Rudolf Blaško; Miloš Háčik

Lineárne homogénne diferenciálne rovnice druhého rádu rýdzo diskonjugované vzhľadom na derivácie

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 4, 323--331

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127033`

Matematický časopis 22 (1972), No. 4

LINEÁRNE HOMOGÉNNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE DRUHÉHO RÁDU RÝDZO DISKONJUGOVANÉ VZHĽADOM NA DERIVÁCIE

RUDOLF BLAŠKO, MILOŠ HÁČIK,
Žilina

Majme homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu definovanú na nejakom intervale I_1. Funkciu $y(t) \in C_2(I)$, kde interval $I \subset I_1$, ktorá vyhovuje diferenciálnej rovnici pre všetky $t \in I$, nazývame riešením tejto diferenciálnej rovnice.

Nech $y(t)$ je netriviálne riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Ak pre $t_1, t_2 \in I$ platí: $y(t_1) = y(t_2) = 0$ a pre všetky $t \in (t_1, t_2)$ je $y(t) \neq 0$, nazývame body t_1, t_2 konjugovanými bodmi prvého druhu riešenia $y(t)$; ak pre $t_3, t_4 \in I$ platí: $y'(t_3) = y'(t_4) = 0$ a pre všetky $t \in (t_3, t_4)$ je $y'(t) \neq 0$, nazývame body t_3, t_4 konjugovanými bodmi druhého druhu riešenia $y(t)$.

Diferenciálna rovnica, ktorej netriviálne riešenia nemajú na intervale I konjugované body prvého druhu, sa nazýva diskonjugovanou rovnicou prvého druhu na intervale I a diferenciálna rovnica, ktorej netriviálne riešenia nemajú na intervale I konjugované body druhého druhu, sa nazýva diskonjugovanou rovnicou druhého druhu na intervale I.

Ďalej sa budeme zaoberať prípadom, keď interval I je otvorený, t. j. $I = (a, b)$, $a, b \in E^*$, $a < b$, $E^* = E_1 \cup (-\infty) \cup (\infty)$ a keď diferenciálna rovnica je Jacobiho typu

$$(q) \qquad y'' = q(t)y.$$

Predpokladajme, že $q(t) \in C_2(I_1)$, $q(t) \neq 0$ pre všetky $t \in I_1$.

V práci [4] J. Krbiľa odvodil nevyhnutné a postačujúce podmienky pre rýdzu diskonjugovanosť diferenciálnej rovnice (q) prvého druhu na intervale I a ukázal niektoré aplikácie. V tomto článku odvodíme nevyhnutné a postačujúce podmienky pre rýdzo diskonjugovanosť diferenciálnej rovnice (q) druhého druhu na intervale I a uvedieme dve aplikácie.

O tom, že pojmy diskonjugovanosť diferenciálnej rovnice (q) prvého a druhého druhu na intervale I nie sú totožné, a preto je potrebné zvlášť sa touto otázkou zaoberať, svedčí nasledujúci príklad:

Príklad: Majme diferenciálnu rovnicu

$$y'' = (\cos^2 t - \sin t)y,$$

ktorej jedno riešenie je $y = \exp(\sin t)$ a ktorá je diskonjugovaná prvého druhu na intervale $I = (-\infty, \infty)$. Je zrejmé, že táto diferenciálna rovnica nie je diskonjugovaná druhého druhu na intervale I.

Spolu s diferenciálnou rovnicou (q) budeme uvažovať jej prvú sprievodnú rovnicu

$$(q_1) \qquad y'' = \left[q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)''\right]y.$$

Je známe, (pozri [2] str. 7], že pre každý integrál $y(t)$ diferenciálnej rovnice (q) je funkcia

$$(1) \qquad y_1(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{|q(t)|}}$$

integrálom diferenciálnej rovnice (q_1) a obrátene pre každý integrál $y_1(t)$ diferenciálnej rovnice (q_1) je funkcia $y_1(t)\sqrt{|q(t)|}$ deriváciou práve jedného integrálu $y(t)$ rovnice (q), t. j.

$$(1') \qquad y'(t) = y_1(t)\sqrt{|q(t)|}\,.$$

Vzhľadom na túto vlastnosť budeme pojem diskonjugovanosti druhého druhu diferenciálnej rovnice (q) na intervale I definovať takto:

Definícia 1: *Diferenciálnu rovnicu (q) nazveme diskonjugovanou druhého druhu na intervale I práve vtedy, ak jej prvá sprievodná rovnica (q_1) je diskonjugovaná prvého druhu na intervale I.*

Poznámka: Ak nosič diferenciálnej rovnice (q) je tvaru

$$q(t) = \frac{\pm 1}{(Ct + D)^2},$$

kde C, D sú ľubovoľné reálne konštanty s vlastnosťou $C^2 + D^2 \neq 0$, vtedy rovnica (q) je diskonjugovaná prvého druhu na intervale $(-\infty, -D/C)$, resp. $(-D/C, \infty)$. Keďže v tomto prípade rovnica (q) je totožná so svojou prvou sprievodnou rovnicou (q_1) (pozri [3]), je rovnica (q) tiež podľa definície diskonjugovaná druhého druhu na intervale $(-\infty, -D/C)$, resp. $(-D/C, \infty)$.

V súhlase s prácou [4] nazveme diferenciálnu rovnicu (q) rýdzo diskonjugovanou prvého druhu na intervale I, ak má riešenie $y(t)$ také, že platí

$$(2) \qquad y(t) \neq 0, \quad \int_a^t y^{-2}(x)\,dx < \infty \quad \text{pre všetky} \quad t \in I$$

a jej riešenie $y(t)$ nazveme hlavným riešením prvého druhu na intervale I, ak má vlastnosť (2) a ak platí

$$\int_t^b y^{-2}(x)\,dx = \infty \quad \text{pre všetky} \quad t \in I. \tag{3}$$

Definícia 2: *Diferenciálnu rovnicu* (q) *nazveme rýdzo diskonjugovanou druhého druhu na intervale* I *práve vtedy, keď jej prvá sprievodná rovnica* (q_1) *je rýdzo diskonjugovaná prvého druhu na intervale* I.

Definícia 3: *Riešenie* $y(t)$ *diferenciálnej rovnice* (q) *nazveme hlavným riešením druhého druhu na intervale* I, *ak* $y_1 = y'/\sqrt{|q|}$ *je hlavným riešením prvého druhu diferenciálnej rovnice* (q_1) *na intervale* I.

Veta 1: *Nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby diferenciálna rovnica* (q) *bola rýdzo diskonjugovaná druhého druhu na intervale* I, *je aby mala hlavné riešenie druhého druhu na intervale* I.

Tvrdenie vety je priamym dôsledkom vety 1 práce [4], ak uvážime definíciu 1.

V knihe [2] str. 31—101 je vybudovaná teória kruhových fáz diferenciálnych rovníc (q). Pod prvou kruhovou fázou bázy (u, v) riešení rovnice (q) rozumieme funkciu $\alpha(t) \in C_3(I)$ definovanú na intervale I s výnimkou nulových bodov riešenia $v(t)$ vzorcom:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}.$$

Pomocou fázy $\alpha(t)$ môžeme vyjadriť nosič rovnice (q) nasledovne:

$$q(t) = -\{\operatorname{tg} \alpha(t), t\} \quad t \in I,$$

kde symbol $\{X, t\} = (X''/2X')' - (X''/2X')^2$ je tzv. schwarzovská derivácia funkcie $X(t)$ v čísle t.

Tamtiež na str. 63 je zavedený pojem oscilácie prvej kruhovej fázy $\alpha(t)$

$$O(\alpha) = |c - d|,$$

kde

$$c = \lim_{t \to a+} \alpha(t), \quad d = \lim_{t \to b-} \alpha(t)$$

a pomocou neho sú rozdelené neoscilatorické rovnice (q) na všeobecné a špeciálne. Podľa odseku 16 str. 79 neoscilatorická rovnica (q) typu 1 je všeobecná, resp. špeciálna podľa toho, či pre kruhovú fázu $\alpha(t)$ platí $0 < O(\alpha) < \pi$, resp. $O(\alpha) = \pi$.

Druhou kruhovou fázou bázy (u, v) riešení rovnice (q) rozumieme funkciu

$\beta(t) \in C_1(I)$ definovanú na intervale I, s výnimkou nulových bodov funkcie $v'(t)$ vzorcom

(4) $$\operatorname{tg}\beta(t) = \frac{u'(t)}{v'(t)}.$$

Pomocou fázy $\beta(t)$ môžeme vyjadriť nosič prvej sprievodnej rovnice (q_1) takto:

(5) $$q_1(t) = -\{\operatorname{tg}\beta(t), t\} \quad t \in I.$$

Analogicky pod osciláciou druhej kruhovej fázy $\beta(t)$ na intervale I rozumieme číslo

$$O(\beta) = |c' - d'|,$$

kde

$$c' = \lim_{t\to a+} \beta(t), \quad d' = \lim_{t\to b-} \beta(t)$$

a neoscilatorickú diferenciálnu rovnicu typu 1 budeme nazývať všeobecnou resp. špeciálnou druhého druhu podľa toho, či pre fázu $\beta(t)$ platí $0 < O(\beta) < \pi$ resp. $O(\beta) = \pi$.

Ďalej budeme potrebovať výsledok uvedený v knihe [2] str. 38, ktorý zhrnieme do lemy:

Lema 1. *Každá druhá kruhová fáza diferenciálnej rovnice* (q) *je prvou kruhovou fázou rovnice* (q_1) *a obrátene.*

Veta 2. *Rýdzo diskonjugovaná diferenciálna rovnica* (q) *druhého druhu na intervale* I *je neoscilatorickou diferenciálnou rovnicou typu 1 všeobecnou druhého druhu a obrátene.*

Táto veta je priamym dôsledkom vety 2 práce [4], ak uvážime definíciu 1 a lemu 1.

V práci [5] je zavedený pre neoscilatorické diferenciálne rovnice (q) pojem prvej hyperbolickej fázy $\alpha(t)$ bázy $(u(t), v(t))$ vzťahom

$$\operatorname{tg h} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$$

na otvorenom intervale $i \subset I_1$, na ktorom platí $|u(t)| < |v(t)|$. Nosič diferenciálnej rovnice (q) môžeme na intervale i vyjadriť vzťahom

$$q(t) = -\{\operatorname{tg h} \alpha(t); t\}.$$

Prvú hyperbolickú fázu $\alpha(t)$, ktorá má na intervale $i = (a_i, b_i)$ vlastnosť

$$\lim_{t \to a_i+} \alpha(t) = -\operatorname{sgn} \alpha' \,.\, \infty\,, \quad \lim_{t \to b_i-} \alpha(t) = \operatorname{sgn} \alpha' \,.\, \infty\,,$$

nazývame prvou hlavnou hyperbolickou fázou na intervale i.

V práci [5] je zavedený aj pojem druhej hyperbolickej fázy $\beta(t)$ bázy $(u(t), v(t))$ vzťahom

$$\operatorname{tg} \operatorname{h} \beta(t) = \frac{u'(t)}{v'(t)} \tag{6}$$

na otvorenom intervale $j \subset I_1$, na ktorom platí $|u'(t)| < |v'(t)|$. Nosič diferenciálnej rovnice (q_1) môžeme vyjadriť pomocou fázy $\beta(t)$ na intervale j nasledovne:

$$q_1(t) = -\{\operatorname{tg} \operatorname{h} \beta(t); t\}. \tag{7}$$

Druhú hyperbolickú fázu $\beta(t)$, ktorá má na intervale $j = (a_i, b_i)$ vlastnosť

$$\lim_{t \to a_j+} \beta(t) = -\operatorname{sgn} \beta' \,.\, \infty\,, \quad \lim_{t \to b_j-} \beta(t) = \operatorname{sgn} \beta' \,.\, \infty\,,$$

nazývame druhou hlavnou hyperbolickou fázou na intervale j. Z výsledkov práce [5] bezprostredne vyplýva:

Lema 2. *Každá druhá hyperbolická fáza diferenciálnej rovnice (q) je prvou hyperbolickou fázou diferenciálnej rovnice (q_1) a obrátene.*

Veta 3. *Nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby diferenciálna rovnica (q) bola rýdzo diskonjugovaná druhého druhu na intervale I, je, aby mala druhú hlavnú hyperbolickú fázu na intervale I.*

Dôkaz urobíme tým istým spôsobom ako pri vete 3 v práci [4], ak zoberieme do úvahy definíciu 1 a lemu 2.

O vzájomnom vzťahu druhých hlavných hyperbolických fáz rýdzo diskonjugovanej diferenciálnej rovnice (q) druhého druhu na intervale I hovorí nasledujúca veta:

Veta 4. *Ak $\beta(t)$, $\delta(t)$ sú druhé hlavné hyperbolické fázy rýdzo diskonjugovanej diferenciálnej rovnice (q) druhého druhu na intervale I, tak potom platí:*

$$\beta(t) = \varepsilon\delta(t) + k,$$

kde $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$ ak $\operatorname{sgn} \beta' = 1$, resp. $\operatorname{sgn} \beta' = -1$ a k je reálne číslo.

Tvrdenie vety je priamym dôsledkom vety 4 práce [4], ak uvážime definíciu 1 a lemu 2.

V ďalšej časti uvedieme dve aplikácie druhých hlavných hyperbolických fáz.

Teória kruhových fáz tvorila v knihe [2] základ pre vybudovanie teórie transformácií. V tomto článku použijeme druhé hlavné hyperbolické fázy na transformáciu rýdzo diskonjugovaných diferenciálnych rovníc (q) druhého druhu.

Majme diferenciálnu rovnicu

$$(Q) \qquad \ddot{Y} = Q(T)Y \qquad \left(\dot{Y} = \frac{dY}{dT}\right),$$

kde $Q(T) \in C_2(J_1)$, $J_1 = (A_1, B_1)$, $A_1, B_1 \in E_1^*$, $A_1 < B_1$.
Nech $J = (A, B) \subset J_1$. Pripomíname, že transformáciu riešení rovnice (Q) do riešení rovnice (q) realizujú riešenia $X(t)$ Kummerovej nelineárnej diferenciálnej rovnice 3. rádu:

$$(Qq) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t).$$

Vzťah medzi riešeniami rovníc (Q), (q) je taký, že ak $X(t)$ je riešením rovnice (Qq) a $Y(T)$ je ľubovoľným riešením rovnice (Q), potom funkcia

$$(8) \qquad y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

je v definičnom intervale funkcie $X(t)$ riešením rovnice (q). Ak diferenciálnu rovnicu (q) resp. (Q) vyšetrujeme na intervale I, resp. J, tak transformáciu nazývame úplnou, ak platí: $X(I) = J$.

Veta 5: *Nech $\beta(t)$ resp. $B(T)$ je druhá hlavná hyperbolická fáza rýdzo diskonjugovanej rovnice (q) druhého druhu, resp. rýdzo diskonjugovanej rovnice (Q) druhého druhu na intervale I, resp. J. Potom existuje riešenie $X(t)$ ábelovskej funkcionálnej rovnice $B[X(t)] = \beta(t)$, ktoré realizuje úplnú transformáciu riešení rovníc (q_1), (Q_1) v zmysle vzorca* (8).

Dôkaz: Z definície druhých hlavných hyperbolických fáz je vidieť, že platí: $\beta(I) = B(J) = (-\infty, \infty)$, odkiaľ je zrejmá aj platnosť ábelovskej funkcionálnej rovnice $B[X(t)] = \beta(t)$ pre každé $t \in I$, ako aj rovnosť $X(I) = J$. Z uvedenej funkcionálnej rovnice máme na intervale I identitu

$$\operatorname{tg h} B[X(t)] = \operatorname{tg h} \beta(t)$$

a po prevedení schwarzovskej derivácie vzťah:

$$-\{X, t\} - \{\operatorname{tg h} B, X\}\, X'^2 = -\{\operatorname{tg h} \beta, t\},$$

ktorý je podľa (9) totožný s rovnicou $(Q_1 q_1)$. Tým je dôkaz ukončený.

Funkciu $X(t)$, o ktorej hovorí veta 5, môžeme vyjadriť explicitne vo tvare

$$X(t) = B_{-1}[\beta(t)],$$

kde $B_{-1}(T)$ je inverznou funkciou k druhej hlavnej hyperbolickej fáze $B(T)$.

V špeciálnom prípade, keď rovnica (q_1) je totožná s rovnicou (Q_1), dostaneme explicitné vyjadrenie úplného, t. j. na intervale I definovaného riešenia Kummerovej rovnice $(q_1 q_1)$, ak použijeme vetu 4, vo tvare

$$X(t) = \beta_{-1}[\varepsilon\beta(t) + k], \tag{9}$$

kde $\beta(t)$ je druhá hlavná hyperbolická fáza rovnice (q) na intervale I a $\beta_{-1}(t)$ je k nej inverzná funkcia, $\varepsilon = \pm 1$ a k je ľubovoľná konštanta. Vzorom (9) sú vyjadrené centrálne disperzie druhého druhu (tieto sú pre prvý druh algebraicky definované v práci [1]) rýdzo diskonjugovanej diferenciálnej rovnice (q) druhého druhu pomocou druhých hlavných hyperbolických fáz.

Skôr než uvedieme druhú aplikáciu, zdôrazníme, že ak je diferenciálna rovnica (q) rýdzo diskonjugovaná druhého druhu na intervale I_1, tak je táto vlastnosť dedičná pre každý interval $I \subset I_1$. Existujú teda aj druhé hlavné hyperbolické fázy $\beta(t)$ rovnice (q) na intervale I a v prípade, keď interval I má konečnú dĺžku, nech majú nasledujúcu vlastnosť:

$$\lim_{t \to a_+} \beta'(t) = \lim_{t \to b_-} \beta'(t) = \infty \operatorname{sgn} \beta'. \tag{10}$$

Funkcie

$$u_1(t) = \frac{\sin h\, \beta(t)}{\sqrt{|\beta'|}}; \qquad v_1(t) = \frac{\cos h\, \beta(t)}{\sqrt{|\beta'|}}$$

sú bázou riešení rovnice (q_1) s nosičom (7), na intervale I splňujú nerovnosť $|u_1(t)| < |v_1(t)|$, a preto môžeme pomocou nich definovať reálnu funkciu

$$r_1 t) = \sqrt{v_1^2 - u_1^2}, \tag{11}$$

ktorá vyhovuje diferenciálnej rovnici hyperbolických amplitúd

$$r_1'' = q_1(t) r_1 - r_1^{-3}, \tag{r_1}$$

kde $q_1(t)$ je nosič rovnice (q_1).

Z vlastnosti (10) dostávame tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta 6: *Nech $q(t) \in C_2(I)$ a nech diferenciálna rovnica (q) je rýdzo diskonjugovaná druhého druhu na intervale I. Ak $a, b \in E_1$, $a < b$, $a, b \in I$, potom existuje riešenie $r_1(t)$ nelineárnej diferenciálnej rovnice (r_1), ktoré spĺňa okrajové podmienky*

$$\lim_{t \to a_+} r_1(t) = \lim_{t \to b_-} r_1(t) = 0,$$

a je ním riešenie $r_1(t) = \varepsilon|\beta'(t)|^{-1/2}$, *kde* $\varepsilon = \pm 1$ *a* $\beta(t)$ *je druhá hlavná hyperbolická fáza rovnice* (q) *na intervale* (a, b) *splňujúca vzťah* (10).

Vzhľadom na vzťah (1) môžeme (11) písať v tvare

$$r_1(t) = \frac{\sqrt{v'^2 - u'^2}}{\sqrt{|q|}} = \frac{s}{\sqrt{|q|}}, \tag{12}$$

kde $s(t)$ je druhá hyperbolická aplitúda diferenciálnej rovnice (q), ktorá vyhovuje nelineárnej diferenciálnej rovnici (pozri [5])

$$s'' = qs - \frac{q^2}{s^3} + \frac{q'}{q} s'. \tag{s}$$

Za predpokladu, že platí vzťah (10), vzhľadom na (12) a vetu 6 dostávame nasledujúcu vetu:

Veta 7: *Nech* $q(t) \in C_2(I)$ *a nech diferenciálna rovnica* (q) *je rýdzo diskonjugovaná druhého druhu na intervale* I. *Ak* $a, b \in E_1$, $a < b$, $a, b \in I$, *potom existuje riešenie* $s(t)$ *nelineárnej diferenciálnej rovnice* (s), *ktorá vyhovuje okrajovým podmienkam*

$$\lim_{t \to a_+} s(t) = \lim_{t \to b_-} s(t) = 0$$

a je ním riešenie $s(t) = \varepsilon\sqrt{|q|}\,|\beta'(t)|^{-1/2}$, *kde* $\varepsilon = \pm 1$ *a* $\beta(t)$ *je druhá hlavná hyperbolická fáza rovnice* (q) *na intervale* (a, b), *ktorá má vlastnosť* (10).

Záverom tohto článku ďakujeme RNDr. J. Krbiľovi, CSc., za jeho cenné rady a pripomienky.

LITERATÚRA

[1] BARVÍNEK, E.: Algebraic definition of central dispersion of the first kind of the differential equation $y'' = q(t)y$. Czech. Math. J., *16*, 1966, 46—62.

[2] BORŮVKA, O.: Differentialtransformationen 2. Ordnung. Berlin 1967.

[3] HÁČIK, M.: O splynutí diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)y$ s jej sprievodnou rovnicou. In: Sborník prací VŠD a VÚD v Žiline, *25* 1969, 21—23.

[4] KRBIĽA, J.: Pure disconjugate linear homogeneous differential equations of the 2nd order. Zborník prác VŠLD vo Zvolene k 60-nám prof. Palaja (v tlači).

[5] KRBIĽA, J.: Základy teórie hyperbolických fáz diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)y$. Kandidátska dizertačná práca.

Došlo 12. 1. 1971

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty strojnej a elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej
Žilina

LINEAR HOMOGENEOUS SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
PURE DISCONJUGATE WITH REGARD TO THE DERIVATE

Rudolf Blaško, Miloš Háčik

Summary

In the present paper the differential equation (q) $y'' = q(t)y$, $q(t) \in C_2(I_1)$, $q(t) \neq 0$ for every $t \in I_1$, is investigated. There is introduced a notion of the pure disconjugate differential equation (q) of the second kind in the interval $I = (a, b) \subset I_1$.

In Theorems 1, 2, 3 there are proved the necessary and sufficient conditions for pure disconjugacy of (q) of the second kind in the interval I. By means of the second main hyperbolic phases defined in the interval I (the structure of these phases is introduced in Theorem 4) the transformation of solutions of differential equation $\ddot{Y} = Q(T)Y$, $Q(T) \in C_2(J_1)$, $Q(T) \neq 0$ for every $T \in J_1$, is investigated which is pure disconjugate in the interval $(A, B) = J \subset J_1$, into solutions of (q) (Theorem 5) and a boundary problem is solved of the non-linear differential equation $r_1'' = q_1(t)r_1 - 1/r_1^3$, where $q_1(t)$ is a bearer of the first accompanying equation towards (q) (Theorem 6) and a boundary problem of the non-linear differential equation $s'' = qs - q^2/s^3 + q's'/q$ as well (Theorem 7).