Štefan Bárta

Poznámka k odvodeniu Laplaceovej rovnice o povrchovom napätí (Metodický príspevok)

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 8 (1958), No. 2, 123--126

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127013

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 2 – 1958

POZNÁMKA K ODVODENIU LAPLACEOVEJ ROVNICE O POVRCHOVOM NAPÄTÍ

(Metodický príspevok)

ŠTEFAN BARTA, Bratislava

Rozdiel tlakov na rozhraní oddeľujúcom dve rôzne kvapaliny, alebo kvapalinu a plyn, pri ľubovoľnom tvare rozhrania vyjadruje Laplaceova rovnica

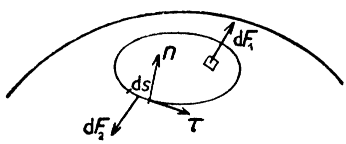
$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

kde σ je povrchové napätie, p_1 a p_2 sú tlaky v prvom a druhom prostredí a R_1 a R_2 polomery krivosti hlavných normálnych rezov rozhrania, počítané kladne na stranu, kde tlak je p_1.

Táto rovnica sa odvodzuje v učebniciach fyziky dvojakým spôsobom; buď sa elementárnym spôsobom vyjadruje podmienka rovnováhy účinkujúcich síl, alebo sa používa princíp virtuálnych posunutí. Domnievam sa, že obidva spôsoby, pretože vychádzajú zo zjednodušenej geometrickej predstavy a pri odvodzovaní sa robia ďalšie zjednodušenia, nie sú dosť presvedčivé.

V tomto svojom príspevku podávam odvodenie Laplaceovej rovnice používajúc počtové pravidlá a vety vektorového počtu takým spôsobom, ktorý nevyžaduje nijaké zjednodušenia.

Na zakrivenej ploche, oddeľujúcej dve kvapalné prostredia alebo kvapalinu a plyn, majme na mysli v sebe uzavretú čiaru (obr. 1). Na povrchovú vrstvu ohraničenú uzavretou čiarou, ktorej hrúbka — ako vieme — je vždy veľmi malá, účinkujú dvojaké sily. Je to jednak sila $\boldsymbol{F}_1$ daná rozdielom tlakov po obidvoch stranách rozhrania, jednak sila $\boldsymbol{F}_2$ povrchového napätia pozdĺž uzavretej čiary v rozhraní.



Obr. 1.

Vyjadríme obidve sily vo vektorovom tvare.

$$\boldsymbol{F}_1 = \int (p_1 - p_2) \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{1}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je plošný vektor, orientovaný na tú stranu povrchu, kde pôsobí tlak p_2. Normálny jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, teda orientovaný tiež do druhého prostredia, nech je $\boldsymbol{n}$.

Prv ako vyjadríme druhú silu, zavedieme si tangenciálny jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$ v smere dotyčnice k ohraničeniu rozhrania, orientovaný tak, že zo strany vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ vektorom $\boldsymbol{\tau}$ určené obiehanie ohraničenej časti rozhrania sa javí proti pohybu hodinových ručičiek. Potom silu $\boldsymbol{F}_2$ možno vyjadriť takto:

$$\boldsymbol{F}_2 = \oint \sigma\, \mathrm{d}s\, (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}) = \sigma \oint \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je dĺžkový element ohraničenia rozhrania.

Za rovnováhy sa súčet síl pôsobiacich na povrchovú vrstvu rovná nule.

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

Aby sme krivkový integrál $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}$, vystupujúci vo vyjadrení sily $\boldsymbol{F}_2$, mohli upraviť pomocou Stokesovej vety na plošný integrál, budeme upravovať jeho skalárny súčin s ľubovoľným konštantným vektorom $\boldsymbol{a}$. Dostávame

$$\boldsymbol{a} \cdot \oint \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = -\oint \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{n} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}) = -\oint (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Prv však ako budeme môcť použiť Stokesovu vetu, ktorú máme odvodenú pre trojrozmerné vektorové polia, musíme definovať vektor $\boldsymbol{n}$ aj v okolí rozhrania. Urobíme to tým spôsobom, že všetkým bodom tejže normály rozhrania priradíme ten istý jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$ vo smere normály, orientovaný rovnobežne s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Posledný krivkový integrál môžeme upraviť potom takto:

$$\boldsymbol{a} \cdot \oint \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = -\oint (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int \operatorname{rot} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= -\int [\boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{n}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{a} \cdot \left[\int (\nabla \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int \nabla \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right].$$

Pretože vektor $\boldsymbol{a}$ je ľubovoľný, je správna i rovnica

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = \int \nabla \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int (\nabla \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int (\nabla \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

lebo

$$\int \nabla \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int (\nabla \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}S = 0.$$

O poslednom našom tvrdení sa môžeme presvedčiť použitím identity platnej pre dva ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, $\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$, a ak volíme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}$, dostaneme $\boldsymbol{0} = \nabla \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}$.

Použitím získaných výsledkov silu $\boldsymbol{F}_2$ môžeme vyjadriť v tvare plošného integrálu

$$\boldsymbol{F}_2 = -\sigma \int (\nabla \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{2a}$$

Spojením výsledkov (1), (2a) a (3) dostávame rovnicu

$$\int (p_1 - p_2)\, \mathrm{d}\mathbf{S} - \sigma \int (\nabla \,.\, \mathbf{n})\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{0}.$$

Pretože sme ohraničenie časti povrchu zvolili ľubovoľne, vyplýva z nej:

$$p_1 - p_2 = \sigma(\nabla \,.\, \mathbf{n}). \tag{4}$$

Výraz $\nabla \,.\, \mathbf{n}$ upravíme použitím vhodne zvoleného pravotočivého súradnicového systému. Jeho počiatok nech je v niektorom bode rozhrania. Smer osi Z nech je rovnobežný so smerom vektora $\mathbf{n}$. Osi X a Y sú potom v tangenciálnej rovine. Roviny XZ a YZ pretínajú rozhranie v dvoch normálnych rezoch. Môžeme potom písať:

$$\nabla \,.\, n = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \,.\, \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \,.\, \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \,.\, \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \,.\, \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \,.\, \mathbf{j},$$

lebo v našom prípade $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = \mathbf{0}$.

Z definície normálnej krivosti

$$N = \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \,.\, \boldsymbol{\tau},$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor vo smere normály a $\boldsymbol{\tau}$ tangenciálny jednotkový vektor v smere normálneho rezu, vyplýva, že $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \,.\, \mathbf{i} = N_1'$ je krivosť normálneho rezu v rovine XZ a $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \,.\, \mathbf{j} = N_2'$ krivosť normálneho rezu v rovine YZ, takže

$$\nabla \,.\, \mathbf{n} = N_1' + N_2'. \tag{5}$$

Z diferenciálnej geometrie plôch je však známe, že súčet krivostí dvoch na seba kolmých rezov je konštantný a rovná sa súčtu maximálnej normálovej krivosti N_1 a minimálnej normálovej krivosti N_2 plochy. Rozdiel tlakov po obidvoch stranách rozhrania, podľa výsledkov (4) a (5), je preto aj

$$p_1 - p_2 = \sigma(N_1' + N_2') = \sigma(N_1 + N_2) = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

kde R_1 a R_2 sú polomery hlavných normálových krivostí, počítané kladne na stranu rozhrania, kde tlak je p_1. Rovnica

$$p_1 - p_2 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{6}$$

je známa rovnica Laplaceova.

V závere ďakujem akademikovi D. Ilkovičovi za rady a pripomienky, ktoré mi poskytol pri písaní príspevku.

LITERATÚRA

[1] G. **Bruhat**, Cours de physique générale, Mécanique, Paris 1944.
[2] D. **Ilkovič**, Vektorový počet, Praha 1950.
[3] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред. Москва 1954.

Došlo 22. 1. 1958.

Katedra fyziky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave