Ondrej Dreveňák

Структурно упорядоченные дистрибутивные Ω-группы с базисом

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 1, 11--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127045

Mat. Čas. 25, 1975, No 1, 11—21

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ Ω – ГРУППЫ С БАЗИСОМ

ОНДРЕЙ ДРЕВЕНЯК (ONDREJ DREVEŇÁK)

Частично упорядоченные группы с операторами изучались в работах Черемисина [5], Смирнова [9], [10] и Силади [11]. Архимедовские частично упорядоченные Ω-группы изучал Е. Габович [12]. Понятие $F\Omega$-группы определил А. И. Черемисин [5]; $F\Omega$-группа является обобщением понятия l-группы и одновременно обобщением понятия F-кольца (Г. Биркгоф, Р. С. Пирс [2]). Конрад [4] доказал, что l-группа, удовлетворяющая условию

(F): *каждое ограниченное дизъюнктное подмножество из G конечное*, может быть сконструирована из линейно упорядоченных групп с помощью последовательности операций кардинальных сумм и лексикографических расширений ([4] теорема 6.1.). В этой статье обобщается выше приведенная теорема Конрада для дистрибутивных $F\Omega$-групп; одновременно обобщается и теорема А. И. Черемисина, касающаяся дистрибутивных $F\Omega$-групп с конечным числом носителей. Докажем, что структурно упорядоченная дистрибутивная $F\Omega$-группа G является дискретной лексикографической суммой линейно упорядоченных Ω-групп тогда и только тогда, если она удовлетворяет условию (F).

1. Основные понятия

Припомним в начале основные определения (сравни Курош [8], Черемисин [5]). Пусть дана группа G (не обязательно коммутативная) записана аддитивно; ее нейтральный элемент обозначается 0. Пусть в множестве G дана система операторов Ω, причем каждый оператор $\omega \in \Omega$ — n-арный, где $n = n(\omega) \geqq 1$.

Определение 1. *Группа G называется Ω-группой, если операторы из Ω и групповая операция связаны следующим равенством для всех $\omega \in \Omega$*

$$00 \ldots 0\omega = 0,$$

где левый элемент 0 стоит n-раз, $n = n(\omega)$.

Сама исходная группа G называется аддитивной группой соответствующей Ω-группы. Подмножество H Ω-группы G называется Ω-подгруппой в G, если H является подгруппой аддитивной группы G и если H одновременно замкнута относительно всех операторов $\omega \in \Omega$.

Определение 2. *n-арный оператор $\omega \in \Omega$ группы G называется дистрибутивным, если для любых элементов $b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ и для каждого i, $(1 \leqq i \leqq n)$ выполняется соотношение*

$$a_1a_2 \ldots a_{i-1}(a_i + b)a_{i+1} \ldots a_n\omega =$$
$$= a_1a_2 \ldots a_n\omega + a_1a_2 \ldots a_{i-1}ba_{i+1} \ldots a_n\omega .$$

Если каждый оператор $\omega \in \Omega$ дистрибутивен, то G называется дистрибутивной Ω-группой. В дистрибутивной Ω-группе очевидно

$$x_1x_2 \ldots x_{i-1}(-x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega = -x_1x_2 \ldots x_{i-1}x_ix_{i+1} \ldots x_n\omega .$$

Определение 3. *Пусть G является Ω-группой. Предположим, что на G определено частичное упорядочение такое, что*

(а) $a, b, c, d \in G,\ a \leqq b \Rightarrow c + a + d \leqq c + b + d$;

(б) *для каждого оператора ω и каждого упорядоченного множества $n = n(\omega)$ элементов $0 \leqq a_i \in G$ имеет место неравенство*

$$a_1a_2 \ldots a_n\omega \geqq 0 .$$

Тогда G называется частично упорядоченной Ω-группой.

Частично упорядоченная Ω-группа G, в которой любые два элемента a, b сравнимы, называется линейно упорядоченной. Частично упорядоченная Ω-группа G называется структурно упорядоченной Ω-группой, если она является структурой относительно своего частичного порядка. Структурно упорядоченные группы мы будем просто называть l-группы.

Определение 4. *Структурно упорядоченная Ω-группа G называется $F\Omega$-группой, если*

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow x_1x_2 \ldots x_{i-1}ax_{i+1} \ldots x_n\omega \wedge b = 0 ,$$

всякий раз, когда $\omega \in \Omega$, $a, b \in G$, $x_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n = n(\omega))$.

Каждую структурно упорядоченную группу G можно считать дистрибутивной $F\Omega$-группой (если $\Omega = \emptyset$).

Определение 5. *Подмножество H дистрибутивной Ω-группы называется идеалом Ω-группы G, если*

(1) *H является аддитивной подгруппой Ω-группы G;*

(2) $-g + h + g \in H$ *всякий раз, когда* $h \in H$, $g \in G$;

(3) $g_1g_2 \ldots g_{i-1}hg_{i+1} \ldots g_n\omega \in H$ *всякий раз, когда* $\omega \in \Omega$, $h \in H$, g_1, g_2, $\ldots$, $g_n \in G$ *и* $1 \leqq i \leqq n = n(\omega)$.

Под разложением Ω-группы G по идеалу H будем понимать разложение аддитивной группы этой Ω-группы по H в качестве нормальной подгруппы.

Примечание 1. Множество $P(G) = \{x \in G : x \geqq 0\}$, где G частично упорядоченная Ω-группа, называется положительным конусом G. Легко проверяется, что

1. P содержит 0;
2. P не содержит никаких двух противоположных элементов из G, отличных от нуля;
3. P есть нормальная Ω-подполугруппа в G, т. е. подмножество из G, замкнутое относительно сложения в G и операторов из Ω и допустимое относительно всех внутренних автоморфизмов аддитивной группы G.

2. Прямые, кардинальные и лексикографические Ω-суммы

Пусть в Ω-групе G данные Ω-подгруппы B_i, $i \in I$. Обозначим $\bar{B}_i$ Ω-подгруппу, порожденную в G всеми B_j, где $j \in I$, $j \neq i$. Следующее определение прямой суммы Ω-групп отличается лишь формально от определения, приведенного в [8], стр. 164.

Определение 6. *Ω-группа G является прямой суммой своих Ω-подгрупп B_i, $i \in I$, если удовлетворено следующим условиям* (α_1), (α_2) и (β):

(α_1) *Если* $i \in I$, $a \in B_i$, $b \in \bar{B}_i$, *то* $a + b = b + a$,

(α_2) *Если* $\omega \in \Omega$, $n = n(\omega)$, $i \in I$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B_i$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \bar{B}_i$, *потом*

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)\omega = a_1a_2 \ldots a_n\omega + b_1b_2 \ldots b_n\omega .$$

(β) *Каждый элемент* $0 \neq a \in G$ *можно (с точностью до порядка слагаемых) записать лишь одним способом в виде суммы ненулевых элементов, из которых всякий принадлежит к разным из данных Ω-подгрупп, т. е.*

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_k ,$$

где $a_l \in B_{i_l}$, $l = 1, 2, \ldots, k$; $i_l \neq i_m$ *для* $l \neq m$.

При том же обозначении как в определении 6, элемент a_l называется компонентой элемента a в подгруппе B_{i_l}; если $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, положим $a_j = 0$. Пишем также $a_l = a[B_{i_l}]$.

Понятие кардинальной Ω-суммы частично упорядоченных Ω-групп и лексикографического расширения структурно упорядоченной Ω-группы ввел Черемисин [5].

Определение 7. *Частично упорядоченная Ω-группа G называется кардинальной Ω-суммой частично упорядоченных Ω-подгрупп B_i $(i \in I)$ (символично $G = \sum_{i \in I} \oplus B_i$), если:*

(1) *Ω-группа G — прямая сумма Ω-подгрупп $B_i (i \in I)$;*

(2) *$P(G)$ состоит из всех тех элементов $a \in G$, для которых имеет место $a[B_i] \in P(B_i)$ для всех $i \in I$.*

Кардинальную Ω-сумму G конечного числа частично упорядоченых Ω-подгрупп $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем записывать

$$G = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n.$$

Определение 8. *Структурно упорядоченная Ω-группа G называется лексикографическим расширением структурно упорядоченной Ω-группы H, если:*

1. *H — l-идеал в Ω-группе G,*
2. *Ω-фактор-группа G/H линейно упорядоченная,*
3. *каждый положительный элемент, принадлежащий $G - H$, больше каждого элемента из H.*

Если выполнены условия из предыдущего определения, потом обозначим $G = \langle H \rangle$. Говорим, что лексикографическое расширение $G = \quad H$ является не тривиальным, когда $G \neq H$. Всякая линейно упорядоченная группа $G \neq \{0\}$ является не тривиальным лексикографическим расширением (можем писать $G = \langle\{0\}\rangle$).

Следующее определение дискретной лексикографической суммы линейно упорядоченных Ω-групп аналогично с определением дискретной лексикографической суммы линейно упорядоченных групп, введенной Конрадом [4].

Определение 9. *Структурно упорядоченная дистрибутивная $F\Omega$-группа G называется дискретной лексикографической суммой линейно упорядоченных Ω-подгрупп C_γ^1 $(\gamma \in \Gamma)$, если существует последовательность C^n $(n = 1, 2, \ldots)$ l-идеалов Ω-группы G такая, что*

(*i*) $C^1 \subseteq C^2 \subseteq \ldots, \; \bigcup_{n-1}^{\infty} C^n = G,$

(*ii*) $C^1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \oplus C_\gamma^1,$

(*iii*) *для* $n > 1, \; C^n = \sum_{\gamma \in \Gamma n} \oplus C_\gamma^n,$

где каждая C_γ^n — выпуклая Ω-подгруппа Ω-группы G, причем C_γ^n — нетривиальное лексикографическое расширение конечной кардинальной Ω-суммы двух или больше компонент C_β^{n-1}, или C_γ^n равно некоторому C_β^{n-1}.

В дальнейшем будем считать, что G является дистрибутивной структурно упорядоченной $F\Omega$-группой. Ω-подгруппу B в G, которая является одновременно подструктурой в G, будем называть $l\Omega$-подгруппой в G. Элементы $a_i \in G$ называются дизъюнктными, если они строго положительны и $a_i \wedge a_j = 0$ для $i \neq j$. Для $x \in G$, $A \subset G$ будем писать $x \wedge A = 0$, если $|x| \wedge |a| = 0$ для каждого $a \in A$. Для $A \subset G$ поставим $A^\delta = \{x \in G : |x| \wedge |a| = 0$ для каждого $a \in A\}$. Множества $A, B \subset G$ непересекающиеся, если $A \subset B^\delta$. Система множеств $\mathscr{M}$ дизъюнктная, если любые два множества $A, B \in \mathscr{M}$ непересекающиеся. $\mathscr{M}$ является максимальной дизъюнктной системой, если $\mathscr{M}$ не собственное подмножество ни одной дизъюнктной системы.

Лемма 1. *Пусть $\omega \in \Omega$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in P(G)$. Предположим, что хотя бы два из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ дизъюнктны; тогда $b_1 b_2 \ldots b_n \omega = 0$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $b_i \wedge b_j = 0$. Положим $b_1 b_2 \ldots b_n \omega = x$. Из определения $F\Omega$-группы вытекает $x \wedge b_j = 0$ и из этого равенства следует $x \wedge b_1 b_2 \ldots b_n \omega = 0$, т. е. $x = x \wedge x = 0$.

Лемма 2. *Пусть $\omega \in \Omega$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$. Если для некоторых двух элементов b_i, b_j имеет место $|b_i| \wedge |b_j| = 0$, $(i \neq j)$, тогда $b_1 b_2 \ldots b_n \omega = 0$.*

Доказательство. Пусть g — любой элемент из G. Если обозначим $g^+ = g \vee 0$ и $g^- = -(g \wedge 0)$, то $g = g^+ - g^-$. Элемент $b_1 b_2 \ldots b_n \omega$ можем выразить следующим образом

$$b_1 b_2 \ldots b_n \omega = (b_1^+ - b_1)(b_2^+ - b_2) \ldots (b_n^+ - b_n^-)\omega .$$

На основании дистрибутивности оператора ω — элемент $b_1 b_2 \ldots b_n \omega$ равен сумме элементов вида

$$(*) \qquad (-1)^k b_1^{(\varepsilon_1)} b_2^{(\varepsilon_2)} \ldots b_n^{(\varepsilon_n)} \omega ,$$

где $e_i \in \{+, -\}$ и k — число тех элементов в выражении $(*)$, которые равны символу —. Из предположения $|b_i| \wedge |b_j| = 0$ вытекает $b_i^{(\varepsilon_i)} \wedge b_j^{(\varepsilon_j)} = 0$. Потому по лемме 1

$$b_1^{(\varepsilon_1)} b_2^{(\varepsilon_2)} \ldots b_n^{(\varepsilon_n)} \omega = 0 ,$$

потом и $b_1 b_2 \ldots b_n \omega = 0$.

Лемма 3. *Пусть A является такой l-подгруппой в G, что для каждого $\omega \in \Omega$ и для каждого $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P(A)$ имеет место $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A$. Тогда A является Ω-подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$. Подобно лемме 2 элемент $b_1 b_2 \dots b_n \omega$ равен сумме элементов вида (*). По предположению леммы

$$b_1^{(\varepsilon_1)} b_2^{(\varepsilon_2)} \dots b_n^{(\varepsilon_n)} \omega \in A\,.$$

Потом и элементы вида (*) принадлежат A и следовательно $b_1 b_2 \dots b_n \omega \in \in A$.

Пусть $\{B_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ — дизъюнктная система выпуклых l-подгрупп l-группы G. Для $\alpha \in \Gamma$ обозначим $\bar{B}_\alpha$ l-подгруппу порожденную в G множеством $\cup B_\beta$, где $\beta \neq \alpha$. Тогда имеет место:

Лемма 4. *$x \wedge y = 0$ для каждого $0 \leqq x \in \bar{B}_\alpha$ и каждого $0 \leqq y \in B_\alpha$.*

Доказательство. Возьмем любые $0 < x \in \bar{B}_\alpha$, $0 < y \in B_\alpha$. Элемент x можем выразить в виде

$$x = x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \dots + x_{\beta_n}\,,$$

где $0 \leqq x_{\beta_i} \in B_{\beta_i}$; $\beta_i \neq \alpha$, $\beta_i \in \Gamma$. Так как l-подгруппы B_{β_i} и B_α дизъюнктны, имеет место $x_{\beta_i} \wedge y = 0$ и из этого следует (сравни [6], стр. 105) $x \wedge y = 0$.

Теорема 1. *Если $\{B_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ — дизъюнктная система выпуклых $l\Omega$-подгрупп дистрибутивной структурно упорядоченной $F\Omega$-группы G и если l-подгруппа B порожденная объединением B_γ, то B является Ω-подгруппой в G причем она равна кардинальной Ω-сумме этих $l\Omega$-подгрупп.*

Доказательство. (а) Пусть B l-подгруппа структурно упорядоченной $F\Omega$-группы G, порожденная объединением $l\Omega$-подгрупп B_γ. По [4] (теоремы 2.1) l-группа B является кардинальной суммой l-подгрупп B_γ. Докажем, что B является Ω-подгруппой в G. Пусть $\omega \in \Omega$, $0 \leqq b_i \in B$ $(1 \leqq \leqq i \leqq n = n(\omega))$. Существует конечное подмножество $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} \subset \subset \Gamma$ такое, что каждое $b_i \in B$ обладает записью вида

$$b_i = b^i_{\gamma_1} + b^i_{\gamma_2} + \dots + b^i_{\gamma_m}\,,$$

где $0 \leqq b^i_{\gamma_m} \in B_{\gamma_m}$. Поставим $x = b_1 b_2 \dots b_n \omega$. По дистрибутивности оператора ω мы получаем: элемент x можно выразить в виде суммы элементов

$$y = b^1_{\alpha(1)} b^2_{\alpha(2)} \dots b^n_{\alpha(n)} \omega\,,$$

где $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n) \in \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$. Если существует $\gamma_j \in \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ такое, что $\{b^1_{\alpha(1)}, b^2_{\alpha(2)}, \dots, b^n_{\alpha(n)}\} \subset B_{\gamma_j}$, то $y \in B_{\gamma_j} \subseteq B$ и следовательно $y \geqq 0$. Если в множестве $\{b^1_{\alpha(1)}, b^2_{\alpha(2)}, \dots, b^n_{\alpha(n)}\}$ встречаются хотя бы два ненулевых элемента из разных B_{γ_j}, то согласно лемме 1 имеет место $y = 0$. Значит, элемент x принадлежит B. Из леммы 3 дальше следует, что B является Ω-подгруппой в G.

(б) Обозначим $\bar{B}_\gamma$ l-подгруппу порожденную в B всеми B_{γ_j} для $\gamma_j \neq \gamma$, которая согласно (a) является $l\Omega$-подгруппой в G. Если мы хотим доказать, что $B = \sum_{\gamma \in \Gamma} \oplus B_\gamma$, достаточно проверить условие (α_2) из определения прямой Ω-суммы. Пусть $\omega \in \Omega$, $n = n(\omega)$, $\gamma \in \Gamma$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B_\gamma$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \bar{B}_\gamma$. На основании дистрибутивности оператора ω и из лемм 4,1 и 2 получим

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)\omega =$$
$$= a_1 a_2 \ldots a_n \omega + b_1 b_2 \ldots b_n \omega .$$

Значит, условие (α_2) выполнено и B является прямой суммой Ω-подгрупп B_γ.

3. Базис в структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группе

Элемент $s \in G$ называется базисным, если $0 < s$ и множество $\{x \in G : : 0 < x \leqq s\}$ является цепью. Подмножество $S \subset G$ является базисом в G, если оно максимальным дизъюнктным подмножеством G и каждое $s \in S$ является базисным элементом. Пусть $S = \{0 < a_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ является базисом структурно упорядоченной $F\Omega$-группы G. Пусть для каждого $\gamma \in \Gamma$ A_γ^0 — выпуклая структурно упорядоченная подгруппа в G, порожденная элементом a_γ. Так как интервал $[0, a_\gamma]$ — цепь, то A_γ^0 является линейно упорядоченной группой (Конрад [4], лемма 2.1). Каждая такая линейно упорядоченная подгруппа A_γ^0 содержится в максимальной выпуклой цепи из G; последнюю обозначим A_γ. Положим $\mathscr{M} = \{A_\gamma\}$ ($\gamma \in \Gamma$). Следующая лемма дает конструктивное описание l-подгруппы A_γ.

Лемма 5. $A_\gamma = \{a_\gamma\}^{\delta\delta}$ *для каждого* $a_\gamma \in S$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Обозначим $\{a_\gamma\}^{\delta\delta} = A$. Докажем сначала, что $A \subset A_\gamma$. Потому что $A_\gamma^0 \subset A$, достаточно доказать, что A является выпуклой линейно упорядоченной l-подгруппой l-группы G. Согласно [6], теорема 12 (стр. 119) A является выпуклой l-подгруппой в G. Нужно еще доказать, что A линейно упорядоченная l-подгруппа, т. е., для любого $0 < x$, $y \in A$ справедливо $x \wedge y > 0$. Исходя из противного, предположим, что в A существуют элементы $x > 0$, $y > 0$ такие, что $x \wedge y = 0$. Согласно предположению a_γ является базисным элементом в G. Из неравенств $0 \leqq x \wedge a_\gamma \leqq a_\gamma$, $0 \leqq y \wedge a_\gamma \leqq a_\gamma$ следует $x \wedge a_\gamma \leqq \leqq y \wedge a_\gamma$ или $x \wedge a_\gamma \geqq y \wedge a_\gamma$. Если имеет место первая возможность, то

$$x \wedge (x \wedge a_\gamma) \leqq x \wedge (y \wedge a_\gamma) .$$

Так как $x \wedge y = 0$, мы имеем

$$0 \leqq x \wedge a_\gamma \leqq 0 \wedge a_\gamma = 0 ,$$

и следовательно $x \wedge a_\gamma = 0$. Тогда $x \in \{a_\gamma\}^\delta$ и согласно предположению $x \in A$, и поэтому $x = 0$, что является противоречием. Доказательство для второй возможности аналогично.

Теперь покажем, что A является максимальной выпуклой линейно упорядоченной l-подгруппой в G такой, что $A_\gamma^0 \subset A$. Пусть B является любой выпуклой линейно упорядоченной l-подгруппой в G такой, что $A_\gamma^0 \subset B$. Мы хотим доказать, что $B \subset A$. Пусть $0 < b \in B$. Предположим, что $b \notin A$. Таким образом существует $0 < c \in \{a_\gamma\}^\delta$ такое, что имеет место

$$c \wedge b = c_1 > 0 .$$

Так как $0 < c_1 \leqq c$, $0 < c_1 \leqq b$ из выпуклости множеств $\{a_\gamma\}^\delta$, B получим $c_1 \in \{a_\gamma\}^\delta$, $c_1 \in B$. Так как $a_\gamma \in A$, $c_1 \wedge a_\gamma = 0$ и $a_\gamma \in A_\gamma^0 \subset B$, получается противоречие с линейной упорядоченностью B. Таким образом мы доказали, что $b \in A$ и следовательно $P(B) \subset A$. Потом $- P(B) \subset A$, $P(B) \cup (- P(B)) = B \subset A$. Из этого следует $A_\gamma \subset A$, и следовательно $A = A_\gamma$.

В качестве непосредственного следствия из леммы 5 получаем:

Лемма 6. *Для каждого $\gamma \in \Gamma$ имеет место $(A_\gamma)^{\delta\delta} = A_\gamma$.*

Лемма 7. *$\mathcal{M}$ является максимальной дизъюнктной системой выпуклых l-подгрупп в G.*

Доказательство. Согласно [4], Лемма 3.1, система $\mathcal{M}$ дизъюнктная. Пусть $0 < g \in G$. Так как S — базис в G, существует $\gamma \in \Gamma$ так, что $a_\gamma \wedge g > 0$. Потому что $a_\gamma \in A_\gamma$, $\mathcal{M}$ является максимальной дизъюнктной системой в G.

Лемма 8. *Если X — максимальная выпуклая линейно упорядоченная l-подгруппа в G, то $X \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. В силу леммы 7 существует $\gamma \in \Gamma$ такое, что A_γ и X не дизъюнктны. Согласно [4] Леммы 3.1 имеет место $X \subset A_\gamma$ или $A_\gamma \subset X$. Из максимальности цепей A_γ и X получаем $A_\gamma = X$.

Лемма 9. *Для каждого $\gamma_0 \in \Gamma$ справедливо следующее утверждение: $P(A_{\gamma_0})$ — множество всех элементов $x \in P(G)$ дизъюнктных со всеми элементами $y \in P(A_\gamma)$ для каждого $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \gamma_0$.*

Доказательство. Пусть $x \in P(A_{\gamma_0})$. Так как по лемме 7 $\mathcal{M}$ есть дизъюнктная система, имеет место $x \wedge y = 0$ для каждого $y \in P(A_\gamma)$ и каждого $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \gamma_0$. Обратно, пусть элемент $x \in P(G)$ дизъюнктный со всеми элементами $y \in P(A_\gamma)$ для $\gamma \neq \gamma_0$. Докажем, что $[0, x]$ является цепью. Предположим противное, пусть $[0, x]$ не является цепью. Тогда существуют несравнимые элементы $a, b \in [0, x]$. Положим

$$a_1 = a - a \wedge b, \quad b_1 = b - a \wedge b.$$

Имеет место $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_1 \wedge b_1 = 0$.

По предположению имеет место $x \wedge a_\gamma = 0$ для каждого $\gamma \neq \gamma_0$; это влечет $a_1 \wedge a_\gamma = 0$, $b_1 \wedge a_\gamma = 0$ для $\gamma \neq \gamma_0$. Поскольку S является базисом необходимо

$$a_2 = a_1 \wedge a_{\gamma 0} > 0, \quad b_2 = b_1 \wedge a_{\gamma 0} > 0.$$

Элементы a_2, b_2 несравнимы и принадлежат $A_{\gamma 0}$, что является противоречием. Значит, $[0, x]$ является цепью. Согласно лемме 3.1. (Конрад [4]), существует максимальная выпуклая линейно упорядоченная l-подгруппа $X \subset G$, такая, что $[0, x] \subset X$. По предположению и в силу леммы 8, $X = A_{\gamma 0}$. Таким образом доказано, что $x \in A_{\gamma 0}$.

Лемма 10. *Пусть $\{B_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma_0)$ система выпуклых l-подгрупп в G, удовлетворяющая условию:*

(d) *для каждого $\gamma \in \Gamma_0$ имеет место $P(B_\gamma) = \{x \in P(G) : x \wedge P\,(B_\delta) = 0$ для всех $\delta \neq \gamma$ в $\Gamma_0\}$.*

Тогда каждое B_γ является Ω-подгруппой в G.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in P(B_\gamma)$, $b \in P(B_\delta)$ $(\gamma, \delta \in \Gamma_0)$. Для любого b_i имеет место $b_i \wedge b = 0$ для каждого $b \in P(B_\delta)$ и каждого $\delta \neq \gamma$. Из определения $F\Omega$-группы G следует $b_1 b_2 \ldots b_n \omega \wedge b = 0$ для каждого $b \in P(B_\delta)$ и каждого $\delta \neq \gamma$. Потом в силу условия (d) элемент $b_1 b_2 \ldots b_n \omega$ принадлежит $P(B_\gamma)$. Дальше по лемме 3 B_γ является Ω-подгруппой в G.

Лемма 11. *Каждое A_γ является Ω-подгруппой в G.*

Утверждение вытекает из леммы 9 и леммы 10.

Теорема 2. *Структурно упорядоченная дистрибутивная $F\Omega$-группа G является дискретной лексикографической суммой линейно упорядоченных Ω-подгрупп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию* (F).

Доказательство. Предположим, что $F\Omega$-группа является дискретной лексикографической суммой линейно упорядоченных Ω-групп A_γ $(\gamma \in \Gamma)$. Тогда, очевидно, каждый положительный элемент из G больше самого конечного числа дизъюнктных элементов, и следовательно, G удовлетворяет (F). Обратно, пусть для структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группы G имеет место (F). Тогда согласно [4], G как l-группа является дискретной лексикографической суммой линейно упорядоченных групп A_γ $(\gamma \in \Gamma)$. Будем пользоваться обозначением из [4] (доказательство теоремы 6.1.). Пусть B_γ такие, как в [4]. В силу леммы 10 все B_γ являются Ω-подгруппами в G, так как они удовлетворяют условию (d). Согласно теореме 1 все C^n являются Ω-подгруппами в G и тогда по определению дискретной лексикографической суммы имеет место, что G является дискретной лексикографической суммой Ω-подгрупп A_γ.

В случае, когда множество операторов Ω пусто, теорема 2 редуцируется на теорему 6.1 (Конрад [4]).

Положительные элементы структурно упорядоченной группы G можно разбить на непересекающиеся классы относительно ортогональности следующим образом. Два положительных элемента x, $y \in G$ полагаем в один класс тогда и только тогда, когда $\{x\}^\delta = \{y\}^\delta$. Эти классы называются носителями. Понятие носителя ввел П. Жаффар в [7]. Пусть $\{x_i\}$ $(i \in I)$ является дизъюнктным подмножеством l-группы G и для каждого x_i пусть $x_i^\wedge$ является соответственным носителем. Тогда для $i, j \in I$, $i \neq j$ имеет место $x_i^\wedge \neq x_j^\wedge$. Из этого следует: если G имеет только конечное число носителей, то каждое дизъюнктное подмножество в G конечное. Обратно, если каждое дизъюнктное подмножество в G конечное, то G имеет лишь конечное число носителей. В качестве следствия из теоремы 2 получим:

Следствие 1. (А. И. Черемисин [5], *теорема* 1). *Дистрибутивная $F\Omega$-группа G тогда и только тогда имеет конечное число носителей, когда она может быть получена из конечного числа линейно упорядоченных дистрибутивных Ω-групп поочередным применением операций кардинальной суммы и лексикографического расширения.*

В случае, когда множество операторов Ω пусто, следствие 1 совпадает с теоремой Конрада в [3] (сравин тоже [6], теорему 14, стр. 126).

Структурно упорядоченное кольцо R называется функциональным (или, короче, F-кольцом) (см. [6], гл. IX, §2), если для любых a, b, $x \in R$

$$a \wedge b = 0 \quad \text{и} \quad x \geqq 0 \Rightarrow ax \wedge b = xa \wedge b = 0 .$$

F-кольцо можно считать структурно упорядоченной $F\Omega$-группой с множеством унарных операторов $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 — множество всех операторов вида ω_c^1 $(c \in P(R))$, причем $a\omega_c^1 = ac$ для каждого $a \in R$, и Ω_2 — множество всех операторов ω_c^2 $(c \in P(R))$, причем $a\omega_c^2 = ca$ для каждого $a \in R$. Так как каждый элемент $c \in R$ можно выразить в виде $c = c_1 - c_2$, где $c_1, c_2 \in P(R)$, каждая Ω-подгруппа в R является подкольцом кольца R. Из следствия 1, значит, получаем:

Следствие 2. (А. И. Черемисин [5], *теорема* 2.) *F-кольцо тогда и только тогда имеет конечное число носителей, когда G может быть получено из конечного числа линейно упорядоченных колец поочередным применением операций кардинальной суммы и лексикографического расширения.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] BIRKHOFF, G.: Теория структур. Ил. Москва, 1952.
[2] BIRKHOFF, G., PIERCE R. S.: Lattice-ordered rings. Anais. Acad. Brasil. Si., *28*, 1956, 41—69.
[3] CONRAD, P.: The structure of a lattice-ordered group with a finite number of disjoint elements. Michigan math. J., *7*, 1960, 171—180.
[4] CONRAD, P.: Some structure theorems for lattice-ordered groups. Trans. Amer. math. Soc., *99*, 1961, 1—29.
[5] ЧЕРЕМИСИН, А. И.: Дистрибутивные $F\Omega$-группы с конечным числом носителей. Сибирск. матем. ж., *9*, 1968, 177—187.
[6] FUCHS, L.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965.
[7] JAFFARD, P.: Theórie des filets dans les groupes reticulés. C. R. Acad. Sci. Paris, *230*, 1950, 1024—1025.
[8] KUROŠ, A. G.: Kapitoly z obecnej algebry. Praha 1968.
[9] СМИРНОВ, Д. М.: Упорядоченные мультиоператорные группы. Сибирск. матем. ж., *6*, 1965, 433—458.
[10] СМИРНОВ, Д. М.: О приведенно свободных мультиоператорных группах. Докл. АН СССР, *150*, 1963, 44—47.
[11] SZILÁGYI, M.: On ordered Ω-groups. Rev. roum. math. pures et appl., *17*, 1972, 1439—1450.
[12] ГАБОВИЧ, Е.: Об архимедовски упорядоченных Ω-ргуппах. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, *129*, 1962, 19—22.

Поступило 2. 4. 1973

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Švermova 5
040 01 Košice