TRANSFORMÁCIA JACOBIHO TRANSCENDENT DRUHÉHO DRUHU NA TVAR S REÁLNYM ARGUMENTOM

JÁN CHRAPAN, Bratislava

Podľa Jacobiho definície [1, str. 96, resp. 2, str. 150]

$$Z_0(v; k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \vartheta_0 \left(\frac{v}{2K}\,;\, i\frac{K'}{K} \right) = \frac{\Theta_0'(v; k)}{\Theta_0(v; k)} \tag{1}$$

uvažujme funkcie

$$Z_1(v; k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \vartheta_1 \left(\frac{v}{2K}\,;\, i\frac{K'}{K} \right) = \frac{\Theta_1'(v; k)}{\Theta_1(v; k)}\,;$$

$$Z_2(v; k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \vartheta_2 \left(\frac{v}{2K}\,;\, i\frac{K'}{K} \right) = \frac{\Theta_2'(v; k)}{\Theta_2(v; k)}\,; \tag{2}$$

$$Z_3(v; k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \vartheta_3 \left(\frac{v}{2K}\,;\, i\frac{K'}{K} \right) = \frac{\Theta_3'(v; k)}{\Theta_3(v; k)}\,,$$

kde

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x; \tau) &= \Theta_0(\mathrm{v}; k); \\ \vartheta_1(x; \tau) &= \Theta_1(\mathrm{v}; k); \\ \vartheta_2(x; \tau) &= \Theta_2(\mathrm{v}; k); \\ \vartheta_3(x; \tau) &= \Theta_3(\mathrm{v}; k) \end{aligned} \tag{3}$$

znamenajú Jacobiho thétafunkcie [1, str. 71, resp. 2, str. 138] argumentu $x = \frac{v}{2K}$, parametra $\tau = i\frac{K'}{K}$ a hodnoty K; K' sú konštanty periódy Jacobiho eliptických funkcií (úplné eliptické integrály prvého typu) [2, str. 142]. Argument v a modul k funkcií (1), (2) môžu byť ľubovoľné čísla. Funkcie (1) a (2) sú Jacobiho transcendenty druhého druhu (dzétafunkcie).

Druhé logaritmické derivácie funkcií (3) [2, str. 142]

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \vartheta_0(x;\tau) = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1^2(x;\tau)}{\vartheta_0^2(x;\tau)};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \vartheta_1(x;\tau) = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_0^2(x;\tau)}{\vartheta_1^2(x;\tau)};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \vartheta_2(x;\tau) = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_3^2(x;\tau)}{\vartheta_2^2(x;\tau)};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \vartheta_3(x;\tau) = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_2^2(x;\tau)}{\vartheta_3^2(x;\tau)}$$

upravme substitúciami [2, str. 142—144, resp. 3, str. 289, 6.196]

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3; \qquad \pi\vartheta_3^2 = 2K; \qquad \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = k;$$

$$\frac{\vartheta_1(x;\tau)}{\vartheta_0(x;\tau)} = \sqrt{k}\,.\,\mathrm{sn}\,(v;k);$$

$$\frac{\vartheta_2(x;\tau)}{\vartheta_0(x;\tau)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,.\,\mathrm{cn}\,(v;k); \tag{4}$$

$$\frac{\vartheta_3(x;\tau)}{\vartheta_0(x;\tau)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,.\,\mathrm{dn}\,(v;k);$$

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} = 4K^2\,\frac{\Theta_0''}{\Theta_0} = 4K^2\left(1 - \frac{E}{K}\right),$$

kde E znamená úplný eliptický integrál druhého typu, na tvar [3, str. 423].

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2} \ln \vartheta_0\left(\frac{v}{2K};\tau\right) = 1 - \frac{E}{K} - k^2\mathrm{sn}^2(v;k);$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2} \ln \vartheta_1\left(\frac{v}{2K};\tau\right) = 1 - \frac{E}{K} - ns^2(v;k);$$

$$\frac{d^2}{\mathrm{d}v^2} \ln \vartheta_2\left(\frac{v}{2K};\tau\right) = 1 - \frac{E}{K} - \mathrm{dc}^2(v;k);$$

$$\frac{d^2}{\mathrm{d}v^2} \ln \vartheta_3\left(\frac{v}{2K};\tau\right) = 1 - \frac{E}{K} - k^2\mathrm{cd}^2(v;k).$$

potom na základe definičných vzťahov (1) a (2) po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} Z_0(v; k) &= -\frac{E}{K} + \mathrm{dn}^2(v; k); \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} Z_1(v; k) &= -\frac{E}{K} - \mathrm{cs}^2(v; k); \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} Z_2(v; k) &= -\frac{E}{K} - k'^2\mathrm{sc}^2(v; k); \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} Z_3(v; k) &= -\frac{E}{K} + k'^2\mathrm{nd}^2(v; k).
\end{aligned} \tag{5}$$

Integrovaním relácií (5) vychádza

$$\begin{aligned}
Z_0(v; k) &= -\frac{E}{K} v + \int_0^v \mathrm{dn}^2(v; k)\,\mathrm{d}v; \\
Z_1(v; k) &= -\frac{E}{K} v - \int_0^v \mathrm{cs}^2(v; k)\,\mathrm{d}v; \\
Z_2(v; k) &= -\frac{E}{K} v - k'^2 \int_0^v \mathrm{sc}^2\,(v; k)\,\mathrm{d}v; \\
Z_3(v; k) &= -\frac{E}{K} v + k'^2 \int_0^v \mathrm{nd}^2\,(v; k)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ak je argument

$$v = \mathrm{i}\alpha$$

vo vzťahoch (6) imaginárny, pomocou Jacobiho imaginárnej transformácie [2, str. 149] bude

$$\begin{aligned}
Z_0(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\int_0^\alpha \mathrm{dc}^2\,(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha; \\
Z_1(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\int_0^\alpha \mathrm{ns}^2\,(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha; \\
Z_2(i\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}k'^2\int_0^\alpha \mathrm{sn}^2\,(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha; \\
Z_3(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}k'^2\int_0^\alpha \mathrm{cd}^2\,(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned} \tag{7}$$

Na základe vzťahov [3, str. 124–126]

$$\int_0^\alpha \mathrm{dc}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha = \alpha - \int_0^\alpha \mathrm{dn}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha + \mathrm{sc}(\alpha; k')\,\mathrm{dn}(\alpha; k');$$

$$\int_0^\alpha \mathrm{ns}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha = \alpha + \int_0^\alpha \mathrm{cs}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha;$$

$$k'^2 \int_0^\alpha \mathrm{sn}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha = \alpha + k^2 \int_0^\alpha \mathrm{sc}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha - \mathrm{sc}(\alpha; k')\,\mathrm{dn}(\alpha; k');$$

$$k'^2 \int_0^\alpha \mathrm{cd}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha = \alpha - k^2 \int_0^\alpha \mathrm{nd}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha$$

prepíšme relácie (7) do tvaru

$$\begin{aligned}
Z_0(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\left\{\alpha - \int_0^\alpha \mathrm{dn}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha + \mathrm{sc}(\alpha; k')\,\mathrm{dn}(\alpha; k')\right\};\\
Z_1(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\left\{\alpha + \int_0^\alpha \mathrm{cs}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha\right\};\\
Z_2(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\left\{\alpha + k^2\int_0^\alpha \mathrm{sc}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha - \mathrm{sc}(\alpha; k')\,\mathrm{dn}(\alpha; k')\right\};\\
Z_3(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\frac{E}{K}\mathrm{i}\alpha + \mathrm{i}\left\{\alpha - k^2\int_0^\alpha \mathrm{nd}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha\right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Z rovníc (6) pre reálne hodnoty argumentu α a komplementárny modul k' vyplýva

$$\begin{aligned}
Z_0(\alpha; k') &= -\frac{E'}{K'}\alpha + \int_0^\alpha \mathrm{dn}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha;\\
Z_1(\alpha; k') &= -\frac{E'}{K'}\alpha - \int_0^\alpha \mathrm{cs}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha;\\
Z_2(\alpha; k') &= -\frac{E'}{K'}\alpha - k^2\int_0^\alpha \mathrm{sc}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha;\\
Z_3(\alpha; k') &= -\frac{E'}{K'}\alpha + k^2\int_0^\alpha \mathrm{nd}^2(\alpha; k')\,\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dosadením z rovností (9) do vzťahov (8) máme výsledky

$$Z_0(\mathrm{i}\alpha; k) = -\mathrm{i}\left\{Z_0(\alpha; k') - \mathrm{sc}\,(\alpha; k')\,\mathrm{dn}\,(\alpha; k') + \alpha\left[\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right]\right\};$$

$$Z_1(\mathrm{i}\alpha; k) = -\mathrm{i}\left\{Z_1(\alpha; k') + \alpha\left[\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right]\right\};$$

$$Z_2(\mathrm{i}\alpha, k) = -\mathrm{i}\left\{Z_2(\alpha; k') + \mathrm{sc}\,(\alpha; k')\,\mathrm{dn}\,(\alpha; k') + \alpha\left[\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right]\right\};$$

$$Z_3(\mathrm{i}\alpha; k) = -\mathrm{i}\left\{Z_3(\alpha; k') + \alpha\left[\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right]\right\},$$

z ktorých vzhľadom na Legendreovu reláciu [2, str. 129]

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$$

vychádzajú transformačné vzťahy Jacobiho transcendent druhého druhu {(1); (2)} na tvar s reálnym argumentom

$$\begin{aligned} Z_0(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\mathrm{i}\left\{Z_0(\alpha; k') - \mathrm{sc}\,(\alpha; k')\,\mathrm{dn}\,(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\}; \\ Z_1(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\mathrm{i}\left\{Z_1(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\}; \\ Z_2(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\mathrm{i}\left\{Z_2(\alpha; k') + \mathrm{sc}\,(\alpha; k')\,\mathrm{dn}\,(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\}; \\ Z_3(\mathrm{i}\alpha; k) &= -\mathrm{i}\left\{Z_3(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Vytvorme rozdiel $Z_2(v; k) - Z_0(v; k)$. Na základe definičných relácií (1) a (2)

$$Z_2(v; k) - Z_0(v; k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \frac{\vartheta_2\left(\frac{v}{2K}; \mathrm{i}\frac{K'}{K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2K}; \mathrm{i}\frac{K'}{K}\right)},$$

resp. vzhľadom na rovnosť (4)

$$\begin{aligned} Z_2(v; k) - Z_0(v; k) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \mathrm{cn}\,(v; k) = \\ &= -\mathrm{sc}\,(v; k)\,\mathrm{dn}\,(v; k). \end{aligned} \tag{11}$$

Pomocou vzťahu (11) možno rovnice (10a) a (10c) prepísať do jednoduchého tvaru

$$Z_0(i\alpha; k) = -i\left\{Z_2(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\};$$
$$Z_2(i\alpha; k) = -i\left\{Z_0(\alpha; k') + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right\}, \tag{12}$$

ktorý je analogický s tvarom rovníc (10b) a (10d).

Zhrnutie:

Podľa Jacobiho definície (1) sa v práci uvažujú funkcie (2), ktoré spolu s funkcou (1) sú Jacobiho transcendenty druhého druhu (dzétafunkcie). Úpravou druhých logaritmických derivácií [2, str. 142] Jacobiho thétafunkcií (3) odvodené relácie (5) integrovaním dávajú vzťahy (6), z ktorých na základe Jacobiho imaginárnej transformácie [2, str. 149] vychádzajú rovnosti (7). Úpravou integrálnych výrazov v rovnostiach (7) formulované vzťahy (8), vzhľadom na rovnosti (9), po použití Legendreovej relácie [2, str. 129] poskytujú transformačné vzťahy (10), resp. (12) Jacobiho transcendent druhého druhu na tvar s reálnym argumentom.

LITERATÚRA

[1] Ахиезер Н. И., *Элементы теории эллиптических функций*, Москва—Ленинград 1948.

[2] Magnus W., Oberhettinger F., *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2. Auflage, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1948.

[3] Ryshik I. M., Gradstein I. S., *Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln*. Berlin 1957.

Došlo 22. 12. 1960.

Katedra fyziky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského v Bratislave

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ ВТОРОГО РОДА В ВИД С ВЕЩЕСТВЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

Ян Храпан

Резюме

По определению Якоби (1) в работе рассматриваются функции (2), которые вместе с функцией (1) являются трансцендентными функциями Якоби второго рода (дзета-функции). Преобразованием вторых логарифмических производных [2, стр. 142] тэта-функций Якоби (3) найденные соотношения (5) интегрированием дают сотношения (6), из которых на основе мнимого преобразования Якоби [2, стр. 149] получаются уравнения (7). Преобразованием интегральных выражений в уравнениях (7) формулированы соотношения (8), из которых используя равенство (9) и применив соотношение Лежандра [2, стр. 129] получаются соотношения трансформации (10) и (12) трансцендентных функций Якоби второго рода в вид с вещественным аргументом.

TRANSFORMATION DES JACOBISCHEN TRANSZENDENTEN ZWEITER GATTUNG AUF DIE FORM MIT REALEM ARGUMENT

Ján Chrapan

Zusammenfassung

Nach der Jacobischen Definition (1) werden in der Arbeit die Funktionen (2) betrachtet, die zusammen mit der Funktion (1) Jacobische Transzendenten zweiter Gattung sind (Zeta-Funktionen). Die durch Anordnung der zweiten logaritmischen Derivationen [2, S. 142] der Jacobischen Thetafunktionen (3) abgeleiteten Relationen (5) ergeben durch Integrierung die Beziehungen (6), aus denen auf Grund der Jacobischen imaginären Transformationen [2, S. 149] Identitäten (7) entstehen. Durch Anordnung der Integralausdrücke in den Identitäten (7) formulierten Beziehungen (8), mit Rücksicht auf die Identitäten (9) nach Anwendung der Legendre-Relation [2, S. 129], ergeben die Transformationsbeziehungen (10), resp. (12) den Jacobischen Transzendenten zweiter Gattung auf die Form mit realem Argument.