Pavel Kostyrko

Заметка об абсолютно сходящихся рядах

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 4, 287--296

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127007

Matematický časopis 17 (1967), No. 4

ЗАМЕТКА ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ

ПАВЕЛ КОСТЫРКО (PAVEL KOSTYRKO), Братислава

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся рядом и пусть $a_n > 0$, $a_n > R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ для $n = 1,2, \dots$ Составим множество X всех рядов $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, где ε_n $(n = 1,2, \dots)$ приобретают значения $+1$, или -1. На множестве X определим метрику следующим образом: Если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ и $x' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n$, $x \neq x'$, то $\varrho(x, x') = 1/n$, где n является наименьшим натуральным числом со свойством $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$. Если для каждого n имеет место $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$, то полагаем $\varrho(x, x') = 0$.

Если обозначим через $w = S(x)$ функцию, которая относит каждому ряду $x \in X$ его конечную сумму, то из теории абсолютно сходящихся рядов вытекает (см. [2], теорема 1), что функция $w = S(x)$ является гомеоморфным отображением пространства X на множество $W = S(X)$ (W рассматривается как подпространство пространства E_1). Множество $W \subset E_1$ является совершенным, значит оно является множеством второй категории в себе. Далее будем для упрощения пользоваться символом x как для обозначения ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, так и для обозначения его суммы $S(x)$. Если ряд x будем рассматривать как элемент пространства (X, ϱ), то мы об этом упомянем.

Пусть $f(n, x)$ является функцией, которая определяет число чисел $+1$ в (конечной) последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ $(x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n)$ и пусть $\{a_n\}'_n$ является множеством всех предельных точек последовательности $\{a_n\}_1^{\infty}$. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждого $x \in W$ за исключением точек множества первой категории (в W) имеет место*

$$\left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}'_n = \langle 0, 1 \rangle.$$

Следствие. *Множество всех тех* $x \in W$, *для которых*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2},$$

является множеством первой категории в W.

Введем для любого $\xi \in \langle 0, 1\rangle$ и для каждого $k \in P$ (P — множество всех натуральных чисел) множества M_ξ и $M_{\xi,k}$ следующим образом:

$$M_\xi = \left\{x \in W \mid \xi \in \left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}_n'\right\},$$

$$M_{\xi,k} = \left\{x \in W \mid \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \left|\frac{f(n, x)}{n} - \xi\right| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Очевидно

$$M_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{\xi,k}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Множество* $\left\{x \in W \mid \left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}_n' = \langle 0, 1\rangle\right\}$ *непусто.*

Доказательство леммы 1. Пусть R является множеством всех рациональных чисел $r = \frac{p}{q}$ $(q > 0)$, $(p, q) = 1$, $0 < r < 1$. Составим элементы множества R в последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ и построим последовательность $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty}$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$, удовлетворяющую условию: Существует выбранная последовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $\frac{f(n_k, x)}{n_k} = r_k$ $(x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n)$.

Последовательность $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty}$ построим по частям следующим образом: Пусть $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ $(p_1 < q_1)$. Положим $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{p_1} = 1$ и $\varepsilon_{p_1+1} = \ldots = \varepsilon_{q_1} = -1$. Тогда для $n_1 = q_1$, очевидно, верно $\frac{f(n_1, x)}{n_1} = \frac{p_1}{q_1} = r_1$. Если элементы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k}$ построены, то элементы $\varepsilon_{n_k+1}, \ldots, \varepsilon_{n_{k+1}}$ построим следующим образом: Пусть $r_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} (p_{k+1} < q_{k+1})$. Из свойств упорядочения вещественных чисел вытекает, что существуют натуральные числа m так, что

$$m(q_{k+1} - p_{k+1}) > n_k - f(n_k, x),$$
$$m p_{k+1} > f(n_k, x),$$
$$m q_{k+1} > n_k.$$

Наименьшее из чисел m, удовлетворяющих вышеприведенным неравенствам, обозначим через m_0. Положим $n_{k+1} = q_{k+1}m_0$ и определим $\varepsilon_n = 1$ для $n_k < n \leqslant n_k + m_0 p_{k+1} - f(n_k, x)$ и $\varepsilon_n = -1$ для оставшихся n $(n \leqslant n_{k+1})$. Очевидно, $\frac{f(n_{k+1}, x)}{n_{k+1}} = \frac{m_0 p_{k+1}}{m_0 q_{k+1}} = r_{k+1}$.

Если выберем любое $\xi \in \langle 0, 1\rangle$, то, очевидно, существует возрастающая последовательность $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ так, что $r_{k_l} \to \xi$. Значит, $\frac{f(n_{k_l}, x)}{n_{k_l}} \to \xi$, итак, $\left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}_n' = \langle 0, 1\rangle$.

Лемма 2. *Множество M_ξ — типа G_δ* в W.

Доказательство леммы 2. Если обозначим

$$M_{\xi,k,p} = \left\{x \in W \mid \sum_{n=p}^{\infty} \left|\frac{f(n,x)}{n} - \xi\right| < \frac{1}{k}\right\}, \text{ то}$$

(2)
$$M_{\xi,k} = \bigcap_{p=1}^{\infty} M_{\xi,k,p}$$

О множестве $M_{\xi,k,p}$ покажем, что оно открыто. Если выберем произвольно $x_0 \in M_{\xi,k,p}$, то существует $n \geq p$ так, что $\left|\frac{f(n, x_0)}{n} - \xi\right| < \frac{1}{k}$. Если рассматриваем ряд x, как элемент пространства (X, ϱ), то для всякого ряда x, для которого верно $\varrho(x, x_0) < \delta$, $\delta = \frac{1}{n}$, выполняются равенства $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)}$ $(i = 1, \dots, n)$ $(x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,\ x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(0)} a_n)$. Поэтому $\left|\frac{f(n, x)}{n} - \xi\right| = \left|\frac{f(n, x_0)}{n} - \xi\right| < \frac{1}{k}$, т. е. существует окрестность $K(x_0, \delta)$ $(\delta = \delta(x_0))$ точки x_0 в смысле метрики ϱ так, что для $x \in K(x_0, \delta)$ имеет место $S(x) \in M_{\xi,k,p}$. Так как упомянутое отображение $w = S(x)$ является гомеоморфизмом пространства X на пространство W, то множество $S(K(x_0, \delta))$ $(\subset M_{\xi,k,p})$ является окрестностью точки $S(x_0) \in W$ (окрестностью в пространстве W). Значит, каждая точка множества $M_{\xi,k,p}$ имеет окрестность в W, которая является подмножеством $M_{\xi,k,p}$, итак, $M_{\xi,k,p}$ является открытым множеством в W.

Из отношений (1) и (2) вытекает $M_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{p=1}^{\infty} M_{\xi,k,p}$. Поэтому множество M_ξ-типа G_δ в W.

Лемма 3. *Множество M_ξ всюду плотно в W.*

Доказательство леммы 3. Пусть $x_0 \in W$. Покажем, что в каждой δ-окрестности ($\delta > 0$) точки x_0 (в смысле метрики в W) существет точка $x \in M_\xi$.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, то существует n_0 так, что $a_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Пусть $x' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n \in M_\xi$ (согласно лемме 1 такое x' существует). Построим элемент $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ следующим образом: Пусть $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)}$ для $n = 1, 2, \ldots, n_0$ $(x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(0)} a_n)$ и $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ Очевидно, $x \in M_\xi$ (так как самое более для конечного числа индексов n может иметь место $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$) и $|x - x_0| = |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (\varepsilon_n - \varepsilon_n^{(0)}) a_n| \leqslant 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n < 2a_{n_0} < \delta$.

Доказательство теоремы 1. Так как множество M_ξ ($\xi \in \langle 0, 1 \rangle$) является множеством типа G_δ и всюду плотно в W (лемма 2 и лемма 3), то его дополнение $W - M_\xi$ является множеством типа F_σ и граничным в W. Значит $W - M_\xi$ является множеством первой категории в W (смотри [4], стр. 88). Множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} (W - M_{r_k}) = W - \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{r_k}$ ($\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность рациональных чисел интервала (0, 1)) является опять множеством первой категории, значит, $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_{r_k}$ является остаточным множеством в W. Легко можно убедиться, что множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_{r_k}$ является множеством всех тех $x \in W$, для которых $\left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}'_n = \langle 0, 1 \rangle$.

Заметка 1. Множество

$$A = \left\{x \in W \,\middle|\, \left\{\frac{f(n, x)}{n}\right\}'_n = \langle 0, 1 \rangle\right\},$$

которого касается утверждение теоремы 1, является множеством первого мултипликативного класса с точки зрения борелевой классификации множеств.

Действительно, из проведенных рассуждений вытекает

$$x \in A \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{n} - r_k \right| < \frac{1}{l}$$

($\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел инетрвала (0, 1)). Имеет место

$$A = \left\{x \Big| \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{n} - r_k \right| < 1/l \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \Big| \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{n} - r_k \right| < 1/l \right\}.$$

О множестве $A_{k,l,p} = \left\{x \Big| \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{n} - r_k \right| < 1/l \right\}$ легко можно убедится,также как в лемме 2 о множестве $M_{\xi,k,p}$, что оно октрыто в W. Поэтому

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} A_{k,l,p}$$

типа G_δ в W.

Заметка 2. Доказанная теорема 1 является аналогией теоремы, доказанной в статье [3], касающейся нормальных чисел.

В статье [1] доказывается теорема 1, которая утверждает, что для почти всех $x \in W$ (с точки зрения меры Лебега) асимптотическая густота чисел $+1$ и -1 одинакова $\left(\text{т. е. для почти всех } x \in W \text{ верно } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}\right)$. Из следствия теоремы 1 доказанной в этой статье вытекает, что с топологической точки зрения множество $x \in W$ с одинаковой асимптотической густотой чисел $+1$ и -1 является только множеством первой категории.

Далее будем рассматривать множество всех предельных точек последовательности $\left\{\frac{f(n, x)}{\varphi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, причем о функции φ, определенной на множестве P всех натуральных чисел будем предполагать: $\varphi(n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi(n)/n = 0$.

Теорема 2. *Для каждого $x \in W$ за исключением точек множества первой категории (в W) имеет место*

$$\left\{\frac{f(n, x)}{\varphi(n)}\right\}_n' = \langle 0, \infty\rangle$$

$(\langle 0, \infty\rangle = \langle 0, \infty) \cup \{+\infty\})$.

Заметка 3. Если обозначим $\psi(n) = \frac{n}{\varphi(n)}$, то $\frac{f(n, x)}{\varphi(n)} = \frac{f(n, x)}{n}\psi(n)$.

Из теоремы 2 вытекает, что для всех x за исключением точек множества первой категории имеет место: Для любого $a \geq 0$ существует $\{n_k\}$, $n_1 < n_2 < \ldots$ так, что $\frac{f(n_k, x)}{n_k}$ сходится к нулю в определенном смысле с предписанной скоростью, т. е. так, чтобы произведение $f(n_k, x)/n_k$ с расходящейстя последовательностью $\psi(n_k) \to \infty$ стремилось к данному числу a

(последовательность $\psi(n)$ должна удовлетворять условию $\psi(n)/n \to 0$; это вытекает из отношения $\psi(n)/n = 1/\varphi(n) \to 0$).

Теорему 2 докажем аналогично теореме 1. Для любого $\xi \in \langle 0, \infty \rangle$ и для каждого $k \in P$ определим множества M'_ξ и $M'_{\xi,k}$:

$$M'_\xi = \left\{ x \in W | \xi \in \left\{ \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} \right\}'_n \right\},$$

$$M'_{\xi,k} = \left\{ x \in W | \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} - \xi \right| < \frac{1}{k} \right\} \text{ если } \xi \in \langle 0, \infty) \text{ и}$$

$$M'_{\infty,k} = \left\{ x \in W | \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} > k \right\}.$$

Очевидно,

$$M'_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} M'_{\xi,k}. \tag{3}$$

Лемма 4. *Множество* $\left\{ x \in W \mid \left\{ \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} \right\}'_n = \langle 0, \infty \rangle \right\}$ *непусто.*

Доказательство леммы 4. Пусть $\{r'_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью всех рациональных чисел интервала $(0, \infty)$. Покажем, что существует $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \in W$ так, что для определенной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место:

$$\left| \frac{f(n, x)}{\varphi(n_k)} - r'_k \right| < \frac{1}{k}.$$

Сначала покажем, что существуют последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяюшие условиям:

(4) а) $n_{k-1} < n_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$,
б) $c_{k-1} < c_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$,
в) $c_k - c_{k-1} < n_k - n_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$,
г) $r'_k - \frac{1}{k} < \frac{c_k}{\varphi(n_k)} < r'_k + \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$,
д) $c_1 < n_1$.

Последовательности построим по индукции.

$k = 1$: Пусть для $n \geq m_1^{(1)}$ верно $\varphi(n)/n < (r'_1 + 1)^{-1}$, пусть для $n \geq m_2^{(1)}$ верно $\varphi(n) > 1/2$ и пусть для $n \geq m_3^{(1)}$ имеет место $\varphi(n) \geq (r'_1 + 1)^{-1}$.

Пусть $n_1 = \max_{i=1,2,3} \{m_i^{(1)}\}$. Так как $n_1 \geq m_2^{(1)}$, то существует целое число c так, что $\varphi(n_1)(r'_1 - 1) < c < \varphi(n_1)(r'_1 + 1)$, т. е.

$$(5)\qquad r_1' - 1 < \frac{c}{\varphi(n_1)} < r_1' + 1.$$

Из неравенства $n_1 \geq m_1^{(1)}$ вытекает отношение $\varphi(n_1)/n_1 < (r_1' + 1)^{-1}$, откуда (с использованием неравенства (5)) $c/n_1 < \varphi(n_1)\,(r_1' + 1)/n_1 < 1$, итак,

$$(6)\qquad c < n_1.$$

Так как $n_1 \geq m_3^{(1)}$, то имеет место $\varphi(n_1)\,(r_1' + 1) > 1$. Поэтому в качестве c можно выбрать натуральное число. Натуральное число c, выбранное таким образом, обозначим через c_1. Тогда, очевидно, соблюдены условия ч4) г) и д). Это вытекает из отношений (5) и (6).

$k > 1$: Предположим, что мы уже построили $k - 1$ элементов искомых последовательностей $\{n_k\}_1^\infty$ и $\{c_k\}_1^\infty$. Построим n_k и c_k.

Пусть для $n \geq m_1^{(k)}$ верно $\dfrac{n_{k-1} - c_{k-1}}{n} + \dfrac{\varphi(n)}{n}\left(r_k' + \dfrac{1}{k}\right) < 1$, пусть для $(n \geq m_2^{(k)}$ верно $\varphi(n) > \dfrac{1}{2}k$ и пусть для $n \geq m_3^{(k)}$ имеет место $\varphi(n) >$

$$> \left[1 + \left(r_{k-1}' + \frac{1}{k-1}\right)\varphi(n_{k-1})\right]\left(r_k' + \frac{1}{k}\right)^{-1}.$$

Пусть $n_k = \max\{\max\limits_{i=1,2,3}\{m_i^{(k)}\},\ n_{k-1} + 1\}$. При этом выборе, очевидно, выполнено условие (4) а). Так как $n_k \geq m_2^{(k)}$, то возможно выбрать целое исло c так, что $\varphi(n_k)\left(r_k' - \dfrac{1}{k}\right) < c < \varphi(n_k)\left(r_k' + \dfrac{1}{k}\right)$, т. е.

$$(7)\qquad r_k' - \frac{1}{k} < \frac{c}{\varphi(n_k)} < r_k' + \frac{1}{k}.$$

Так как $n_k \geq m_1^{(k)}$, то имеет место $\dfrac{n_{k-1} - c_{k-1}}{n_k} + \dfrac{\varphi(n_k)}{n_k}\left(r_k' + \dfrac{1}{k}\right) < 1$, откуда вытекает $n_{k-1} - c_{k-1} + \varphi(n_k)\left(r_k' + \dfrac{1}{k}\right) < n_k$. Значит (с использованием неравенства (7))

$$(8)\qquad n_{k-1} - c_{k-1} + c < n_k.$$

Из отношения $n_k \geq m_3^{(k)}$ вытекает неравенство

$$1 + \left(r_{k-1}' + \frac{1}{k-1}\right)\varphi(n_{k-1}) < \left(r_k' + \frac{1}{k}\right)\varphi(n_k).$$

Поэтому мы можем целое число c выбрать так, что

(9) $$c > c_{k-1}.$$

Это следствие того, что число c_{k-1} удовлетворяет неравенству (4) г) $c_{k-1} < \left(r'_{k-1} + \frac{1}{k-1}\right) \varphi(n_{k-1})$. Число c, выбранное таким образом, обозначим через c_k. Из отношений (7), (8) и (9) вытекает, что c_k удовлетворяет условиям (4) б), в) и г).

Пользуясь последовательностями $\{n'_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, легко можно построить по частям последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) так, что $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ удовлетворяет условию $f(n_k, x) = c_k$. Из свойств (4) вытекает, что ряд, построенный этим образом, имеет свойство

$$\left| \frac{f(n_k, x)}{\varphi(n_k)} - r'_k \right| < \frac{1}{k}.$$

Выберем произвольно $\xi \in \langle 0, \infty \rangle$. Существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ так, что $|r'_{k_l} - \xi| < 1/l$. Поэтому

$$\left| \frac{f(n_{k_l}, x)}{\varphi(n_{k_l})} - \xi \right| \le \left| \frac{f(n_{k_l}, x)}{\varphi(n_{k_l})} - r'_{k_l} \right| + |r'_{k_l} - \xi| < \frac{1}{k_l} + \frac{1}{l} \leqslant \frac{2}{l},$$

$\frac{f(n_{k_l}, x)}{\varphi(n_{k_l})} \to \xi$. Легко видеть, что и в случае $\xi = +\infty$ существует возрастающая последовательность $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ так, что $\frac{f(n_{k_l}, x)}{\varphi(n_{k_l})} \to \infty$.

Лемма 5. *Множество M'_ξ — типа G_δ в W.*

Доказательство леммы 5. Пусть

$$M'_{\xi,k,p} = \left\{ x \in W \mid \sum_{n=p}^{\infty} \left| \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} - \xi \right| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Тогда $M'_{\xi,k} = \bigcap_{p=1}^{\infty} M'_{\xi,k,p}$ и имея ввиду отношение (3), имеет место

(10) $$M'_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} M'_{\xi,k,p}.$$

Аналогически как в лемме 2 можно убедиться, что множества $M'_{\xi,k,p}$ открыты в W (только вместо неравенства $\left| \frac{f(n, x)}{n} - \xi \right| < \frac{1}{k}$ рассматриваем неравенство $\left| \frac{f(n, x)}{\varphi(n)} - \xi \right| < \frac{1}{k}$). Затем из отношения (10) вытекает утверждение леммы.

Лемма 6. *Множество M'_ξ — всюду плотное в W.*

Лемма 6 доказывается аналогически лемме 3.

Доказательство теоремы 2 является опять аналогическим доказательству теоремы 1. Множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} M'_{r'_k}$, которое является остаточным в W, есть множество всех тех $x \in W$, для которых $\left\{\frac{f(n, x)}{\varphi(n)}\right\}'_n = \langle 0, \infty \rangle$.

Заметка 4. Множество

$$A' = \left\{x \in W \mid \left\{\frac{f(n, x)}{\varphi(n)}\right\}'_n = \langle 0, \infty \rangle\right\},$$

которого касается утверждение теоремы 2, является множеством первого мультипликативного класса с точки зрения борелевой классификации множеств. Для этого достаточно принять во внимание (подобно как в заметке 1), что

$$A' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in W \mid \sum_{n=p}^{\infty} \left|\frac{f(n, x)}{\varphi(n)} - r'_k\right| < \frac{1}{l}\right\}$$

($\{r'_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел интервала $(0, \infty)$), причем множества $A'_{k,l,p} = \left\{x \in W \mid \sum_{n=p}^{\infty} \left|\frac{f(n, x)}{\varphi(n)} - r'_k\right| < \frac{1}{l}\right\}$ открыты.

Так как пересечение счетной системы остаточных множеств является остаточным, то при помощи теоремы 2 можнио легко доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ — последовательность положительных вещественных функций, определенных на множестве всех натуральных чисел и пусть для каждого натурального k $\varphi_k(n) = o(n)$ и $\lim_{n\to\infty} \varphi_k(n) = +\infty$. Тогда для всех $x \in W$ за исключением точек множества первой категории в W имеет место*

$$\left\{\frac{f(n, x)}{\varphi_k(n)}\right\}'_n = \langle 0, \infty \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Šalát T., *Absolútne konvergentné rady a dyadické rozvoje*, Mat.-fyz. časop. *9* (1959), 3—14.

[2] Šalát T., *O istých priestoroch radov s Bairovskou metrikou*, Mat.-fyz. časop. *7* (1957), 193—206.

[3] Šalát T., *A remark on normal numbers*, Rev. Roum. Math. pures et appl. *9* (1966), 53—56.

[4] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste 1*, Warszawa 1958.

Поступило 22. 6. 1966.

Katedra algebry a teórie čísel
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava