Alois Švec

Křivka v afinní komplexní rovině

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 4, 282--286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127006

Matematický časopis 17 (1967), No. 4

KŘIVKA V AFINNÍ KOMPLEXNÍ ROVINĚ

ALOIS ŠVEC, Praha

V práci jsou odvozeny Frentovy formule; jejím smyslem je ukázati, jak se v komplexním prostoru pracuje pomocí jeho reálné representace. Pojem struktury J a $\mathscr{C}$ je běžný, viz např. [1]. Připomeňme, že křivkou v Hermiteově prostoru libovolné dimense se zabýval před mnoha lety O. Borůvka.

1. Nechť $\mathbf{R}$ resp. $\mathbf{C}$ značí těleso reálných resp. komplexních čísel. Uvažujme vektorový prostor $V = \mathbf{R}^m$. Označme $v_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \times V \to V$ skalární násobení $v_{\mathbf{R}}(r, v) = rv$.

Budeme říkati, že V má komplexní strukturu $\mathscr{C}$, je-li dáno zobrazení $v_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \times V \to V$, pro něž platí: (1) V se stává komplexním vektorovým prostorem, definujeme-li $v_{\mathbf{C}}(\alpha, v)$ jako skalární součin čísla α a vektoru v; (2) restrikce zobrazení $v_{\mathbf{C}}$ na $\mathbf{R} \times V$ je $v_{\mathbf{R}}$. Dále budeme říkati, že V má strukturu J, je-li dána lineární transformace $J : V \to V$, pro kterou $J^2 = -\mathrm{id}$. Mezi komplexními strukturami a strukturami J je vzájemně jednoznačná korespondence. Komplexní struktuře $\mathscr{C}$ přiřadíme $J_{\mathscr{C}}$ následujícím způsobem: $J_{\mathscr{C}}\, v = \mathrm{i}v$. Je-li dána struktura J, potom příslušná komplexní struktura $\mathscr{C}_J$ je definována relací $v_{\mathbf{C}}(\alpha + \mathrm{i}\beta, v) = \alpha v + \beta J v$.

V dalším budeme uvažovati afinní prostor A^4, v jehož vektorovém zaměření $V = \mathbf{R}^4$ je dána struktura J. Nechť M^2 je dvojrozměrná varieta a $\varphi : M^2 \to A^4$ je regulární zobrazení. Toto zobrazení nazveme J-zobrazením, jestliže $J\tau_m = \tau_m$ pro každé $m \in M^2$, kde $\tau_m = \varphi'_m T_m(M^2)$ je tečná rovina plochy $\varphi(M^2) \subset A^4$ v bodě m. Naším úkolem je lokální studium J-zobrazení $\varphi : M^2 \to A^4$; můžeme se omeziti na případ, kdy i $\varphi(M^2)$ je varieta.

J-reperem prostoru A^4 nazýváme každou soustavu $\{M; e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$, kde M je bod a e_1, e_2, Je_1 lineárně nezávislé vektory; je třeba poznamenati, že potom i e_1, e_2, Je_1, Je_2 jsou lineárně nezávislé. Každému bodu variety $\varphi(M^2)$ přiřadíme J-reper, který volíme tak, že e_1 a Je_1 leží v tečné rovině; toto lze učiniti, protože φ je J-zobrazením. Můžeme tedy psáti

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \omega^1 e_1 + \omega^3 J e_1, \\
\mathrm{d}e_1 &= \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 J e_1 + \omega_1^4 J e_2, \\
\mathrm{d}e_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 J e_1 + \omega_2^4 J e_2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Pro přehlednost napišme ještě

$$\begin{aligned}(2)\qquad \mathrm{d}Je_1 &= -\omega_1^3 e_1 - \omega_1^4 e_2 + \omega_1^1 Je_1 + \omega_1^2 Je_2,\\ \mathrm{d}Je_2 &= -\omega_2^3 e_1 - \omega_2^4 e_2 + \omega_2^1 Je_1 + \omega_2^2 Je_2.\end{aligned}$$

Pro Pfaffovy formy ω^i, ω_j^i platí obvyklé rovnice struktury afinního prostoru. Vnějším diferencováním základních rovnic

$$(3)\qquad \omega^2 = \omega^4 = 0$$

vychází

$$(4)\qquad \omega^1 \wedge \omega_1^2 - \omega^3 \wedge \omega_1^4 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^3 \wedge \omega_1^2 = 0$$

a tedy

$$(5)\qquad \omega_1^2 = a\omega^1 - b\omega^3, \quad \omega_1^4 = b\omega^1 + a\omega^3.$$

V případě $a = b = 0$ se bod M pohybuje v rovině, jejíž zaměření je dáno vektory e_1, Je_1. Vylučme tento případ a předpokládejme $a \neq 0$; ihned by se ukázalo, že úvaha založená na předpokladu $b \neq 0$ nedává nic nového. Zaveďme nový vektor

$$(6)\qquad f_2 = ae_2 + bJe_2, \quad \text{tj.} \quad Jf_2 = -be_2 + aJe_2.$$

Potom $\mathrm{d}e_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^3 Je_1 + \omega^1 f_2 + \omega^3 Jf_2$; píšeme-li opět e_2 místo f_2, dostáváme tak repery, pro něž

$$(7)\qquad \omega_1^2 = \omega^1, \quad \omega_1^4 = \omega^3,$$

Vnější derivování dává

$$\begin{aligned}(8)\qquad \omega^1 \wedge (\omega_2^2 - 2\omega_1^1) - \omega^3 \wedge (\omega_2^4 - 2\omega_1^3) &= 0,\\ \omega^1 \wedge (\omega_2^4 - 2\omega_1^3) + \omega^3 \wedge (\omega_2^2 - 2\omega_1^1) &= 0\end{aligned}$$

a tedy

$$(9)\qquad \omega_2^2 - 2\omega_1^1 = \alpha\omega^1 - \beta\omega^3, \quad \omega_2^4 - 2\omega_1^3 = \beta\omega^1 + \alpha\omega^3.$$

Zaveďme nové vektorové pole

$$(10)\qquad f_2 = e_2 - \tfrac{1}{3}\alpha e_1 - \tfrac{1}{3}\beta Je_1.$$

Rovnice (7) jsou zachovány a je docíleno relace $\omega_1^1 = \frac{1}{2}\omega_2^2$ čili $\alpha = \beta = 0$. Je tedy vždy možná taková specialisace reperů, že platí (7) a

$$(11)\qquad \omega_2^2 = 2\omega_1^1, \quad \omega_2^4 = 2\omega_1^3.$$

Vnější diferencování dává

$$(12)\qquad \omega^1 \wedge \omega_2^1 - \omega^3 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_2^3 + \omega^3 \wedge \omega_2^1 = 0$$

a

$$\omega_2^1 = r\omega^1 - s\omega^3, \quad \omega_2^3 = s\omega^1 + r\omega^3. \tag{13}$$

Případ $r = s = 0$ odsuneme na konec této části; nechť $r \neq 0$. Analogickou úvahou se dospívá k závěru, že existují J-repery, pro něž se rovnice (13) redukují na

$$\omega_2^1 = \omega^1, \quad \omega_2^3 = \omega^3; \tag{14}$$

stačí totiž nalézti všechny změny reperů, zachovávající (7) a (11). Vnějším diferencováním dostáváme

$$\omega^1 \wedge \omega_1^1 - \omega^3 \wedge \omega_1^3 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^3 \wedge \omega_1^1 = 0 \tag{15}$$

a

$$\omega_1^1 = A\omega^1 - B\omega^3, \quad \omega_1^3 = B\omega^1 + A\omega^3. \tag{16}$$

Tím jsou repery úplně specialisovány.

Protože

$$\mathrm{d}\omega^1 = 0, \quad \mathrm{d}\omega^3 = 0, \tag{17}$$

existují na varietě M^2 (alespoň lokálně) souřadnice u, v, pro které

$$\omega^1 = \mathrm{d}u, \quad \omega^3 = \mathrm{d}v. \tag{18}$$

Z (16) pak dostáváme podmínky integrability

$$\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}u - \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}v = 0, \quad \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}v = 0, \tag{19}$$

tj.

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -\frac{\partial B}{\partial u}, \quad \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial v}. \tag{20}$$

Vraťme se k vyloučenému případu, kdy rovnice (13) jsou

$$\omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{21}$$

Potom vektorový prostor, určený vektory e_2 a Je_2, je pevný. Uvažujeme-li všechny změny J-reperů, které zachovávají rovnice (3), (7) a (11), zjistíme přímým výpočtem, že vektor e_2 můžeme voliti libovolně. Nechť tedy vektor e_2 je pevný, což zanmená

$$\omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^3 = 0. \tag{22}$$

Protože $\mathrm{d}\omega^1 = \mathrm{d}\omega^3 = 0$, existují na M^2 alespoň lokálně souřadnice u, v tak, že

$$\omega^1 = \mathrm{d}u, \quad \omega^3 = \mathrm{d}v. \tag{23}$$

Základní rovnice se redukují na

$$\text{(24)}\qquad \begin{aligned} dM &= du\,.\,e_1 + dv\,.\,Je_1, \\ de_1 &= du\,.\,e_2 + dv\,.\,Je_2, \quad de_2 = 0, \\ dJe_1 &= -\,dv\,.\,e_2 + du\,.\,Je_2, \quad dJe_2 = 0. \end{aligned}$$

Je opět věcí rutiny ukázati, že v A^4 existuje base O, f_1, f_2, Jf_1, Jf_2 tak, že parametrické vyjádření plochy je

$$\text{(25)}\qquad M(u, v) = O + u\,.\,f_1 + v\,.\,Jf_1 + \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\,.\,f_2 + uv\,.\,Jf_2.$$

2. Od struktury J přejdeme nyní k přiřazené struktuře $\mathscr{C}_J$; je $iv = Jv$ pro každý vektor $v \in V$. Všimněme si nejprve obecného případu plochy v A^4. Zaveďme komplexní lokální souřadnici $z = u + iv$ na M^2 a obvyklé operátory

$$\text{(26)}\qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Dostáváme

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &= e_1, & \frac{\partial M}{\partial v} &= ie_1, \\ \frac{\partial e_1}{\partial u} &= Ke_1 + e_2, & \frac{\partial e_1}{\partial v} &= iKe_1 + ie_2, \\ \frac{\partial e_2}{\partial u} &= e_1 + 2Ke_2, & \frac{\partial e_2}{\partial v} &= ie_1 + 2iKe_2, \end{aligned}$$

kde

$$\text{(28)}\qquad K = A + Bi.$$

Odtud máme

$$\text{(29)}\qquad \frac{\partial M}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial e_1}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial e_2}{\partial \bar{z}} = 0,$$

takže M, e_1 a e_2 jsou holomorfní vektorové funkce souřadnice z. Dále

$$\text{(30)}\qquad \frac{\partial K}{\partial \bar{z}} = 0$$

vzhledem k (20), takže také K je holomorfní funkcí proměnné z; K se nazývá *křivostí*. Konečně dostáváme

$$\text{(31)}\qquad \frac{\partial M}{\partial z} = e_1, \quad \frac{\partial e_1}{\partial z} = Ke_1 + e_2, \quad \frac{\partial e_2}{\partial z} = e_1 + 2Ke_2,$$

což jsou *Frenetovy formule pro křivku v komplexní afinní rovině.* Konečně v každém vyjímečném případě lze v příslušné komplexní afinní rovině zavésti komplexní souřadnice $z = u + iv$, $\omega = u_1 + iv_1$ tak, že rovnice křivky, odpovídající prvnímu resp. druhému případu, je

$$w = 0 \quad \text{resp.} \quad w = \frac{1}{2} z^2. \tag{32}$$

LITERATURA

[1] Frölicher A., Kobayashi E. T., Nijenhuis A., *Deformation theory of complex manifolds*, Technical Report No. 10, Univ. of Washington 1959.

Došlo 13. 6. 1966.

Matematický ústav
Karlovy university,
Praha

CURVE IN AFFINE COMPLEX PLANE

Alois Švec

Summary

The Frenet formulas for a holomorphic curve in the affine complex plane are produced.