hyperbolickou fázou diferenciálnej rovnice (q) s nosičom $q_\alpha = -\{\operatorname{tgh} \alpha, t\}$, bázy:*

$$(5) \qquad u(t) = \frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \quad v(t) = \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}.$$

Dôkaz. Nech $\alpha(t)$ je fázová funkcia definovaná v intervale i. Dosadením funkcie $u(t)$, $v(t)$, danej vzorcom v (5), do rovnice (q), pričom $q(t) = -\{\operatorname{tgh} \alpha, t\}$ sa ľahko presvedčíme, že je jej riešením. Nezávislosť riešení $u(t)$, $v(t)$ je zrejmá, teda ide o bázu. Vzhľadom na to, že v intervale i platí $|u(t)| < |v(t)|$ dostávame $\operatorname{tgh} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, t. j. fázová funkcia $\alpha(t)$ je fázou uvedenej diferenciálnej rovnice (q).

Dôsledok. *Množina všetkých hyperbolických nosičov $\mathscr{M}$, definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, má mohutnosť kontinua.*

Dôkaz: Nech $\mathscr{N}$ je množina všetkých funkcií $f(t) \in C_0$. Vieme, že card $\mathscr{N} = \aleph$ a pretože $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$, tak platí card $\mathscr{M} \leqq \aleph$. Voľbou fázovej funkcie $\alpha(t) = kt + l$, pričom k, l sú ľubovoľné reálne čísla, $k \neq 0$, dostaneme podľa vety 3 množinu $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}$ konštantných hyperbolických nosičov $q(t) = k^2$ a teda card $\mathscr{M} \geqq \aleph$. Z dokázaných nerovností máme card $\mathscr{M} = \aleph$.

V práci [5] je dokázaná existencia z obidvoch strán neohraničených prvých hyperbolických fáz, definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, diferenciálnej rovnice (q), ktoré nazývame *hlavnými fázami*. Je zrejmé, že každá hlavná fáza, definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$, je z obidvoch strán neohraničenou fázovou funkciou, definovanou v intervale $(-\infty, \infty)$ a z vety 3 dostávame obrátené tvrdenie, že každá z obidvoch strán neohraničená fázová funkcia, definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$, je hlavnou fázou, definovanou v intervale $(-\infty, \infty)$, diferenciálnej rovnice (q) s nosičom $q_\alpha = -\{\operatorname{tgh} \alpha, t\}$. Vzhľadom na to hovoríme v ďalšom o hlavných fázach, definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, namiesto o fázových funkciách neohraničených z obidvoch strán, definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$.

Vyšetrujme algebraickú štruktúru množiny hlavných fáz diferenciálnych rovníc (q), definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, ktorú množinu označme $\mathscr{G}$. Medzi prvkami množiny $\mathscr{G}$ definujme operáciu, ktorá každým dvom fázam $\alpha, \gamma \in \mathscr{G}$ priradí ako súčin v tomto poradí zloženú funkciu $\alpha[\gamma(t)]$, ktorú budeme označovať $\alpha\gamma$. Zrejme $\alpha\gamma \in \mathscr{G}$. Pretože ide o operáciu asociatívnu, s jednotkovým prvkom, ktorý označme $\alpha_0(t) = t \in \mathscr{G}$ a ku každému prvku $\alpha \in \mathscr{G}$ existuje v množine $\mathscr{G}$ inverzný prvok α^{-1}, ktorým je inverzná funkcia $\alpha_{-1}(t)$. Zistili sme, že platí:

Veta 4. *Množina hlavných fáz $\mathscr{G}$ diferenciálnych rovníc (q), definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, s operáciou tvorenia zloženej funkcie je grupou.*

Uvedenú grupu $\mathscr{G}$ nazývame *grupou hlavných fáz.*

Veta 5. *Množina všetkých rastúcich fáz $\mathscr{K}$ grupy $\mathscr{G}$ je invariantnou podgrupou grupy $\mathscr{G}$ s indexom 2.*

Dôkaz. S ľubovoľnými prvkami $\alpha, \gamma \in \mathscr{K}$ aj $\alpha\gamma \in \mathscr{K}$ a ak $\alpha \in \mathscr{K}$, tak aj $\alpha^{-1} \in \mathscr{K}$. Ide teda o podgrupu. Jej index je 2, pretože ak $\alpha \in \mathscr{G}$, tak $\alpha\mathscr{K}$ je buď množinou rastúcich, alebo množinou klesajúcich fáz, podľa toho či α je rastúca, alebo klesajúca fáza. Zostáva ešte ukázať, že pre ľubovoľné $\alpha \in \mathscr{G}$ platí $\alpha\mathscr{K} = \mathscr{K}\alpha$, ale to je evidentné.

Dôsledok. *Faktorgrupa $\mathscr{G}/\mathscr{K}$ sa skladá z dvoch prvkov a to z podgrupy všetkých rastúcich fáz $\mathscr{K}$ a z množiny všetkých klesajúcich fáz.*

Nech α, γ sú hlavné fázy diferenciálnej rovnice (q). Z dôsledku 2 vety 2 a z neohraničenosti hlavných fáz dostaneme, že súvisia nasledovne:

$$\operatorname{tgh} \gamma(t) = \varepsilon \frac{c_1 \operatorname{tgh} \alpha(t) + c_2}{c_2 \operatorname{tgh} \alpha(t) + c_1}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{6}$$

pričom c_1, c_2 sú vhodné konštanty také, že platí nerovnosť $|c_1| > |c_2|$.

Veta 6. *Vzťah* (6) *je na množine* $\mathscr{G}$ *ekvivalenciou.*

Dôkaz. Reflexívnosť zistíme voľbou $c_1 = 1$, resp. $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ podľa toho, či $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$. Symetriu máme zo vzťahu, ktorý dostaneme zo vzťahu (6):

$$\operatorname{tgh} \alpha(t) = \varepsilon \frac{-c_1 \operatorname{tgh} \gamma(t) + \varepsilon c_2}{\varepsilon c_2 \operatorname{tgh} \gamma(t) - c_1}.$$

Treba ešte dokázať tranzitívnosť. Nech α, γ, $\delta \in \mathscr{G}$ a nech platí vzťah (6) a vzťah

$$\operatorname{tgh} \alpha(t) = \varepsilon_1 \frac{k_1 \operatorname{tgh} \delta(t) + k_2}{k_2 \operatorname{tgh} \delta(t) + k_1}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1,$$

kde k_1, k_2 majú analogický význam, ako c_1, c_2 vo vzťahu (6). Z uvedených vzťahov dostaneme

$$\operatorname{tgh} \gamma(t) = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{d_1 \operatorname{tgh} \delta(t) + d_2}{d_2 \operatorname{tgh} \delta(t) + d_1},$$

kde $d_1 = c_1k_1 + \varepsilon_1c_2k_2$, $d_2 = c_1k_2 + \varepsilon_1c_2k_1$, ľahko zistíme, že platí nerovnosť $|d_1| > |d_2|$ a tým je dôkaz ukončený.

Uvedená ekvivalencia, označme ju $\mathscr{R}$, určuje *rozklad grupy* $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$. Každý prvok toho rozkladu sa skladá z hlavných fáz, z ktorých každé dve sú ekvivalentné a žiadne dve fázy patriace do rôznych prvkov rozkladu túto vlastnosť nemajú.

Veta 7. *Každý prvok rozkladu grupy* $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$ *sa skladá zo všetkých hlavných hyperbolických fáz práve jednej diferenciálnej rovnice* (q).

Dôkaz. Majme z obidvoch strán neohraničené fázové funkcie α, γ. Podľa vety 3 sú hlavnými fázami diferenciálnych rovníc, ktorých nosiče, skonštruované podľa vzorca (1), označme q_α, q_γ. Predpokladajme, že α a γ patria do jednej triedy rozkladu grupy $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$, t. j. že platí vzťah (6). Na základe tvrdenia lemy dostaneme:

$$q_\gamma = -\{\operatorname{tgh} \gamma, t\} = -\left\{\frac{\varepsilon c_1 \operatorname{tgh} \alpha + \varepsilon c_2}{c_2 \operatorname{tgh} \alpha + c_1}, t\right\} = -\{\operatorname{tgh} \alpha, t\} = q_\alpha$$

teda $q_\gamma = q_\alpha$. Obrátene nech α, γ sú hlavné fázy diferenciálnej rovnice s nosičom $q(t)$. Potom podľa dôsledku 2 vety 2 platí vzťah (6), a teda fázy α, γ sú ekvivalentné, to znamená patria do jednej a tej istej triedy.

Označme $\mathscr{F}$ tú triedu rozkladu grupy $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$, ktorá obsahuje jednotku grupy $\mathscr{G}$. Je to množina fáz $\zeta(t)$, ktoré sú ekvivalentné s $\alpha_0(t) = t$. Fázy $\zeta(t)$ sú určené vzorcom:

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tgh} \zeta(t) = \frac{\varepsilon c_1 \operatorname{tgh} t + \varepsilon c_2}{c_2 \operatorname{tgh} t + c_1}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

kde c_1, c_2 majú význam ako vo vzťahu (6).

Veta 8. *Množina $\mathscr{F}$ prvkov grupy $\mathscr{G}$ ekvivalentných s jednotkou grupy $\mathscr{G}$ je podgrupou grupy $\mathscr{G}$.*

Dôkaz: Nech $\zeta, \zeta_1 \in \mathscr{F}$. Zo vzorca (7), ak dosadíme namiesto t fázu $\zeta_1(t)$ dostaneme, že fáza $\zeta\zeta_1 \in \mathscr{F}$ a dosadiac do vzorca (7) za t fázu $\zeta_{-1}(t)$ dostaneme vzťah, z ktorého vidíme, že $\zeta^{-1} \in \mathscr{F}$ a dôkaz je hotový.

Podgrupu $\mathscr{F}$ nazývame *fundamentálnou podgrupou* grupy $\mathscr{G}$.

Z algebry je známe ([2] str. 107), že prienik dvoch podgrúp je podgrupa. Na základe toho máme podgrupu $\mathscr{F} \cap \mathscr{K}$ grupy $\mathscr{G}$.

Rozklad grupy $\mathscr{G}$ na pravé triedy, vytvorený fundamentárnou podgrupou $\mathscr{F}$ označme $\mathscr{G}/_p\mathscr{F}$ a rozklad grupy $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$ označme $\bar{\mathscr{E}}$. O vzťahu týchto rozkladov pojednáva:

Veta 9. *Rozklad grupy $\mathscr{G}$: $\mathscr{G}/_p\mathscr{F}$ je totožný s rozkladom grupy $\mathscr{G}$* mod $\mathscr{R}$.

Dôkaz. Nech α je ľubovoľná hlavná fáza. Triedu rozkladu $\bar{\mathscr{E}}$, do ktorej patrí prvok α označme $\bar{a}$. Chceme ukázať, že platí rovnosť $\bar{a} = \mathscr{F}\alpha$. Pre každý prvok $\zeta(t) \in \mathscr{F}$ platí vzťah (7) a dosadiac do neho namiesto t fázu $\alpha(t)$, dostaneme, že fáza $\zeta\alpha$ je ekvivalentná s fázou α. Z toho vyplýva podľa vety 7, že $\zeta\alpha \in \bar{a}$ a teda $\mathscr{F}\alpha \subset \bar{a}$. Pre každý prvok $\gamma \in \bar{a}$ platí vzťah (6). Dosadiac do neho namiesto t fázu $\alpha_{-1}(t)$ dostaneme tvrdenie, že fáza $\gamma\alpha^{-1}$ je ekvivalentná s fázou $\alpha_0(t) = t$, preto $\gamma\alpha^{-1} \in \mathscr{F}$, odkiaľ máme $\gamma \in \mathscr{F}\alpha$ a teda $\bar{a} \subset \mathscr{F}\alpha$. Z dokázaných inklúzií dostávame rovnosť $\bar{a} = \mathscr{F}\alpha$.

Nech $\alpha(t)$ je fáza diferenciálnej rovnice (q). Systém fáz $\alpha(t) + k$, kde k je ľubovoľné reálne číslo, nazývame v analógii s knihou [1] str. 44 *úplným fázovým systémom fázy* α a označujeme $[\alpha]$. Označme zjednotenie úplných fázových systémov fázy $\alpha(t)$ a fázy $-\alpha(t)$ symbolom $[\pm\alpha]$ a nazývajme tiež úplným fázovým systémom. Zrejme platí: $[\pm t]\alpha = [\pm\alpha]$.

Poznamenajme, že z definície fázového systému $[\alpha]$ vidieť, že card $[\alpha] = \aleph$, a teda aj card $[\pm\alpha] = \aleph$.

Veta 10. *Úplný fázový systém $[\pm t] \subset \mathscr{F}$ a úplný fázový systém $[t]$ je podgrupou grupy $\mathscr{F} \cap \mathscr{K}$.*

Dôkaz. Prvú časť tvrdenia dostaneme zo vzťahu $\operatorname{tgh}(\pm t + k) = \dfrac{\operatorname{tgh}(\pm t) + \operatorname{tgh} k}{1 + \operatorname{tgh}(\pm t)\operatorname{tgh} k}$ a druhá časť tvrdenia je zrejmá, pretože inverzný prvok k prvku $t + k \in [t]$ je $t - k$ a patrí do $[t]$.

Vyšetrujme mohutnosť rozkladu $\bar{\mathscr{E}}$ a mohutnosť jeho prvkov. Ak priradíme každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathscr{E}}$ hyperbolický nosič, určený niektorou fázou $\alpha \in \bar{a}$, podľa vzorca (1), máme prosté zobrazenie rozkladu $\bar{\mathscr{E}}$, na množinu všetkých hyperbolických nosičov. Vezmúc do úvahy dôsledok vety 3, vidíme, že platí nasledujúca veta:

Veta 11. *Mohutnosť rozkladu $\bar{\mathscr{E}}$ grupy $\mathscr{G}$ je kontinuum.*

Veta 12. *Mohutnosť fundamentálnej podgrupy $\mathscr{F}$ je kontinuum.*

Dôkaz. Z inklúzie $\mathscr{F} \subset C_0$ máme nerovnosť $\operatorname{card} \mathscr{F} \leqq \aleph$ a z inklúzie $[t] \subset \mathscr{F}$, nerovnosť $\operatorname{card} \mathscr{F} \geqq \aleph$. Z dokázaných nerovností máme $\operatorname{card} \mathscr{F} = \aleph$.

Veta 13. *Mohutnosť všetkých prvých hlavných hyperbolických fáz definovaných v intervale $(-\infty, \infty)$, prislúchajúcich jednému nosičovi $q(t)$, je kontinuum.*

Dôkaz. Z algebry ([2] str. 113) je známe, že všetky pravé triedy grupy $\mathscr{G}$ vytvorené podgrupou $\mathscr{F}$ sú ekvivalentné. Nakoľko jednou pravou triedou je podgrupa $\mathscr{F}$, podľa vety 12 a vety 9 máme dôkaz ukončený.

Vzhľadom na to, že sme dostali analogickú algebraickú štruktúru pre hlavné hyperbolické fázy definované v intervale $(-\infty, \infty)$, ako akademik Borůvka ([1] str. 97—99) pre fázy oscilatorických diferenciálnych rovníc, definované v intervale $(-\infty, \infty)$, zaoberajme sa, pretože ide o to isté pole a násobenie grupy, ich porovnaním. Pre rozlíšenie budeme v prípade hyperbolickom vyšetrované množiny a funkcie označovať s indexom h.

Predovšetkým vidieť, že jednotka grupy $\mathscr{G}$: $\alpha_0(t) = t$ určuje oscilotorický nosič $q(t) = -1$, resp. hyperbolický nosič $q(t) = 1$, ktorý je spoločný pre všetky fázy tvoriace fundamentálnu podgrupu $\mathscr{F}$ resp. $\mathscr{F}_h$. Vidíme, že fundamentálne podgrupy nie sú disjunktné, a preto vyšetrujme ich prienik, t. j. hľadajme spoločné riešenia Kummerových diferenciálnych rovníc:

$$\{\alpha, t\} + \alpha'^2 = 1, \quad -\{\alpha_h, t\} + \alpha_h'^2 = 1, \tag{8}$$

ktorých riešenia sú dané po rade vzťahmi:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} t + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} t + c_{22}}, \quad \operatorname{tgh} \alpha_h(t) = \varepsilon \frac{c_1 \operatorname{tgh} t + c_2}{c_2 \operatorname{tgh} t + c_1}, \tag{9}$$

pričom c_{ij}, $i, j = 1, 2$ sú ľubovoľné konštanty, z ktorých determinant $|c_{ij}| \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty ktorých absolútne hodnoty splňujú nerovnosť $|c_1| > |c_2|$. Sčítaním rovníc (8) vychádza $\alpha'^2 = 1$, a teda $\alpha(t) =$

$= \pm t + k$, kde k je ľubovoľná konštanta. Výsledok sformulujeme do nasledujúcej vety.

Veta 14. *Pre fundamentálne podgrupy* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_h$ *platí:* $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_h = [\pm t]$.

Veta 15. *Nech fáza* $\alpha(t)$ *definovaná v intervale* $(-\infty, \infty)$ *má vlastnosť:*

$$\lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = -\infty \operatorname{sgn} \alpha', \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty \operatorname{sgn} \alpha' \tag{10}$$

a nech určuje prvok $\bar{a}$ *rozkladu* $\bar{\mathcal{E}}$ *grupy* $\mathcal{G}$ *a prvok* $\bar{a}_h$ *rozkladu* $\bar{\mathcal{E}}_h$ *grupy* $\mathcal{G}$. *Potom platí:* $\bar{a} \cap \bar{a}_h = [\pm\alpha]$.

Dôkaz. Nech fáza $\alpha(t)$ s vlastnosťou (10) určuje prvok $\bar{a}$ rozkladu $\bar{\mathcal{E}}$ a prvok $\bar{a}_h$ rozkladu $\bar{\mathcal{E}}_h$. Vzhľadom na to, že platia rovnosti $\bar{a} = \mathcal{F}\alpha$, $\bar{a}_h = \mathcal{F}_h\alpha$, dostávame na základe vety 14: $\bar{a} \cap \bar{a}_h = (\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_h)\alpha = [\pm t]\alpha = [\pm\alpha]$.

Poznamenávame, že pre oscilatorický a hyperbolický nosič určený tou istou fázou $\alpha(t)$, definovanou v intervale $(-\infty, \infty)$, ktorá má vlastnosť (10), vždy platí nerovnosť $q_\alpha \neq q_{h\alpha}$. Ľahko zistíme, že platí: $q_{h\alpha} - q_\alpha = 2\alpha'^2$.

LITERATÚRA

[1] Borůvka O., *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Berlin 1967.

[2] Borůvka O., *Úvod do theorie grup*, Praha 1952.

[3] Krbiľa J., *Vlastnosti fáz neoscilatorických rovníc* $y'' = q(t)y$ *definovaných pomocou hyperbolických polárnych súradníc*, Sborník prací VŠD a VÚD *19* (1969), 5–11.

[4] Krbiľa J., *Existencia a neohraničenosť prvej hyperbolickej fázy neoscilatorickej diferenciálnej rovnice*, Sborník prací VŠD a VÚD. 25 (1969), 5-13.

[5] Krbiľa J., *Existencia hlavných hyperbolických fáz diferenciálnej rovnice* $y'' = q(t)y$, Sborník prací VŠD a VÚD. (V tlači)

Došlo 20. 6. 1968.

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty
strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej
Žilina

ON ALGEBRAIC STRUCTURE OF A SET OF THE MAIN HYPERBOLICAL PHASES OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS $y'' = q(t)y$ IN THE INTERVAL $(-\infty, \infty)$

Jaroslav Krbiľa

Summary

Let us have a non-oscillatory differential equation

$$(q) \qquad y'' = q(t)y, \quad q(t) \in C_0((-\infty, \infty))$$

no solution of which can change its sign more than once in the interval $(-\infty, \infty)$.

We shall say that a function $\alpha(t)$ defined by the relation $\tanh \alpha(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$, where the functions $u(t)$, $v(t)$ form the basis of integrals of the equation (q) and $|u(t)| < |v(t)|$ holds for any $t \in (-\infty, \infty)$, is the main phase of the equation (q), if

$$(1) \qquad \lim_{t \to -\infty} \alpha(t) = -\infty \operatorname{sgn} \alpha', \quad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty \operatorname{sgn} \alpha'.$$

The phase $\alpha(t)$ has the following property:

$$(\alpha) \qquad \alpha(t) \in C_3((-\infty, \infty)), \quad \alpha'(t) \neq 0 \text{ for all values } t \in (-\infty, \infty).$$

The function $\alpha(t)$, having the property (α), is called the phase function defined in the interval $(-\infty, \infty)$.

Every main phase defined in the interval $(-\infty, \infty)$ is also the phase function defined in the interval $(-\infty, \infty)$ with the property (1). From Theorem 3 it follows that every phase function $\alpha(t)$ defined in the interval $(-\infty, \infty)$ with the property (1) is also the main phase of the differential equation (q) in this interval, with the bearer $q_\alpha = -\{\tanh \alpha, t\}$ of the basis:

$$u(t) = \frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \quad v(t) = \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}.$$

In the present paper there is investigated the set of all main hyperbolical phases of the differential equations (q) defined in the interval $(-\infty, \infty)$ and it is also proved that:

1. The set of all main hyperbolical phases $\mathscr{G}$ together with the operation forming a composite function represents a group, the unit of which is the phase $\alpha_0(t) = t$. The set of all increasing phases belonging to the group $\mathscr{G}$ is an invariable subgroup of the group $\mathscr{G}$ with the index 2 (Theorems 4 and 5.).

2. Relation $\tanh \gamma(t) = \varepsilon \dfrac{c_1 \tanh \alpha(t) + c_2}{c_2 \tanh \alpha(t) + c_1}$ between the main phases $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ of the equation (q), where $\varepsilon = \pm 1$ and c_1, c_2 are suitable constants such that $|c_1| > |c_2|$ is the equivalence in the group of main phases $\mathscr{G}$. Let us denote it by $\mathscr{R}$. The Equivalence $\mathscr{R}$ determines the decomposition of the group $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$. Every element $\bar{a}$ of this decomposition consists of all main hyperbolical phases of exactly one differential equation (q) (Theorems 6 and 7.).

3. The set $\mathscr{F}$ of those elements of the group $\mathscr{G}$ that are equivalent to the unit of this group is a subgroup of the group $\mathscr{G}$ and is called a fundamental subgroup. The decomposi-

tion of the group $\mathscr{G}$ into the right classes formed by the fundamental subgroup $\mathscr{G}_p/\mathscr{F}$ is identical with the decomposition of the group $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$ (Theorems 8 and 9.).

4. The Power of the decomposition of the group $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$, the power of the fundamental subgroup $\mathscr{F}$ as well as that of all main hyperbolical phases defined in the interval $(-\infty, \infty)$ and belonging to the only bearer $q(t)$ are all equal to the power of the continuum (Theorems 11, 12, 13.).

These results are analogous to those in [1] — I — § 10 pages 97—99. Since in these two analogical cases the same sphere of the group $\mathscr{G}$ with the same group multiplication apears, we can compare situations in hyperbolical and oscillatory cases. In order to differ the hyperbolical case we denote it by the index h. If we denote the set of phases $\pm\alpha(t) + k$, where k is an arbitrary constant, by the symbol $[\pm\alpha]$ we can summarize this result (Theorems 14 and 15) in the following way:

Let the phase $\alpha(t)$, i.e. the function with property (α), defined in the interval $(-\infty, \infty)$ with the property (1) determine the element $\bar{a}$ of the decomposition of the group $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}$ and $\bar{a}_h$ of the decomposition of the group $\mathscr{G}$ mod $\mathscr{R}_h$. Then it follows $:\bar{a} \cap \bar{a}_h = [\pm\alpha]$.