Matematický časopis

Beloslav Riečan

Абстрактное построение меры Лебега из меры Бореля

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 1, 49--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127044

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Mat. Čas. 25, 1975, No. 1, 49—58

АБСТРАКТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ МЕРЫ ЛЕБЕГА ИЗ МЕРЫ БОРЕЛЯ

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (BELOSLAV RIEČAN)

Целью настоящей заметки является пополнение меры определенной на некоторой подструктуре K заданной структуры H. Определение меры и условия накладываемые на H мы приняли следуя В. С. Варадараяну (см. [1]). Проблема абстрактного пополнения была автору поставлена Г. Е. Шиловым и здесь она полностью решена для вероятностных мер являющихся оценкой (см. пример 2.1 и предложение 2.3).

1. Логика как область определения меры

Пусть дана структура H с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 (см. [2]; структурные операции мы будем обозначать через $\cup$ и $\cap$). Отображение $\perp : a \to a^{\perp}$ называется ортодополнением (orthocomplementation) если выполнены следующие условия (см. [1], также [3], [4]):

1.1. Отображение $\perp$ взаимооднозначно.

1.2. Если $a, b \in H$ и $a \leqq b$, то $b^{\perp} \leqq a^{\perp}$.

1.3. Для всех $a \in H$ справедливо $a^{\perp\perp} = a$.

1.4. Для всех $a \in H$ справедливо $a \cap a^{\perp} = 0$.

1.5. Для всех $a \in H$ справедливо $a \cup a^{\perp} = 1$.

Структура H с ортодополнением $\perp$ называется логикой, если более того выполнены следующие условия:

1.6. Для всякой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из H существует в H верхняя грань $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ и нижняя грань $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.7. Если $a_1, a_2 \in H$ и $a_1 \leqq a_2$, то существует такой элемент $b \in H$, что $b \leqq a_1^{\perp}$ и $b \cup a_1 = a_2$.

Простыми примерами логики являются с одной стороны множество всех подмножеств данного множества X упорядоченное включением и с теоретико — множественным дополнением в качестве ортодополнения; с другой стороны—логикой является множество всех замкнутых линейных подпространств гильбертова пространства, упорядоченное включением, с соответствием $L \to L^{\perp}$ (ортогональное дополнение) в качестве ортодополнения. Именно этот второй пример играет некоторую роль в квантовой теории.

Лемма 1.1. *Если a, $b \in H$, $a \leqq b$, то $b = a \cup (b \cap a^{\perp})$.*

Доказательство. В силу 1.7 существует $c \leqq a^{\perp}$ так, что $b = c \cup a$. Но тогда $c \leqq b$, $c \leqq a^{\perp}$, значит $b = c \cup a \leqq (a^{\perp} \cap b) \cup a$. На другой стороне $a^{\perp} \cap b \leqq b$, $a \leqq b$, значит $(a^{\perp} \cap b) \cup a \leqq b$.

Определение 1.1. *Элементы a, b логики H мы будем называть ортогональными и писать $a \perp b$, если $a \leqq b^{\perp}$ (или, что есть то же самое, если $b \leqq a^{\perp}$).*

Лемма 1.2. *Пусть $a \perp b$, $b \leqq c$. Тогда $(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup b$.*

Доказательство. [1], гл. VI., стр. 123.

Лемма 1.3. *Если b, $c \in H$ и $b \leqq c$, то $b = c \cap (c \cap b^{\perp})^{\perp}$.*

Доказательство. Положим в лемме 1.2 $a = c^{\perp}$. Тогда $c \cap (c \cap b^{\perp})^{\perp} = (c^{\perp} \cup b) \cap c = (c^{\perp} \cap c) \cup b = b$.

Приведем теперь несколько определений следуя Г. Е. Шилову и Б. Л. Гуревичу (см. [5] §8, п. 7). (Конечно, мы эти определения переносим на любую логику.)

Определение 1.2. *Подструктуру K логики H мы будем называть кольцом, если из a, $b \in K$ вытекает $a \cap b^{\perp} \in K$. Кольцо K называется σ-кольцом, если для всякой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из K ограниченной сверху элементом из K также $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ принадлежит K. Кольцо называется Σ-кольцом, если для всякой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из K также $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ принадлежит K.*

Примечание 1.1. Очевидно, всякое Σ-кольцо является σ-кольцом. Если $1 \in K$ и K является σ-кольцом, то K является Σ-кольцом.

Примечание 1.2. Иногда пользуются другими названиями (см. П. Р. Халмош [6]). σ-кольцо в смысле Халмоша — это Σ-кольцо в смысле Шилова—Гуревича. Тогда удобно σ-кольцо в смысле Шилова—Гуревича называть δ-кольцом (см. предложения 1.1 и 1.2).

Предложение 1.1. *Если K—кольцо и если для всякой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из K и $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n$ принадлежит K, то K является σ-кольцом.*

Доказательство. Пусть a, $a_n \in K$, $a_n \leqq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $a \cap a_n^\perp \in K$, значит по условию предложения

$$a \cap (\vee a_n)^\perp = a \cap \wedge a_n^\perp = \wedge (a \wedge a_n^\perp) \in K.$$

Но из леммы 1.3 следует, что

$$\vee a_n = a \cap (a \cap (\vee a_n)^\perp)^\perp \in K.$$

Обратное утверждение справедливо при несколько более сильных условиях накладываемых на H.

Определение 1.3. *σ-полная структура S называется σ-непрерывной, если для всякой не убывающей последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ из S и всякого $a \in S$ справедливо $\vee (a_n \cap a) = (\vee a_n) \cap a$; и двойственно.*

Предложение 1.2. *Если H — σ-непрерывная логика и K — σ-кольцо, то K замкнутое относительно счетных нижних граней.*

Доказательство. Положим $b_n = \bigvee_{i=1}^n a_i^\perp$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $a_1 \cap b_n = a_1 \cap (\bigvee_{i=1}^n a_i^\perp) = a_1 \cap (\bigwedge_{i=1}^n a_i)^\perp \in K$, $a_1 \cap b_n \leqq a_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, значит $\bigvee_{n=1}^\infty (a_1 \cap b_n) \in K$. Кроме того, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ не убывающая последовательность, значит $\bigvee_{n=1}^\infty (a_1 \cap b_n) = a_1 \cap (\bigvee_{n=1}^\infty b_n)$. Таким образом

$$a_1 \cap (\bigwedge_{n=1}^\infty a_n)^\perp = a_1 \cap (\bigvee_{n=1}^\infty a_n^\perp) = a_1 \cap (\bigvee_{n=1}^\infty b_n) \in K$$

и наконец по лемме 1.3

$$\bigwedge_{n=1}^\infty a_n = a_1 \cap (a_1 \cap (\bigwedge_{n=1}^\infty a_n)^\perp)^\perp \in K.$$

Определение 1.4. *Пусть $K \subset H$ любое не пустое множество. Знаком $\sigma(K)$ (соотв. $\Sigma(K)$, $D(K)$, $S(K)$) мы будем обозначать наименьшее σ-кольцо (соотв. Σ-кольцо, соотв. множество замкнутое относительно нижних граней не возрастающих последовательностей и верхних граней ограниченных в $D(K)$ не убывающих последовательностей, соотв. множество замкнутое относительно нижних граней не возрастающих последовательностей и верхних граней не убывающих последовательностей) содержащее K.*

Предложение 1.3. *Пусть H — σ-непрерывная логика. Если K —*

структура, то $D(K)$, $S(K)$ структуры. Если K — кольцо, то $D(K)$, $S(K)$ кольца.

Доказательство. Пусть K — кольцо, $b \in K$ фиксированный элемент. Положим $L = \{a;\ a \cap b^{\perp} \in D(K)\}$. По условию $L \supset K$. Пусть $a_n \in L$, $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $(\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n) \cap b^{\perp} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} (a_n \cap b^{\perp}) \in D(K)$, значит $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n \in L$ и L замкнут относительно образования счетных нижних граней. Пусть, наоборот $a_n \leqq a_{n+1} \leqq a_0$, $a_0, a_n \in L$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $a_n \cap b^{\perp} \in D(K)$, $a_n \cap b^{\perp} \leqq a_0 \cap b^{\perp} \in D(K)$, значит $(\bigvee a_n) \cap b^{\perp} = \bigvee(a_n \cap b^{\perp}) \in D(K)$, значит и $\bigvee a_n \in L$. Мы доказали, что $L \supset D(K)$. Ввиду того $a \cap b^{\perp} \in D(K)$ для всяких $a \in D(K)$, $b \in K$.

Пусть теперь $a \in D(K)$ фиксировано. Положим $M = \{b;\ a \cap b\ \ \in D(K)\}$. По предыдущему $M \supset K$. Пусть $b_n \in M$, $b_n \geqq b_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $a \cap b_n^{\perp} \leqq a \in D(K)$, $a \cap b_n^{\perp} \leqq a \cap b_{n+1}^{\perp}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, значит

$$a \cap (\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n)^{\perp} = a \cap (\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n^{\perp}) = \bigvee_{n=1}^{\infty} (a \cap b_n^{\perp}) \in D(K)$$

и $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \in M$. Пусть, наоборот $b_n \leqq b_{n+1}$, $b_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $a \cap b_n^{\perp} \in D(K)$, $a \cap b_n^{\perp} \geqq a \cap b_{n+1}^{\perp}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, значит

$$a \cap (\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n)^{\perp} = a \cap \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n^{\perp} = \bigwedge (a \cap b_n^{\perp}) \in D(K)$$

и $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n \in M$. Таким образом M замкнуто относительно назначенных операций и $M \supset D(K)$.

Предложение 1.4. *Пусть H — σ-непрерывная логика. Если K — кольцо, то $D(K) = \sigma(K)$, $S(K) = \Sigma(K)$.*

Доказательство. Очевидно по предл. 1.1 и 1.2 $\sigma(K)$ является замкнутым относительно образования нижних граней не возрастающих последовательностей и верхних граней не убывающих последовательностей ограниченных элементами из $\sigma(K)$. Значит $\sigma(K) \supset D(K)$. С другой стороны, по предл. 1.3 $D(K)$ является кольцом замкнутым относительно нижних граней счетных подмножеств. Но тогда $D(K)$ σ-кольцо, значит $D(K) \supset \sigma(K)$. Равенство $S(K) = \Sigma(K)$ доказывается таким-же образом.

Предложение 1.5. *Пусть H — σ-непрерывная логика. Пусть K — структура, $a \in S(K)$, $b \in D(K)$, $a \leqq b$. Тогда $a \in D(K)$.*

Доказательство. Положим $L = \{c \in S(K);\ c \cap b \in D(K)\}$. $L \supset K$, так как $D(K)$ является структурой. Пусть $c_n \in L$, $c_n \leqq c_{n\ 1}$ $(n - 1, 2, \ldots)$.

Тогда $c_n \cap b \in D(K)$, $c_n \cap b \leqq c_{n+1} \cap b \leqq b \in D(K)$ $(n = 1, 2, \ldots)$,значит

$$(\bigvee_{n=1}^{\infty} c_n) \cap b = \bigvee_{n=1}^{\infty} (c_n \cap b) \in D(K),$$

и $\bigvee_{n=1}^{\infty} c_n \in L$. Если, наоборот $c_n \in L$, $c_n \geqq c_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $c_n \cap \cap b \geqq c_{n+1} \cap b$ $(n = 1, 2, \ldots)$, значит

$$(\bigwedge_{n=1}^{\infty} c_n) \cap b = \bigwedge_{n=1}^{\infty} (c_n \cap b) \in D(K)$$

и $\bigwedge_{n=1}^{\infty} c_n \in L$. Таким образом L замкнуто относительно верхних граней не убывающих последовательностей и нижних граней не возрастающих последовательностей. Из этого следует, что $L \supset S(K)$. Из того, что $a \in \in S(K)$ теперь следует, что $a = a \cap b \in D(K)$.

2. Определение и свойства меры

Определение 2.1. *Пусть K — подструктура логики H содержащая нулевой элемент $\boldsymbol{0}$. Мерой на K мы будем называть всякую функцию не отрицательную μ (∞ может входить в область значений), определенную на K, принимающую в точке $\boldsymbol{0}$ значение 0 и счетно-аддитивную, т. е. выполняющую следующее условие:*

Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ любая последовательность попарно ортогональных элементов из K и $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in K$, то $\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n)$.

Предложение 2.1. *Пусть K является кольцом и μ мерой на K. Тогда справедливо:*

a) *μ является конечно-аддитивной, т. е. $\mu(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i)$ для всяких попарно ортогональных элементов a_i из K.*

b) *μ является не убывающей функцией.*

Доказательство. Если $a_1, \ldots, a_n$ попарно ортогональны, то мы можем положить $b_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $b_i = \boldsymbol{0}$ $(i = n, n + 1, \ldots)$. Тогда $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ опять попарно ортогональны и

$$\mu(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \mu(\bigvee_{i=1}^{\infty} b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i).$$

Если $a \leqq b$, то ввиду леммы 1.1 $b = a \cup (b \cap a^{\perp})$, $a \perp (b \cap a^{\perp})$, значит $\mu(b) = \mu(a) + \mu(b \cap a^{\perp}) \geqq \mu(a)$.

Предложение 2.2. *Пусть K — кольцо, μ — не отрицательная конечно-аддитивная функция на K. Функция μ является мерой тогда и только тогда, если она полунепрерывная снизу, т. е. если из $a_n \in K$, $a_n \leqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in K$ следует $\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n)$.*

Доказательство. Пусть μ является мерой и $a_n \in K$, $a_n \leqq a_{n+1}$ $(n = 1, \ldots)$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in K$. Очевидно $\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) \geqq \lim_{n\to\infty} \mu(a_n)$, значит равенство справедливо, если $\mu(a_n) = \infty$ для какого-нибудь n. Пусть $\mu(a_n) < \infty$ для всех n. Положим $b_1 = a_1$, $b_n = a_n \cap a_{n-1}^{\perp}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Тогда по лемме 1.1 $a_n = \bigvee_{i=1}^{n} b_i$. Более того, все b_n попарно ортогональны, так как $b_n^{\perp} = (a_n \cap a_{n-1}^{\perp})^{\perp} = a_n^{\perp} \cup a_{n-1} \geqq a_{n-1} \geqq b_{n-1}$. Значит

$$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\mu(a_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(a_i \cap a_{i-1}^{\perp})).$$

Снова используем лемму 1.1. Тогда

$$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(a_1) + \sum_{i=2}^{n} (\mu(a_i) - \mu(a_{i-1}))) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n).$$

Пусть наоборот μ полунепрерывная снизу и пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных элементов. Положим $a_n = \bigvee_{i=1}^{n} b_i$. Тогда $\mu(a_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i)$ и

$$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n) = \mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigvee_{i=1}^{n} b_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(b_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(b_n).$$

Определение 2.2. *Функция μ определенная на некоторой структуре A называется оценкой, если*

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \cup b) + \mu(a \cap b)$$

для всяких $a, b \in A$.

К сожалению, не всякая мера на логике должна быть оценкой.

Пример 2.1. Пусть H — множество всех линейних подпространств двумерного Эвклидова пространства R^2. Если L одномерно и его отклонение α от оси абсцисс замкнуто между 0 и $\pi/2$, то мы положим $\mu(L) = \alpha$. Если $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\mu(L) = \pi - \alpha$. Наконец для нульмерного подпространства положим $\mu(0) = 0$ и $\mu(R^2) = \pi/2$. Тогда μ является мерой, но не оценкой.

Пример 2.2. Вот простой пример меры на подлогике являющийся оценкой. Пусть K — множество всех конечномерных подпространств некоторого гильбертова пространства; мера подпространства из K — его размерность.

Определение 2.3. *Пусть H — логика, $a, b \in H$. Мы будем писать $a \leftrightarrow b$* (*см.* [1]), *если существуют такие попарно ортогональные элементы a_1, a_2, a_3, что $a = a_1 \cup a_2$, $b = a_2 \cup a_3$.*

Предложение 2.3. *Если μ мера на структуре $K \subset H$ и $a \leftrightarrow b$, то $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \cup b) + \mu(a \cap b)$.*

Доказательство. По определению, $a = a_1 \cup a_2$, $b = a_2 \cup a_3$, где a_1, a_2, a_3 попарно ортогональны. Но тогда $a \cup b = a_1 \cup a_2 \cup a_3$. На другой стороне по лемме 1.2 $a \cap b = a_2 \cup ((a_1 \cup a_2) \cap a_3) = a_2 \cup 0 = a_2$, так как $a_1 \cup a_2 \perp a_3$. Значит

$$\mu(a \cup b) + \mu(a \cap b) = \mu(a_1 \cup a_2 \cup a_3) + \mu(a_2) =$$

$$= \mu(a_1 \cup a_2) + \mu(a_3) + \mu(a_2) = \mu(a_1 \cup a_2) + \mu(a_2 \cup a_3).$$

3. Пополнение меры являющейся оценкой

Следующие названия заимствованы из книги [5].

Определение 3.1. *Пусть H — любая логика, μ — мера на структуре $K \subset H$. Мера μ называется борелевской (*соотв. *обобщенной борелевской), если K — σ-кольцо и μ конечна (K — Σ-кольцо). Мера μ называется полной, если из $a \leqq b$, $b \in K$, $a \in H$, $\mu(b) = 0$ вытекает $a \in K$. Мера μ называется конечно-лебеговской (соотв. лебеговской), если она полна и борелевская (соотв. обобщенная борелевская).*

Приступим теперь к конструкции пополнения.

Определение 3.2. *Пусть H — логика, $K \subset H$, K — кольцо, μ — мера на K. Положим*

$$\tilde{K} = \{a \in H;\ \textit{существуют}\ a_1, a_2 \in K,\ a_1 \leqq a \leqq a_2,$$

$$\mu(a_1) = \mu(a_2)\}$$

и определим функцию $\tilde{\mu}$ на $\tilde{K}$ равенством

$$\tilde{\mu}(a) = \mu(a_1) = \mu(a_2).$$

Примечание 3.1. Заметим, что определение функции μ корректно. Если также $b_1 \leqq a \leqq b_2$, b_1, $b_2 \in K$ и $\mu(b_1) = \mu(b_2)$, то $b_2 \geqq a_1$, $a_2 \geqq b_1$, значит

$$\mu(b_2) = \mu(b_1) \leqq \mu(a_2) = \mu(a_1) \leqq \mu(b_2).$$

Предложение 3.1. *Если $K \subset H$, K — структура и μ не убывающая оценка на K, то $\tilde{K}$ является структурой. $\tilde{\mu}$ является не убывающей оценкой и продолжением μ. Если $a \leqq b \leqq c$, a, $c \in \tilde{K}$, $\tilde{\mu}(a) = \tilde{\mu}(c)$, то $b \in \tilde{K}$.*

Доказательство. Пусть a, $b \in \tilde{K}$, $a_1 \leqq a \leqq a_2$, $b_1 \leqq b \leqq b_2$, $\mu(a_1) = \mu(a_2)$, $\mu(b_1) = \mu(b_2)$. Тогда $a_1 \cup b_1 \leqq a \cup b \leqq a_2 \cup b_2$, $a_1 \cup b_1 \in K$, $a_2 \cup b_2 \in K$, $\mu(a_2 \cup b_2) = \mu(a_2) + \mu(b_2) - \mu(a_2 \cap b_2) = \mu(a_1) + \mu(b_1) - \mu(a_2 \cap b_2) \leqq \mu(a_1) + \mu(b_1) - \mu(a_1 \cap b_1) = \mu(a_1 \cup b_1) \leqq \mu(a_2 \cup b_2)$, значит $a \cup b \in \tilde{K}$. Подобным способом доказывается, что $a \cap b \in \tilde{K}$. Более того, $\mu(a_2 \cup b_2) = \tilde{\mu}(a \cup b)$, $\mu(a_2 \cap b_2) = \tilde{\mu}(a \cap b)$, значит

$$\tilde{\mu}(a \cup b) + \tilde{\mu}(a \cap b) = \mu(a_2 \cup b_2) + \mu(a_2 \cap b_2) =$$

$$= \mu(a_2) + \mu(b_2) = \tilde{\mu}(a) + \tilde{\mu}(b).$$

Предложение 3.2. *Пусть $K \subset H$, K — кольцо, μ — мера на K являющаяся оценкой. Если K — σ-кольцо (соотв. Σ-кольцо), то $\tilde{K}$ — структура являющаяся замкнутой относительно счетных нижних граней (соотв. нижних и верхних граней) и $\tilde{\mu}$ является на $\tilde{K}$ мерой.*

Доказательство. Пусть K — σ-кольцо, $a_n \in \tilde{K}$, b_n, $c_n \in K$, $b_n \leqq a_n \leqq c_n$, $\mu(b_n) = \mu(c_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По предл. 3.1 также $d_n = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \in \tilde{K}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $b = \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n$, $c = \bigwedge_{n=1}^{\infty} c_n$. Тогда b, $c \in K$, $b \leqq \bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n \leqq c$ и

$$\mu(c) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigwedge_{i=1}^{n} c_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i) = \mu(b),$$

значит $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n \in K$. Утверждение касающееся случая когда K — $\sum$-кольцо доказывается подобно.

Пусть наконец $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных элементов из $\tilde{K}$, таких, что $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in \tilde{K}$ и пусть b, b_n, c, $c_n \in K$ такие, что $b \leqq a \leqq c$, $b_n \leqq a_n \leqq c_n$, $\mu(b_n) = \tilde{\mu}(a_n) = \mu(c_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда b_n также попарно ортогональные, ибо $b_i \leqq a_i \leqq a_j^\perp \leqq b_j^\perp$ для $i \neq j$. Но тогда существуют $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leqq \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} c_n \leqq c$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(b_n) = \mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n).$$

С другой стороны $\mu(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigvee\limits_{i=1}^{n} b_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigvee\limits_{i=1}^{n} c_i) = \mu(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} c_n)$, значит

$$\tilde{\mu}(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n)$$

и предложение доказано.

Теорема 3.1. *Пусть $K \subset H$, K — структура, μ — конечная мера на K являющаяся оценкой. Если K — кольцо (σ-кольцо) содержащее наибольщий элемент 1, то $\tilde{K}$ также колько (σ-кольцо) и $\tilde{\mu}$ полная мера на $\tilde{K}$ являющаяся продолжением μ.*

Доказательство. То, что $\tilde{\mu}$ — мера и $\tilde{K}$ — структура мы уже доказали. Остается доказать, что из $a \in \tilde{K}$ следует $a^\perp \in \tilde{K}$, ибо тогда из a, $b \in \tilde{K}$ следует $a \cap b^\perp \in \tilde{K}$. Пусть $a \in \tilde{K}$, $b \leqq a \leqq c$, b, $c \in K$, $\mu(b) = \mu(c)$. Тогда $b^\perp \geqq a^\perp \geqq c^\perp$, $b^\perp$, $c^\perp \in K$ и

$$\mu(b^\perp) = \mu(1) - \mu(b) = \mu(1) - \mu(c) = \mu(c^\perp),$$

значит $a^\perp \in \tilde{K}$.

Пример 3.1. Пусть H — логика всех линейных подпространств 3-мерного пространства R^3. Пусть K состоит из нульмерного пространства 0, всего пространства R^3, некоторого одномерного пространства L_1 и его ортогонального дополнения. Пусть $\mu(0) = \mu(L_1^\perp) = 0$, $\mu(L_1) = \mu(R^3) = 1$. Тогда μ является вероятностной мерой и оценкой на K. С другой стороны $\tilde{K} \neq K$, так как в K входят все одномерные линейные подпространства пространства $L_1^\perp$. Значит, пополнение меры содержательно.

Пример 3.2. Пусть H — логика всех линейных подпространств двумерного пространства R^2, K состоит из $\{(x_1, x_2); x_1 = 0\}$, $\{(x_1, x_2); x_2 = 0\}$, $\{(x_1, x_2); x_2 - x_1\}$ и $\{(x_1, x_2); x_2 = -x_1\}$. Пусть $\mu(0) = 0$, $\mu(R^2) = 2$ и $\mu(L)$ 1 во всяком другом случае. Тогда K — подлогика логики H, μ — мера являющаяся оценкой. В этом случае $\tilde{K} = K \neq H$, значит пополнение меры не является распостранением на всю логику H.

С другой стороны никакое одномерное пространство из K не является измерным (в смысле Каратэодори), так как если a, b не ортогональны, то $a \cap b = 0$, $a \cap b^{\perp} = 0$, значит

$$\mu(a) = 1 \neq 0 = \mu(0) + \mu(0) = \mu(a \cap b) + \mu(a \cap b^{\perp}).$$

Мы видим, что в случае логик не применима теория Каратэодори.

ЛИТЕРАТУРА

[1] VARADARAJAN, V. S.: Geometry of Quantum Theory. Princeton 1971.

[2] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. New York 1948.

[3] NEUMANN, J. von: Continuous Geometry. Princeton 1960.

[4] MAEDA, F.: Kontinuierliche Geometrien. Berlin 1963.

[5] ШИЛОВ, Г. Е., ГУРЕВИЧ, Б. Л.: Интеграл, мера, производная. Москва 1965.

[6] HALMOS, P. R.: Measure Theory. New York 1950.

[7] PARTHASARATY, J. R.: Теория вероятностей на замкнутых подпространствах Гильбертова пространства. Математика, сб. пер., *14*, 5, 1970, 102—122.

[8] ХОЛЕВО, А. С.: Аналог теории статистических решений в некомутативной теории вероятностей. Труды Моск. Мат. Общ., *26*, 1972, 133—149.

Поступило 5. 7. 1973

Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty UK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava