Tatiana Gavalcová
α-компактность в l-группах

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 1, 21--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127064

Mat. čas. 24, 1974, No 1, 21—30

α-КОМПАКТНОСТЬ В l-ГРУППАХ

ТАТЬЯНА ГАВАЛЦОВА

Понятие α-компактности в l-группах для кардинального числа α было исследовано в работах Бигарда, Конрада и Вольфенштейна [1], Якубика [4] и Шика [6]. Представляемая работа состоит из трех частей. В первой части доказывается, что в каждой l-группе существует наибольшая выпуклая α-компактная l-подгруппа $K_\alpha(G)$ (называемая α-компактным ядром l-группы G); показано, что $K_\alpha(G)$ является l-идеалом в G, и найдено конструктивное описание α-компактного ядра. Для $X \subseteqq G$ обозначим $X^\delta = \{y \in G : |y| \wedge x| = 0$ для всех $x \in X\}$; X^δ называется, полярой множества X (ср. [6]). Во второй части выводится, что в архимедовой l-группе G $(K_\sigma(G))^{\delta\delta}$ является вполне полупрямой суммой цепей целых чисел. Каждая полная l-группа разлагается в прямую сумму своих l-подгрупп G_a, G_b, причем G_a является атомной и G_b безатомной (ср. [3]). В третьей части выводится, что $K_\sigma(G) = K_\sigma(G_a)$, и исследуется структура l-подгруппы $Y = (K_\sigma(G))^\delta \cap G_a$; показано, что Y является вполне полупрямой суммой l-групп, каждая из которых изоморфна цепи всех действительных чисел.

1. Пусть G есть l-группа и пусть α есть кардинальное число. Мы введем следующее определение.

1.1. **Определение.** *Пусть a, b-элементы l-группы G, $a \leqq b$. Будем говорить, что элемент b является α-компактным над элементом a, если из $b = \bigvee_{j \in J} a_j$, $\operatorname{card} J \leqq \alpha$, $a \leqq a_j$, следует существование конечного подмножества $J_1 \subseteq J$ такого, что $b = \bigvee_{j \in J_1} a_j$.*

Надо отметить, что в l-группе возможна следующая ситуация. Для элемента $0 < a \in G$ могут существовать элементы b, $c \in G$ такие, что $0 < b < a$, $0 < c < a$, причем a является α-компактным над элементом b, но a не является α-компактным над c. Это может быть показано на следующем примере 1.2.

1.2. Пример. Пусть $G = E + Z$-прямая сумма аддитивной группы вещественных чисел E и аддитивной группы целых чисел Z, причем групповая операция $+$ и упорядочение определены покомпонентно. Пусть $a = (1, 1)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 1)$, $\alpha > \aleph_0$. Тогда a является α-компактным элементом над b, но a не является α-компактным над c ни для одного $\alpha > \aleph_0$.

1.3. **Лемма.** *Пусть $0 \leqq a$, пусть a является α-компактным элементом над 0, пусть $c \in [0, a]$. Тогда элемент c является α-компактным над 0.*

Доказательство. Пусть $c = \bigvee_{j\in J} c_j$, $\operatorname{card} J \leqq \alpha$, $0 \leqq c_j$. Тогда $a = (a - c) + c = (a - c) + \bigvee_{j\in J} c_j = \bigvee (a - c + c_j)$. Так как $c_j \geqq 0$ для каждого $j \in J$ и $a - c \geqq 0$, то мы получаем $a - c + c_j \geqq 0$. Используя α-компактность элемента a над 0, мы утверждаем, что существует конечное подмножество $J_1 \subseteqq J$ такое, что $a = \bigvee_{j\in J_1} (a - c + c_j)$. Из этого мы заключаем, что $c = \bigvee_{j\in J_1} c_j$, чем доказательство окончено.

1.4. **Лемма.** *Пусть $a, b \in G$, $0 \leqq a \leqq b$, пусть элемент a является α-компактным над 0 и b α-компактным над a. Тогда b есть α-компактный элемент над 0.*

Доказательство. Пусть $b = \bigvee_{j\in J} c_j$, $\operatorname{card} J \leqq \alpha$, $0 \leqq c_j$. Тогда $0 \leqq c_j \wedge a \leqq a$ и для элемента a справедливо равенство $a = a \wedge b = a \wedge \bigvee_{j\in J} c_j = \bigvee_{j\in J} (c_j \wedge a)$. Так как a является α-компактным над 0, то существует конечное подмножество $J_1 \subseteqq J$, для которого $a = \bigvee_{j\in J_1} (a \wedge c_j)$. Положим $c_j' = c_j \vee a$; тогда для элемента b мы получим $b = \bigvee_{j\in J} c_j = \bigvee_{j\in J} c_j'$. Используя α-компактность элемента b над a, мы утверждаем, что существует конечное подмножество $J_2 \subseteqq J$ такое, что $b = \bigvee_{j\in J_2} c_j'$. Пусть $J_0 = J_1 \cup J_2$; тогда J_0 является конечным подмножеством, и для элементов a, b выполняются равенства $b = \bigvee_{j\in J_0} c_j' = \bigvee_{j\in J_2} c_j'$ ввиду $J_2 \subseteqq J_0$, $a = \bigvee_{j\in J_1} (c_j \wedge a) = \bigvee_{j\in J_0} (c_j \wedge a)$ ввиду $J_1 \subseteqq J_0$. Из этих равенств вытекает, что

$$b = \bigvee_{j\in J_0} c_j' = \bigvee_{j\in J_0} (a \vee c_j) = a \vee \bigvee_{j\in J_0} c_j = \bigvee_{j\in J_0} (c_j \wedge a) \vee \bigvee_{j\in J_0} c_j = \bigvee_{j\in J_0} c_j.$$

Тем самым доказано, что b есть α-компактный элемент над 0.

1.5. **Лемма.** *Пусть $a, b \in G$, $0 \leqq a \leq b$. Элемент b является α-компактным над a тогда и только тогда, когда элемент $b - a$ есть α-компактный над 0.*

Доказательство. Пусть b — α-компактный элемент над a и пусть $b - a = \bigvee_{j\in J} c_j$, причем $\operatorname{card} J \leqq \alpha$, $0 \leqq c_j$. Тогда $b = (\bigvee_{j\in J} c_j) - a = \bigvee_{j\in J} (c_j + a)$, и для каждого $j \in J$ выполняется $c_j + a \geqq a$. Используя α-компактность элемента b, утверждаем, что существует конечное подмножество $J_1 \subseteqq J$ такое, что $b = \bigvee_{j \in J_1} (c_j + a) = (\bigvee_{j \in J_1} c_j) + a$. Из этого вытекает $b - a = \bigvee_{j \, J_1} c_j$. Обратное утверждение получается аналогичным способом.

1.6. **Лемма**. *Пусть $a, b \in G$, $0 \leqq a, b$, пусть a, b — α-компактные элементы над 0. Тогда $a + b$ является α-компактным элементом над 0.*

Доказательство. Используя α-компактность элемента a над 0 и лемму 1.5, утверждаем, что элемент $a + b$ является α-компактным над b. Так как b есть α-компактный элемент над 0, то, опираясь на лемму 1.4, получаем, что элемент $a + b$ является α-компактным над 0, и тем доказательство окончено.

1.7. **Лемма**. *Пусть $a, b \in G$, $0 \leqq a, b$, пусть элементы a, b α-компактны над 0. Тогда $a \wedge b$, $a \vee b$ являются α-компактными элементами над 0.*

Доказательство. Следуя лемме 1.6, элемент $a + b$ является α-компактным над 0. Так как справедливы отношения $0 \leqq a \wedge b \leqq a + b$, $0 \leqq a \vee b \leqq a + b$, то, согласно лемме 1.3, элементы $a \wedge b$, $a \vee b$ являются α-компактными над 0.

1.8. **Определение.** *Элемент a l-группы G мы будем называть α-компактным, если $|a|$ есть α-компактный элемент над 0. Элемент a мы будем называть компактным, если a есть α-компактный для каждого кардинального числа α. Будем называть l-подгруппу G_1 l-группы G α-компактной, если каждый ее элемент является α-компактным по отношению к G; G будем называть компактной, если она α-компактна для любого кардинального числа α.*

1.9. **Теорема.** *Подмножество $K_\alpha(G)$ всех элементов l-группы G, которые являются α-компактными, образует l-идеал в l-группе G. $K_\alpha(G)$ является α-компактной l-подгруппой. Более, если X есть выпуклая l-подгруппа такая, что X — α-компактная l-подгруппа, то $X \subseteqq K_\alpha(G)$ (значит, $K_\alpha(G)$ является наибольшей выпуклой α-компактной l-подгруппой l-группы G).*

Доказательство. Очевидно $0 \in K_\alpha(G)$. Если $a \in K_\alpha(G)$, то $|a| = |-a|$. Итак, $-a \in K_\alpha(G)$. Если $a, b \in K_\alpha(G)$, то $|a|$, $|b|$ являются α-компактными элементами над 0. Согласно лемме 1.6., элемент $|a| + |b| + |a|$ есть α-компактный над 0. Ввиду отношения $0 \leqq |a + b| \leqq |a| + |b| + |a|$, согласно лемме 1.3, мы утверждаем, что $a + b \in K_\alpha(G)$. Это обозначает, что подмножество $K_\alpha(G)$ образует подгруппу в G. Для доказательства выпуклости предположим, что $0 \leqq a \in K_\alpha(G)$ и $x \in G$ есть элемент со свойством $0 \leqq x \leqq a$; из леммы 1.3 вытекает, что $x \in K_\alpha(G)$. Для $a \in K_\alpha(G)$ получаем $|a| \in K_\alpha(G)$ и притом $|a| \geqq a$, $|a| \geqq 0$; это доказывает, что $K_\alpha(G)$ — направленное множество, т. е. $K_\alpha(G)$ образует l-подгруппу в G. Легко видно, что для $0 \leqq a \in K_\alpha(G)$ элемент $-x + a + x \in K_\alpha(G)$ для любого $x \in G$. Тем доказано, что $K_\alpha(G)$ является l-идеалом в G. Из определения l-подгруппы $K\alpha$ (G) следует, что $K_\alpha(G)$ есть α-компактна. Наконец, пусть X есть α-компактная l-подгруппа l-группы G и пусть $y \in X$. Тогда $|y|$ является α-компактным элементом над 0 и, значит, $y \in K_\alpha(G)$; итак, $X \subseteqq K_\alpha(G)$, чем доказательство окончено.

1.10. **Определение.** *Для l-группы G l-идеал $K_\alpha(G)$ мы будем называть α-компактным ядром в G.*

В случае $\alpha = \aleph_0$ мы будем говорить также о σ-компактном ядре и будем пользоваться обозначением $K_\sigma(G)$.

Очевидно, что в случае $K_\alpha(G) = G$ l-группа G является α-компактной. Пусть $K(G)$ есть множество всех элементов l-группы G, которые являются компактными. Повторяя доказательсто теоремы 1.9 для любого кардинального числа α, мы получим, что $K(G)$ также образует l-идеал l-группы G.

1.11. **Определение.** *Компактным ядром l-группы G мы будем назывть l-идеал $K(G)$.*

1.12. Замечание. Пусть G есть σ-полная l-группа. В последовательности лемм, предшествующих теореме 11, в работе [4] автор, работая с понятием α-компактности, все время ограничивается замкнутым интервалом. Итак, ограничивая рассуждения из работы [4] только для элементов l-группы, входящих в $K_\sigma(G)$, мы получим следующий результат:

1.13. **Теорема.** (Сравни [4], теорема 11.) *Пусть $G \neq \{0\}$ — σ-полная l-группа. Тогда $K_\sigma(G) \cong \dot{\sum\limits_{i \in I}} G_i$ (символ $\dot{\Sigma}$ обозначает дискретную прямую сумму), причем для каждого $i \in I$ G_i есть l-группа целых чисел.*

1.14. Замечание. Надо отметить, что α-компактное ядро $K_\alpha(G)$ l-группы G не должно быть замкнутым l-идеалом в G, даже если мы предположим, что G есть полная l-группа. Этот факт может быть показан на следующем примере.

1.15. Пример. Пусть G есть множество всех функций, определенных на множестве вещественных чисел, с целочисленными значениями. Определим групповую операцию $+$ и упорядочение на G покомпонентно. Тогда G есть полная l-группа, и G можно выразить в виде $G = \sum\limits_{i\, I} G_i$ ($\sum$ обозначает полную прямую сумму), причем для каждого $i \in I$ G_i есть аддитивная l-группа целых чисел с обычным упорядочением. Возвмем множество элементов $\{b^i : i \in I\}$, для которых $b^i(i) = 1$, $b^i(j) = 0$ для $j \neq i$. Тогда все b^i принадлежат ядру $K_\sigma(G)$, и существует $\bigvee_{i \in I} b^i = c$, причем $c(i) = 1$ для каждого $i \in I$. Очевидно $c \notin K_\sigma(G)$. Значит, $K_\sigma(G)$ не является замкнутым l-идеалом l-группы G.

1.16. Замечание. Фактор — l-группа $G/K_\alpha(G)$ может обладать свойством α-компактности также в нетривиальном случае $K_\alpha(G) \neq G$. Это показывает l-группа в следующем примере. Пусть G обозначает множество всех целочисленных функций, которые определены на множестве I всех вещественных чисел и являются почти везде константами. Определим аддитивную групповую операцию и упорядочение на G покомпонентно. Тогда G становится архимедовой l-группой. Возьмем подмножество элементов $\{b^i : i \in I\}$, причем b^i определены как в 1.15. Тогда $K_\sigma(G)$ содержит все элементы nb^i, $i \in I$ для любого целого числа n; значит, $K_\sigma(G) \subseteqq \dot{\sum\limits_{i \in I}} G_i$ ($G_i = Z$ для каждого $i \in I$). Тогда $G/K_\sigma(G)$ является подгруппой группы $G/\sum\limits_{i \in I} G_i$, которая изоморфна линейно упорядоченной группе всех константных функций, определенных на множестве I, т. е. изоморфна аддитивной группе целых чисел Z в обычном упорядочении. Так как $G \neq K_\sigma(G)$, то $G/K_\sigma(G)$ должно быть изоморфно Z.

2. В дальнейшем вы будем предполагать, что l-группа G является архимедовой. Пусть $(K_\sigma(G))^\delta$ обозначает ортогональное дополнение σ-компактного ядра. Из определения операции δ следует, что никакой элемент $x \in (K_\sigma(G))^\delta$, $x \neq 0$ не является σ-компактным. Положим $K = (K_\sigma(G))^{\delta\delta}$. Легко доказать, что K является наименьшим замкнутым l-идеалом l-группы G, содержащим σ-компактное ядро $K_\sigma(G)$.

Пусть φ обозначает изоморфизм, определенный теоремой 1.13. В следующих рассуждениях определим отображение $\bar{\varphi}$, которое будет изоморфизмом K в полную прямую сумму $\sum\limits_{i \in I} G_i$. Пусть $\{b^i : i \in I\} \subseteqq \sum\limits_{i \in I} G_i$ есть система функций, обладающая следующими свойствами:

$$b^i(i) = 1,\ b^i(j) = 0 \text{ для каждого } j \neq i.$$

Положим $a^i = \varphi^{-1}(b^i)$. Очевидно, каждое b^i покрывает 0 в $\dot{\sum\limits_{i \in I}} G_i$; далее, $b^i \wedge b^j = 0$ для каждого $i \neq j$, и система $\{b^i : i \in I\}$ максимальна по отношению к ортогональности Поскольку φ является изоморфным отображением, то из этого следует, что система $\{a^i : i \in I\}$ обладает теми же свойствами, что и система $\{b^i : i \in I\}$. Тогда каждый интервал $[0, a^i]$ есть двухэлементная цепь. Так как l-группа G есть архимедова, то множество $\bigcup\limits_{n = 1,2,\ldots} [-na^i, na^i] = B_i$ образует максимальную цепь, которая изоморфна l-группе целых чисел. По теореме 1, [5] B_i есть прямой фактор в l-группе G. Пусть $a \in K$. Определим образ элемента a в отображении $\bar{\varphi}$ по формуле $[\bar{\varphi}(a)]_i = a[B_i]$ для каждого $i \in I$, причем символ $a[B_i]$ обозначает проекцию элемента a в прямой фактор B_i. Используя свойства проектирования, мы утверждаем, что отображение $\bar{\varphi}$ сохраняет операции $+$, $\wedge$, $\vee$. Отображение $\bar{\varphi}$ также взаимно однозначно: предположим, что $\bar{\varphi}(x) = 0$ для элемента $0 < x \in K$. Тогда должно исполняться $x \wedge a^i = 0$ для каждого a^i, а это эквивалентно тому, что $x \in (K_\sigma(G))^\delta$. Это влечет $x \in K \cap \cap (K_\sigma(G))^\delta = \{0\}$, и мы получили противоречие. Так как каждое B_i изоморфно l-группе целых чисел, мы можем полученные результаты сформулировать в следующей теореме.

2.1. **Теорема.** *Пусть G есть архимедова l-группа, $K = (K_\sigma(G))^{\delta\delta}$. Тогда $\bar{\varphi}(K)$, где $\bar{\varphi}$ определено в предыдущих рассуждениях, является l-подгруппой в $\sum_{i \in I} B_i$, содержащей $\dot{\Sigma}_{i \in I} B_i$, причем каждое B_i изоморфно l-группе целых чисел. Если предположить, что G-полная l-группа, то $\bar{\varphi}(K)$ является выпуклой l-подгруппой в $\sum_{i \in I} B_i$.*

Доказательство. Утверждение, что $\dot{\Sigma}_{i \in I} B_i \subseteqq \bar{\varphi}(K)$, вытекает из определения отображения $\bar{\varphi}$. Предположим, что G есть полная l-группа, и пусть $0 \leqq x \leqq y$, где $x \in \sum_{i \in I} B_i$ и $y \in \bar{\varphi}(K)$, т. е. существует элемент $c \in K$ со свойством $y = \bar{\varphi}(c)$. Пусть x_i является i-той координатой элемента x в $\sum_{i \in I} B_i$. Тогда $x_i \leqq y_i = c[B_i] \leqq c$ для каждого $i \in I$, и объединение $d = \bigvee_{i \in I} x_i$ существует в K. Из определения x_i следует, что $d[B_i] - x_i$. С другой стороны, $x_i \leqq d[B_i]$. Доказывая от противного, предположим, что $x_i < d[B_i]$ для некоторого $i \in I$. Обозначим $u = d[Bi] - x_i$ для выше фиксированного $i \in I$; тогда $u > 0$ и $u \in Bi$. Имеем:

$$(d - u)[B_i] = d[B_i] - u[B_i] = d[B_i] - u = x_i$$

и для $j \neq i$

$$(d - u)[B_j] = d[B_j] - u[B_j] = d[B_j] \geqq x_j.$$

Значит, справедливо $(d - u)[B_k] \geqq x_k$ для каждого $k \in I$. Докажем, что в таком случае имеет место неравенство $d - u \geqq x_k$ для каждого $k \in I$. Действительно,

$$\begin{aligned} ((d - u) \wedge x_k)[B_k] &= (d - u)[B_k] \quad x_k[B_k] \\ &= (d - u)[B_k] \wedge x_k = x_k, \end{aligned}$$

и для $j \neq k$

$$((d - u) \wedge x_k)[B_j] = (d - u)[B_j] \wedge x_k[B_j] =$$
$$= (d - u)[B_j] \wedge 0 = 0,$$

так как $(d - u)[B_j] \geqq x_j \geqq 0$. Из доказанного вытекает, что $(d - u) \wedge x_k = x_k$, т. е. $(d - u) \geqq x_k$; это ведет к противоречию с тем, что $d = \bigvee_{i \in I} x_i$. Это обозначает, что $x = \bar{\varphi}(d)$, и доказательство окончено.

2.2. **Следствие.** *Пусть G ест полная l-группа. Если G является σ-компактной l-группой, то G есть α-компактна для каждого кардинального числа $\alpha \geqq \aleph_0$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что $K_\alpha(G) \subseteqq K_\sigma(G) = G \cong \dot{\sum}_{i I} G_i$, причем все G_i являются l-группами целых чисел. $\dot{\sum}_{i \in I} G_i$ есть σ-компактная и также α-компактная l-группа для каждого $\alpha \geqq \aleph_0$.

2.3. Замечание. Этот результат доказан другим методом Бигардом, Конрадом и Вольфенштейном в работе [1].

3. Положим следующий вопрос: какова структура той части l-группы, которая содержит элементы l-группы, не являющиеся α-компактными для любого бесконечного кардинального числа α. Нам понадобятся следующие леммы.

3.1. **Лемма**. *Пусть A есть нетривиальная замкнутая безатомная l-подгруппа аддитивной l-группы всех вещественных чисел E. Тогда A плотна по отношению упорядочения в E.*

Доказательство. Пусть $0 < r \in E$; мы должны показать существование элемента $a \in A$ такого, что $0 < a \leqq r$. Если для всех $a \in A$, $a > 0$ справедливо отношение $a > r$, то элемент $b = \wedge \{a : a > r\} \geqq r$, $b > 0$ будет атомом в A, что ведет к противоречию. Поэтому существует элемент $a \in A$, $a > 0$ со свойством $0 < a \leqq r$.

3.2. **Лемма**. *Пусть $A \neq \{0\}$ есть замкнутая и плотная по упорядочению l-подгруппа l-группы всех вещественных чисел E. Тогда $A = E$.*

Доказательство. Предположим, что $A \subset E$, но $A \neq E$. Тогда существует элемент $i \in E \setminus A$, и подмножество $\{x \in A : x \leqq i\}$ не обладает наименьшей верхней гранью в A, что есть противоречие.

3.3. **Лемма**. *Пусть $a^{\delta\delta}$ есть главная поляра, определенная элементом $0 < a \in G$, и пусть $a^{\delta\delta}$ является атомом в структуре всех поляр l-группы G. Тогда $a^{\delta\delta}$ является линейно упорядоченной.*

Утверждение леммы является частным случаем леммы 1.8 из работы [7]. (Сравни также [2], теорема 3.8.)

3.4. **Лемма.** *Пусть $0 < a \in G$ есть элемент l-группы G, который не является компактным и такой, что главная поляра $a^{\delta\delta}$ есть атом в структуре всех поляр l-группы G. Тогда $a^{\delta\delta}$ не содержит наименьшего положительного элемента.*

Доказательство. Предположим, что $0 < x \in a^{\delta\delta}$ есть наименьший положительный элемент поляры $a^{\delta\delta}$. Пусть $x = \bigvee_{i \in J} x_i$ для $x_i \in G^+$. Тогда $0 \leqq x_i \leqq x$ и, используя выпуклость, все $x_i \in a^{\delta\delta}$. Для каждого $i \in I$ должно быть $x_i = 0$ или $x_i = x$, но такой элемент x должен быть компактным. Следуя лемме 3.3, поляра $a^{\delta\delta}$ является линейно упорядоченной: так как l-группа полна, она также архимедова, и тогда существует положительное целое число n со свойством $0 < a \leqq nx$. Из этого отношения вытекает, что элемент a также является компактным, но это противоречие.

Возьмем сейчас множество всех элементов l-группы G, которые не являются компактными, и образуем к каждому такому элементу главную поляру; пусть A обозначает множество всех таких главных поляр, которые являются атомами в структуре всех поляр l-группы G. Положим $B = \cup A$, и пусть $B^{\delta\delta}$ есть ортогональное дополнение к B^{δ}. Если x не компактно в G, тогда x также не компактно в $B^{\delta\delta}$; мы утверждаем, что $B^{\delta\delta}$ образует l-группу, которая не является компактной. Пользуясь леммами 3.1—3.4, каждая поляра $a_i^{\delta\delta} \in A$ линейно упорядочена и изоморфна аддитивной группе вещественных чисел в обычном упорядочении. Так как l-группа G полна, то она также архимедова; из этого вытекает, что каждое $a_i^{\delta\delta}$ есть максимальная цепь. По теореме 1, [5] каждая поляра $a_i^{\delta\delta}$ есть прямой фактор l-группы G. Пусть сейчас $a \in B^{\delta\delta}$. Определим отображение $\bar{\varphi}$ из $B^{\delta\delta}$ в полную прямую сумму атомных главных поляр формулой $[\bar{\varphi}(a)]_i = a[a_i^{\delta\delta}]$, причем символ $a[a_i^{\delta\delta}]$ обозначает проекцию элемента a в прямой фактор $a_i^{\delta\delta}$. Аналогично, как в абзаце 2, из определения отображения $\bar{\varphi}$ вытекает, что $\bar{\varphi}$ сохраняет групповую и структурные операции. Отображение $\bar{\varphi}$ есть взаимно однозначно; с целью доказать это, мы предположим, что $\bar{\varphi}(c) = 0$ для некоторого элемента $c > 0$, $c \in B^{\delta\delta}$. Тогда для всех i исполнено $c[a_i^{\delta\delta}] = 0$, значит $c \in a_i^{\delta}$. Поэтому

$$c \in \wedge\, a_i^{\delta} = (\vee\, a_i^{\delta\delta})^{\delta} = (B^{\delta\delta})^{\delta} = B^{\delta},$$

что возможно лишь в случае $c = 0$, а это есть противоречие. Ввиду лемм 3.1. и 3.2. можем результаты сформулировать в теореме:

3.5. **Теорема.** *Пусть G-полная l-группа, пусть $\bar{\varphi}$, $B^{\delta\delta}$ имеют то же самое значение, как упомянуто выше. Тогда $\bar{\varphi}(B^{\delta\delta})$ является выпуклой l-подгруппой в $\sum_{i \in I} a_i^{\delta\delta}$, причем $a_i^{\delta\delta}$ изоморфно l-группе всех вещественных чисел для каждого $i \in I$.*

Доказательсто. Остается доказать только выпуклость. Пусть $0 \leqq \leqq x \leqq y$, для $y \in \bar{\varphi}(B^{\delta\delta})$, $x \in \sum_{i \in I} a_i^{\delta\delta}$. Тогда $y = \bar{\varphi}(c)$ для некоторого $c \in B^{\delta\delta}$ и $y_i = c[a_i^{\delta\delta}]$. Пусть x_i есть i-тая координата элемента x в $\sum_{i \in I} a_i^{\delta\delta}$. Тогда $x_i < y_i \leqq c$ для каждого $i \in I$, и объединение $d = \bigvee_{i \in I} x_i$ существует в $B^{\delta\delta}$. Повторяя без изменения часть доказательства теоремы 2.1, мы получим $d[a_i^{\delta\delta}] = x_i$ ввиду свойств системы $\{a_i^{\delta\delta} : i \in I\}$. Из этого вытекает $x = \bar{\varphi}(d)$, что и требовалось доказать.

3.6. **Теорема.** (Сравни [3].) *Любая полная l-группа G может быть разложена в прямую сумму своих l-подгрупп G_a, G_b таких, что структура всех поляр в G_a есть атомна и структура всех поляр в G_b не имеет атомов.*

Эту теорему можно доказать, пользуясь результатами работы [3] и взаимно однозначным отношением между нитями и главными полярами l-группы (сравни [2]).

3.7. **Теорема.** *Пусть G — полная l-группа. Тогда l-группу G_a, определенную в теореме 3.6, можно разложить в прямую сумму $G_a = X + Y$ так, что выполняется:*

(i) $X = (K(G_a))^{\delta\delta}$;
(ii) X есть вполне полупрямая сумма l-групп целых чисел;
(iii) $Y = (K(G_a))^{\delta}$;
(iv) Y есть вполне полупрямая сумма l-групп вещественных чисел.

Более того, никакой положительный элемент, принадлежащий l-группе G_b из теоремы 3.6, не является компактным.

Доказательство. Образуем l-идеалы $X = (K(G_a))^{\delta\delta}$ и $Y = (K(G_a))^{\delta}$ для l-подгруппы G_a, которая определена в теореме 3.6. Так как X есть замкнутый l-идеал в полной l-группе, то имеет место прямое разложение $G_a = X + Y$. В силу теоремы 2.2 получаем $K(G_a) = K_\sigma(G_a)$, а в силу теоремы 2.1 $(K(G_a))^{\delta\delta}$ является l-подгруппой полной прямой суммы l-групп целых чисел, содержащей дискретную прямую сумму. Значит, X есть вполне полупрямая сумма l-групп целых чисел, и тем доказано утверждение *(ii)*. Докажем *(iv)*. Возьмем все элементы из G_a такие, которые не компактны и определяют главные поляры, являющиеся атомами в структуре всех поляр l-подгруппы G_a; в рассуждениях, предшествующих теореме 3.5, множество элементов с такими свойствами мы обозначили буквой B. Покажем, что $B^{\delta\delta} = (K(G_a))^{\delta}$. Сначала заметим, что B и $K(G_a)$ ортогональны: если $0 < x \in B$, $0 < y \in K(G_a)$, то $x \wedge y$ есть компактный элемент, так как $0 \leqq x \wedge y \leqq y$ и элемент y компактен. Для главных поляр мы получим $(x \wedge y)^{\delta\delta} \leqq x^{\delta\delta}$. Поскольку поляра $x^{\delta\delta}$ является линейно упорядоченной, то существует положительное целое число n такое, что $0 \leqq x \leqq n \,.\, (x \wedge y)$, но из этого вытекает, что x-компактный элемент. Итак, должно быть $x \wedge y = 0$. Далее, если $0 \leqq z \in G_a$ принадлежит пересечению $B^\delta \cap (K(G_a))^\delta$, то, не теряя общности, можно предположить, что главная поляра $z^{\delta\delta}$ есть атом в структуре всех поляр и z не есть компактный элемент. Тогда $z \in B$, и должно быть $z = 0$. Мы доказали, что $B^{\delta\delta} = (K(G_a))^\delta$. По теореме 3.5 мы утверждаем, что $Y = (K(G_a))^{\delta\delta}$-вполне полупрямая сумма l-групп вещественных чисел. Очевидно, что $K(G) = K(G_a)$, следовательно, никакой положительный элемент $z \in G_b$ не может быть компактным, чем заканчивается доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] BIGARD, A. — CONRAD, P. — WOLFENSTEIN, S.: Compactly generated lattice ordered groups. Math. Z. *107*, 1968, 201—211.

[2] BYRD, R. D.: Lattice — ordered groups. Dissertation, Tulane University, 1966.

[3] ГУРЕВИЧ, Ю. Ш.: К элементарной теории структурно упорядоченных абелевых групп и K-линеалов. Докл. АН СССР 175, *6*, 1967, 1213—1215.

[4] JAKUBÍK, J.: Kompakt erzeugte Verbandsgruppen. Math. Nachr. *30*, 1965, 193—201.

[5] JAKUBÍK, J.: Konvexe Ketten in l-Gruppen. Čas. pěst. mat. *84*, 1959, 53—63.

[6] ŠIK, F.: Kompakt erzeugte vollständige l-Gruppen. Bull. Inst. polytech. Iasy *8*, 1962, 5—8.

[7] ŠIK, F.: Über Beziehungen zwischen eigenen Spitzen und minimalen Komponenten einer l-Gruppe. Acta math. hung. 13, 1962, 171—178.

Поступило 5. 9. 1972

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Švermova 5
040 01 Košice