Matematický časopis

Jaroslav Březina

Použitie samočinných počítačov pri skúmání istých rozkladov kompletného grafu

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 1, 17--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126998

Matematický časopis 23 (1973), No. 1

POUŽITIE SAMOČINNÝCH POČÍTAČOV PRI SKÚMANÍ ISTÝCH ROZKLADOV KOMPLETNÉHO GRAFU

JAROSLAV BŘEZINA, Gottwaldov

1. Úvod

Predložená práca nadväzuje na články [1], [2] a [3], ktoré sa zaoberajú rozkladmi kompletných grafov na faktory s danými priemermi; analogické úlohy o rozklade kompletných orientovaných grafov sú skúmané v [4], [5] a [6]. My sa však budeme zaoberať len neorientovanými grafmi. V našej práci uvedieme rad výsledkov, ktoré súvisia s uvedenou problematikou. Po definícii základných termínov (v 2. časti práce) budeme používať hlavne dve metódy, a to analytickú (časť 3) a maticovú (časť 4). Na základe získaných výsledkov zostrojíme niekoľko algoritmov na riešenie rôznych úloh, ktoré súvisia s hľadaním uvedených rozkladov (časť 5).

Algoritmy uvádzame vo forme fortranovského programu pre samočinný počítač NCR 315. Osobitné postavenie tu hrá algoritmus pre vytváranie náhodných matíc, ich rozkladu na matice odpovedajúce faktorom a zisťovanie, či spĺňajú predpísané podmienky. Praktický význam teoretických úvah ilustrujeme hneď na začiatku časti 3 na tzv. probléme leteckých spoločností (pozri tiež [2], str. 55). V 5. časti uvádzame aj vyhodnotenie využitia počítača a naznačíme, ako možno pomocou počítača rozšíriť doterajšie výsledky. Pre jednoduchosť sa v prevažnej časti práce obmedzíme na prípad troch faktorov, aj keď sa metódy dajú bez ťažkostí preniesť na všeobecný prípad k faktorov ($k \geq 2$). Ako vyplýva z [1] a [2], bez ujmy na všeobecnosti sa môžeme obmedziť na skúmanie rozkladov konečných kompletných grafov.

2. Definície základných termínov

2.1. *Grafom* nazývame usporiadanú dvojicu $G = (V, H)$, kde V je daná neprázdna množina, H je ľubovoľná podmnožina množiny K, t. j. $H \subseteqq K$, kde K je množina všetkých dvojprvkových podmnožín množiny V. Prvky množiny V nazývame vrcholy, prvky množiny H hrany grafu G.

2.2. *Kompletným grafom* nazývame graf $G = (V, H)$, kde H je množina všetkých dvojprvkových podmnožín množiny V, t. j. $H = K$.

Poznámka. Pri grafickom znázornení vrcholom grafu odpovedajú body v rovine, hranám grafu spojnice týchto bodov. V kompletnom grafe je každý vrchol grafu spojený hranou s ľubovoľným iným vrcholom grafu.

2.3. *Konečným grafom* nazývame graf, ktorý má konečný počet vrcholov.

2.4. *Súvislým grafom* nazývame graf, v ktorom medzi každými jeho dvoma vrcholmi existuje aspoň jeden sled, pričom sledom rozumieme konečnú postupnosť vrcholov a hrán medzi vrcholmi x_0 a x_n grafu v tvare: $(x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}x_n, x_n)$; číslo n nazývame *dĺžkou* sledu. Sled, v ktorom sa každý vrchol grafu vyskytuje najviac raz, nazývame *cestou*.

2.5. *Podgrafom grafu* $G = (V, H)$ nazývame graf $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{H})$ taký, že $\bar{V} \subseteqq V$, $\bar{H} \subseteqq H$. Ak $\bar{V} = V$, $\bar{G}$ nazývame *faktorom* grafu G.

2.6. *Rozkladom grafu na faktory* rozumieme systém S faktorov grafu G, ktorého každá hrana je obsiahnutá práve v jednom faktore systému S.

2.7. *Vzdialenosťou vrcholov* u a v rozumieme dĺžku najkratšieho sledu medzi vrcholmi u a v; ak medzi dvoma vrcholmi neexistuje sled, definujeme ich vzdialenosť ako nekonečnú.

2.8. *Priemerom grafu* nazývame vzdialenosť maximálnej hodnoty; ak táto maximálna vzdialenosť neexistuje, definujeme priemer grafu ako nekonečný.

2.9. Hovoríme, že *vrchol* grafu je *stupňa* n, ak z neho vychádza (do neho vchádza, s ním inciduje) práve n hrán.

2.10. Ak je n prirodzené číslo, nazvime $(0-n)$*-maticou* takú maticu, ktorej prvkami sú len čísla 0, 1, 2, ..., n. Špeciálne $(0-1)$-matica má za prvky len nuly a jednotky.

2.11. *Operácie* s $(0-1)$-maticami definujeme ako obyčajne, s tým rozdielom, že kladieme $1 \oplus 1 = 1$. Teda napr. násobenie štvorcových matíc $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ rovnakého stupňa definujeme takto:

$$A \otimes B = C = (c_{ij}),$$

kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} \oplus a_{i2}b_{2j} \oplus \ldots \oplus a_{in}b_{nj};$$

teda súčinom je opäť štvorcová $(0-1)$-matica C.

2.12. *Mocniny štvorcovej matice* A definujeme takto:

$A^{(0)} = I$, kde I je jednotková matica príslušného stupňa;
$A^{(1)} = A$;
$A^{(2)} = A \otimes A$;
$A^{(3)} = A^{(2)} \otimes A$, atď.

2.13. Znakom J budeme označovať štvorcovú maticu (jej stupeň bude vždy zrejmý zo súvislosti), ktorej všetky prvky sú jednotky.

2.14. *Incidenčnou maticou* grafu G o vrcholoch $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (kde n je prirodzené číslo), rozumieme štvorcovú $(0 - 1)$-maticu $X = (x_{ij})$, definovanú takto $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak } i = j; \\ 1, \text{ ak } i \neq j \text{ a v } G \text{ existuje hrana } v_i v_j; \\ 0, \text{ ak } i \neq j \text{ a v } G \text{ neexistuje hrana } v_i v_j. \end{cases}$$

Napr. incidenčnou maticou kompletného grafu je matica J.

3. Analytická metóda

3.1. *Problém leteckých spoločností* bol v [2] formulovaný približne takto: Tri letecké spoločnosti majú zorganizovať osobnú leteckú dopravu medzi n mestami takým spôsobom, že každá z nich musí byť schopná prepravovať cestujúcich svojimi vlastnými lietadlami z každého z n miest do zvyšných $n - 1$ miest buď priamo, buď s jedným medzipristátím (v niektorom z $n - 1$ zvyšných miest). Ďalej sa požaduje, aby priamu prepravu medzi dvoma mestami zaisťovala vždy len jedna z troch leteckých spoločností.

Tento problém je zrejme ekvivalentný s problémom, či jestvuje rozklad grafu $\langle n \rangle$ na 3 faktory o priemere 2. Tento problém je doteraz otvorený pre $n = 12$; pre všetky ostatné n je vyriešený.

Predovšetkým dokážeme dve pomocné vety.

3.2. Lema 1. *Ak je kompletný graf o n vrcholoch (n prirodzené, $\geqslant 2$) rozložený na 3 faktory F_1, F_2, F_3 priemeru 2, tak žiaden z týchto faktorov neobsahuje vrchol stupňa <3 ani stupňa $> n - 7$.*

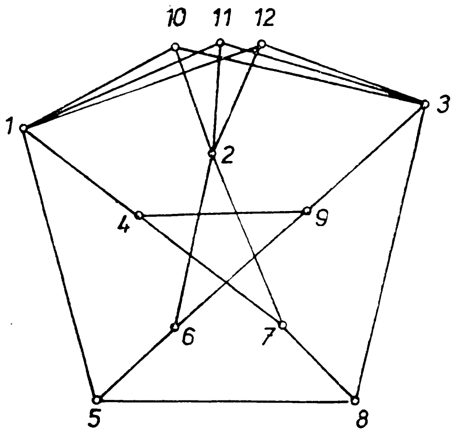
Dôkaz. Nech je F_i jeden faktor z rozkladu. Keby F_i obsahoval vrchol stupňa 0, nebol by F_i súvislý a nemohol by mať priemer 2. Pripusťme, že F_i obsahuje vrchol u stupňa 1. Potom vrchol v, susedný k u v F_i musí mať stupeň $n - 1$, aby priemer F_i bol 2. Potom však ostatné 2 faktory majú vrchol v stupňa 0, čo sme práve vylúčili.

Nech F_i obsahuje vrchol u stupňa 2, nech v, w sú 2 vrcholy susedné k u. Nech x je ľubovoľný ďalší vrchol z F_i; aby k nemu existovala z u cesta dĺžky 2, musí byť x spojené buď s v alebo s w. Teda neexistuje v $\langle n \rangle$ cesta tvaru (v, vx, x, xw, w), z ktorej by aspoň jedna hrana neležala v F_i. Preto v ostatných dvoch faktoroch neexistuje medzi v a w cesta dĺžky 2. V jednom z nich môže existovať medzi v a w cesta dĺžky 1 (t. j. hrana), a v druhom už žiadna cesta dĺžky ≤ 2, teda tento faktor nemôže mať priemer 2.

Dokázali sme, že všetky vrcholy vo všetkých faktoroch majú stupeň $\geqslant 3$. Keďže súčet stupňov všetkých faktorov pre každý vrchol je $n - 1$, každý vrchol v každom faktore má stupeň $\leq (n-1)-3-3=n-7$. Lema je dokázaná.

3.3. Lema 2. *Najmenší počet hrán grafu o 12 vrcholoch priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5 je 21.*

Dôkaz. Požadovaný graf s 21 hranami existuje, ako ukazuje obr. 1. Dokážeme, že neexistuje graf o 12 vrcholoch s 20 hranami priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5. Tým bude dokázané zrejme aj to, že neexistuje takýto graf s menej než 20 hranami (lebo z takéhoto by sme dostali požadovaný graf o 20 hranách pridaním niekoľkých hrán; ľahko sa zistí, že to ide vždy urobiť tak, aby nevznikol vrchol stupňa >5).



Obr. 1. Graf o 12 vrcholoch priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5.

Pripusťme, že existuje graf s 12 vrcholmi, 20 hranami, priemerom 2, ktorého všetky vrcholy majú stupeň 3, 4 alebo 5. Zrejme sú tri možnosti, ako budú rozdelené stupne jednotlivých vrcholov (lebo súčet stupňov všetkých vrcholov rovná sa dvojnásobku počtu hrán, t. j. 40):

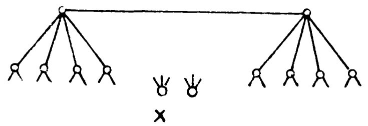
(a) 2 vrcholy stupňa 5,
10 vrcholov stupňa 3.

(b) 1 vrchol stupňa 5,
2 vrcholy stupňa 4,
9 vrcholov stupňa 3.

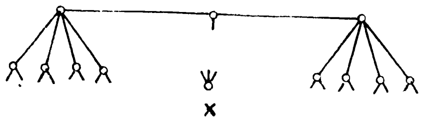
(c) 4 vrcholy stupňa 4,
8 vrcholov stupňa 3.

Ukážeme, že všetky tieto možnosti vedú k sporu:

(a) Sú dve možnosti: buď je vzdialenosť vrcholov piateho stupňa 1 alebo 2 (obr. 2 a 3):



Obr. 2. Vrcholy piateho stupňa o vzdialenosti 1.

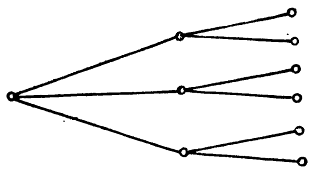


Obr. 3. Vrcholy piateho stupňa o vzdialenosti 2.

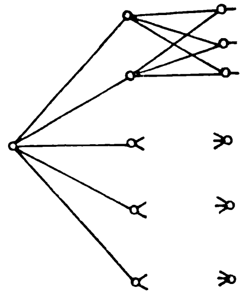
V obidvoch prípadoch existuje vrchol x tretieho stupňa, ktorý je susedný s 3 vrcholmi tretieho stupňa, takže z x sa po cestách dĺžky ≤ 2 dostaneme najviac do $1 + 3 + 6 = 10$ vrcholov (obr. 4), takže graf nemá priemer 2.

(b) Sú tri možnosti: Vrchol stupňa 5 je susedný s 2 (obr. 5) alebo 1 (obr. 6) alebo 0 (obr. 7) vrcholmi stupňa 4. Všetky vrcholy stupňa 3, ktoré nie sú susedné s vrcholom stupňa 5, musia byť z podobného dôvodu ako v (a) susedné aspoň s 2 vrcholmi stupňa 4. Ľahko sa zistí, že graf nebude mať priemer 2.

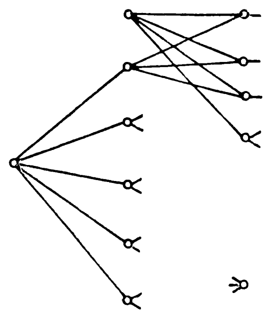
(c) Označme vrcholy stupňa 4 znakmi x_1, x_2, x_3, x_4. Z podobného dôvodu ako v (a) každý vrchol stupňa 3 musí byť spojený aspoň s 2 vrcholmi stupňa 4. Preto z vrcholov stupňa 3 vychádza aspoň $8 \,.\, 2 = 16$ hrán, ktoré končia vo vrcholoch stupňa 4. Ale z vrcholov stupňa 4 vychádza len $4 \,.\, 4 = 16$ hrán,



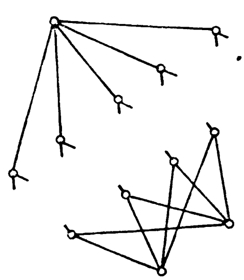
Obr. 4. Vrchol tretieho stupňa susedný s 3 vrcholmi tretieho stupňa.



Obr. 5. Vrchol stupňa 5 susedný s 2 vrcholmi stupňa 4.

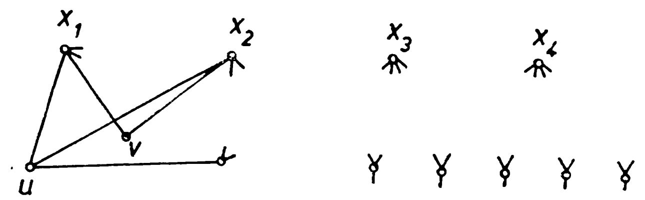


Obr. 6. Vrchol stupňa 5 susedný s vrcholom stupňa 4.



Obr. 7. Vrchol stupňa 5 nesusediaci so žiadnym vrcholom stupňa 4.

teda všetky musia končiť vrcholom stupňa 3. Vrcholy stupňa 4 teda nie sú navzájom spojené hranami. Aby priemer mohol byť 2, musia byť spojené cestou dĺžky 2. Preto pre každé $1 \leq i < j \leq 4$ je množina V_{ij} tých vrcholov, ktoré sú spojené s x_i aj s x_j, neprázdna. Na druhej strane, ako sme už dokázali, každý vrchol stupňa 3 je spojený s dvoma vrcholmi stupňa 4, teda každý vrchol stupňa 3 patrí do niektorej množiny V_{ij}. Týchto množín je 6: V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{23}, V_{24}, V_{34}, a vrcholov stupňa 3 je 8. Preto jedna z množín V_{ij}, napr. V_{12}, obsahuje aspoň 2 vrcholy, označme ich u, v. (Obr. 8.) Keďže tretí vrchol, s ktorým je u susedné, má stupeň 3, z u sa dostaneme po cestách dĺžky ≤ 2 najviac do 11 vrcholov, a teda priemerom grafu nemôže byť 2.



Obr. 8. Ilustrácia k dôkazu lemy 2.

3.4. Veta 1. *Ak možno graf* $\langle 12 \rangle$ *rozložiť na* 3 *faktory* F_1, F_2, F_3 *priemeru* 2, *tak alebo všetky* 3 *faktory majú* 22 *hrán, alebo* 2 *majú* 21 *hrán a tretí* 24; *alebo jeden má* 21 *hrán, druhý* 22 *hrán a tretí* 23 *hrán.*

Dôkaz. Kompletný graf $\langle 12 \rangle$ má 66 hrán. Podľa lemy 1 každé F_i $(i = 1, 2, 3)$ má len vrcholy stupňa 3, 4 a 5. Podľa lemy 2 každé F_i má aspoň 21 hrán. Je zrejmé, že týmto podmienkam odpovedajú len 3 prípustné rozklady čísla 66: $22 + 22 + 22$, $21 + 21 + 24$, $21 + 22 + 23$, čím je veta dokázaná.

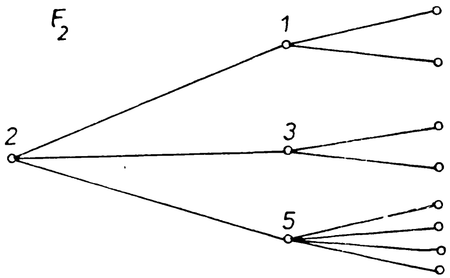
Poznámka. Vzniká otázka, či graf z obr. 1 nemožno doplniť ďalšími dvoma faktormi na rozklad $\langle 12 \rangle$ na 3 faktory priemeru 2. Ukážeme, že to nie je možné.

3.5. Veta 2. *Graf z obr.* 1 *nemôže byť faktorom v rozklade grafu* $\langle 12 \rangle$ *na* 3 *faktory priemeru* 2.

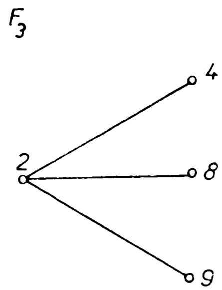
Dôkaz. Pripusťme, že by existoval takýto rozklad. Hrany 12, 13, 23 nie sú v F_1, sú teda v F_2 a F_3. Teda aspoň dve z týchto troch hrán sú v F_2 alebo F_3. Zvoľme označenie faktora tak, aby tieto dve hrany boli v F_2. Predpokladajme pre určitosť, že sú to hrany 12 a 23 (ďalšie 2 možnosti sa riešia vzhľadom na symetriu úplne analogicky).

V F_1 je vrchol 2 spojený s vrcholmi 6, 7, 10, 11, 12. V F_2 a F_3 je teda vrchol 2 spojený s vrcholmi 1, 2, 3, 4, 5, 8 a 9. Podľa predpokladu v F_2 je vrchol 2 spojený s vrcholmi 1 a 3. (V F_1 sú vrcholy 1, 2 a 3 piateho stupňa, preto v F_2 a F_3 sú to vrcholy tretieho stupňa.) Tretí vrchol v F_2 spojený s 2 je 4, 5, alebo 9.

Zvoľme pre určitosť 5. (Opäť si to vzhľadom na izomorfizmy môžeme dovoliť). V F_2 je vrchol 2, ktorý je tretieho stupňa, spojený s dvoma vrcholmi 1 a 3 tretieho stupňa. Preto tretí vrchol 5 spojený s 2 musí byť piateho stupňa (aby sme sa z 2 dostali po cestách dĺžky ≤ 2 do všetkých 12 vrcholov) a 2 nesmie ležať v F_2 v trojuholníku ani štvoruholníku. Vyzerá to teda takto (obr. 9):



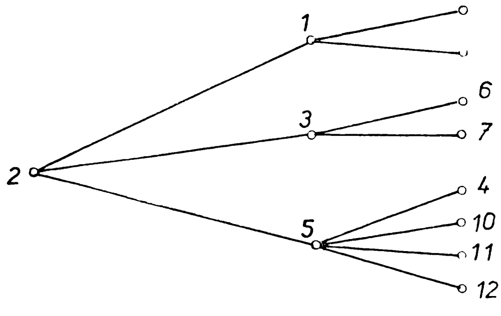
Obr. 9. Ilustrácia k dôkazu vety 2.



Obr. 10. Ilustrácia k dôkazu vety 2.

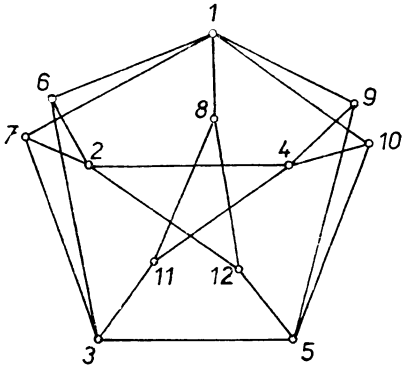
V F_3 (obr. 10) vrcholy 2 a 3 môžu byť spojené cestou dĺžky dve len ce. vrchol 4, 8 alebo 9. 8 ani 9 to však nemôžu byť, lebo hrany 83 a 93 sú v F_1z Teda v F_3 je hrana 43. V F_1 sú hrany 38, 39, 3 10, 3 11 a 3 12. Hrany 31 ani 35 nemôžu byť v F_2, lebo 2 by ležala v trojuholníku. Preto v F_2 3 môže byť spojené len s 2, 6 a 7. Cesta dĺžky dva z 2 do 10 v F_2 nemôže viesť cez 1 ani cez 3, lebo hrany 1 10 a 3 10 sú v F_1. Preto môže to byť len cesta 2 5 10, takže v F_2 je hrana 5 10. Z podobných dôvodov je v F_2 aj hrana 5 11 a 5 12. Podobne sa zistí, že v F_2 2 s 4 môže byť spojené len cez 5 (14 je v F_1, 34 je v F_3). Teda F_2 vyzerá tak, ako je znázornené na obr. 11.

Zvyšujúce dva vrcholy sú 8 a 9. Teda v F_2 sú hrany 18 a 19. Potom ale v F_3 nemôže existovať cesta dĺžky ≤ 2 z 2 do 1. Cez 4 nemôže totiž ísť, lebo 14 je v F_1. Ani cez 8 alebo 9 nemôže ísť, lebo 18 a 19 je v F_2: teda F_3 nemôže mať priemer dva, čo je spor.



Obr. 11. Ilustrácia k dôkazu vety 2.

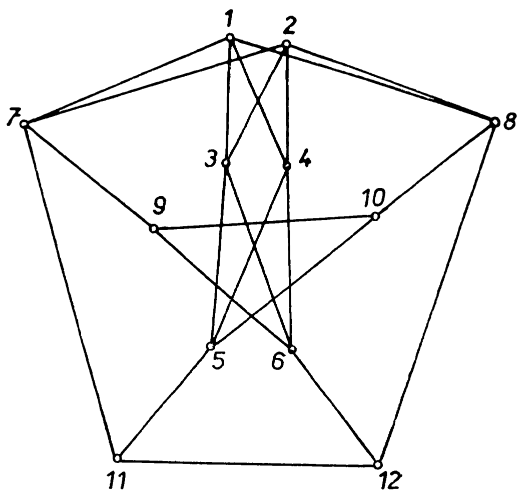
3.6. Poznámka. Veta 2 neumožňuje vo vete 1 vynechať druhú a tretiu možnosť, keďže existujú aj iné grafy o 12 vrcholoch a 21 hranách priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5. Jeden z nich je na obr. 12.



Obr. 12. Graf o 12 vrcholoch a 21 hranách priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5.

Úplné riešenie analytickou metódou by vyžadovalo nájsť všetky takéto grafy (a podobne grafy s 22 hranami) a každý z nich preskúšať metódami podobnými tým, aké sú použité vo vete 2. Pri skúmaní takýchto grafov s 22 hranami stačí preskúšať tie, ktoré neobsahujú ako podgraf žiadny graf s 21 hranami žiadaného tvaru (t. j. s 12 vrcholmi, priemeru 2, bez vrcholu stupňa <3 a >5).

Jeden takýto graf je znázornený na obr. 13.



Obr. 13. Graf o 12 vrcholoch a 22 hranách priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5 neobsahujúci žiadny podgraf o 12 vrcholoch s 21 hranami priemeru 2 bez vrcholov stupňa <3 a >5.

4. Maticová metóda

4.1. Lema 3. *Dané sú prirodzené čísla n a s. Nech G je graf s n vrcholmi v_1, $v_2, \ldots, v_n$. Nech A je incidenčná matica grafu G. Potom o matici $A^{(s)} = (b_{ij})$ platí:*

$b_{ij} = 1$ práve vtedy, keď v G existuje cesta dĺžky $\leq s$ medzi v_i a v_j;

$b_{ij} = 0$ v opačnom prípade.

Dôkaz. Robí sa indukciou vzhľadom na s.

1°. Ak $s = 1$, tak $A^{(s)} = A = (a_{ij})$; na základe definície incidenčnej matice (pozri 2.14) totiž skutočne platí:

$a_{ij} = 1$, ak $i = j$, t. j. ak ide o spojenie vrcholu so sebou samým, cestou dĺžky $0 \leq 1$; alebo ak vrcholy v_i a v_j sú spojené cestou, ktorá má dĺžku 1, čo je ≤ 1;

$a_{ij} = 0$, ak ide o opačný prípad.

Teda pre $s = 1$ tvrdenie lemy 3 platí.

2°. Označme $A^{(s-1)} = (b_{ij})$; $A^{(s)} = (c_{ij})$; použime indukčný predpoklad, t. j. predpokladajme, že tvrdenie lemy 3 platí pre $s - 1$, t. j. že platí:

$b_{ij} = 1$, ak v G existuje medzi vrcholmi v_i a v_j cesta dĺžky $\leq s - 1$;

$b_{ij} = 0$, ak v G neexistuje medzi vrcholmi v_i a v_j cesta dĺžky $\leq s - 1$.

Dokážeme, že platí tiež:

$c_{ij} = 1$, ak v G existuje medzi vrcholmi v_i a v_j cesta dĺžky $\leq s$;

$c_{ij} = 0$, v opačnom prípade.

Platí:

$$A^{(s)} = A^{(s-1)} \otimes A, \quad \text{t. j.} \quad c_{ij} = b_{i1}a_{1j} \oplus \ldots \oplus b_{in}a_{nj}.$$

Máme dokázať, že

$c_{ij} = 1$, ak v G existuje z v_i do v_j cesta dĺžky $\leq s$;

$c_{ij} = 0$, v opačnom prípade.

Nech $c_{ij} = 1$, t. j. $b_{i1}a_{1j} \oplus \ldots \oplus b_{in}a_{nj} = 1$; preto niektoré $b_{ik}a_{kj} = 1$, takže $b_{ik} = 1$, $a_{kj} = 1$. Preto v G existuje cesta dĺžky $\leq s - 1$ z v_i do v_k a súčasne v G existuje cesta dĺžky 1, t. j. hrana z v_k do v_j, takže v G existuje sled z v_i do v_j dĺžky $\leq s$. Teda v G existuje cesta dĺžky $\leq s$ z v_i do v_j.

Predpokladajme teraz, že v G existuje z v_i do v_j cesta dĺžky $\leq s$.

Nech v_kv_j je posledná hrana tejto cesty. Zrejme v G existuje z v_i do v_k cesta dĺžky $\leq s - 1$ a hrana v_kv_i. Podľa indukčného predpokladu $b_{ik} = 1$, $a_{kj} = 1$, takže $c_{ij} = 1$.

4.2. Lema 4. *Nech je G graf o n vrcholoch (kde n je prirodzené číslo), nech A je incidenčná matica grafu G. Platí:*

(1) *Ak existuje prirodzené číslo d také, že $A^{(d-1)} \neq J$, $A^{(d)} = J$, tak $d < n$ a d je priemer grafu G.*

(2) *Ak* $A^{(n-1)} \neq J$, *tak* G *má nekonečný priemer.*

Dôkaz vyplýva z lemy 3.

(1) Predpokladajme, že existuje prirodzené číslo d také, že platí:

$$A^{(d-1)} \neq J, \quad A^{(d)} = J.$$

Máme dokázať, že maximálna vzdialenosť dvoch vrcholov v G je d. Keďže $A^{(d-1)} \neq J$, existuje prvok x_{ij} matice $A^{(d-1)}$ taký, že $x_{ij} \neq 1$, t. j. $x_{ij} = 0$. Podľa lemy 3 v G neexistuje medzi vrcholmi v_i a v_j cesta dĺžky $\leq d - 1$, takže $\varrho_G(v_i, v_j) > d - 1$. Preto platí

$$\max_{v_\alpha, v_\beta \in G} \varrho_G(v_\alpha, v_\beta) \geqq d. \tag{1'}$$

Keďže $A^{(d)} = J$, pre všetky prvky y_{ij} matice $A^{(d)}$ platí $y_{ij} = 1$. Podľa lemy 3 medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu G existuje cesta dĺžky $\leq d$, t. j. $\varrho_G(v_i, v_j) \leq d$, odkiaľ dostávame:

$$\max_{v_\alpha, v_\beta \in G} \varrho_G(v_\alpha, v_\beta) \leq d. \tag{1''}$$

Z (1') a z (1'') vyplýva, že:

$$\max_{v_\alpha, v_\beta \in G} \varrho_G(v_\alpha, v_\beta) = d,$$

teda d je priemer grafu G, q. e. d. Zrejme $d < n$.

(2) Pripusťme, že priemer grafu G je konečný; označme ho D. Zrejme $D < n$. Podľa lemy 3 a 4 $A^{(D-1)} \neq J$, $A^{(D)} = J$, odkiaľ $A^{(D+1)} = A^{(D+2)} = \ldots = A^{(n-1)} = J$, to je ale spor s podmienkou $A^{(n-1)} \neq J$.

4.3. Veta 3. *Dané sú prirodzené čísla n, d, e, f. Platí: kompletný graf s n vrcholmi možno rozložiť na 3 faktory s priemermi d, e, f práve vtedy, keď existujú štvorcové* (0—1)*-matice* $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ a $Z = (z_{ij})$ *stupňa n také, že:*

(1) $x_{ii} = y_{ii} = z_{ii} = 1$ *pre každé* $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2) $x_{ij} = x_{ji}$, $y_{ij} = y_{ji}$, $z_{ij} = z_{ji}$ *pre všetky* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (*t. j. matice X, Y a Z sú symetrické*);

(3) $X^{(d-1)} \neq J$, $Y^{(e-1)} \neq J$, $Z^{(f-1)} \neq J$;

(4) $X^{(d)} = Y^{(e)} = Z^{(f)} = J$;

(5) $x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} = 1$ *pre každé* $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Dôkaz vyplýva z lemy 4: Nech $\langle n \rangle$ možno rozložiť na 3 faktory F_1, F_2, F_3 s priemermi d, e, f. Označme incidenčné matice faktorov F_1, F_2, F_3 v danom poradí ako matice X, Y, Z. Zrejme platí (1), (2), (3) a (4) vyplýva z lemy 4. (5) vyplýva z toho, že $\{F_1, F_2, F_3\}$ je rozklad grafu $\langle n \rangle$ na 3 faktory.

Nech platí (1) až (5). Z (1) a (2) vyplýva, že X, Y, Z sú incidenčné matice istých faktorov F_1, F_2, F_3 grafu $\langle n \rangle$; z (3) a (4) podľa lemy 4 vyplýva, že

F_1 má priemer d, F_2 má priemer e a F_3 má priemer f. Z (5) vyplýva, že $\{F_1, F_2, F_3\}$ je rozklad grafu $\langle n \rangle$ na 3 faktory.

4.4. Poznámka. Ak je daná ľubovoľná štvorcová (0—3)-matica $A = (a_{ij})$, môžeme jej priradiť štvorcové (0—1)-matice $X_A = (x_{ij})$, $Y_A = (y_{ij})$, $Z_A = (z_{ij})$ toho istého stupňa takto:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak } i = j \text{ alebo ak } i \neq j,\ a_{ij} = 1; \\ 0, \text{ v opačnom prípade.} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak } i = j \text{ alebo ak } i \neq j,\ a_{ij} = 2; \\ 0, \text{ inak.} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak } i = j \text{ alebo ak } i \neq j,\ a_{ij} = 3; \\ 0, \text{ inak.} \end{cases}$$

Na druhej strane nech sú dané incidenčné matice X, Y a Z faktorov rozkladu kompletného grafu $\langle n \rangle$ o vrcholoch $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na 3 faktory F_1, F_2 a F_3 a definujme štvorcovú (0—3)-maticu $A = (a_{ij})$ takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ak } i = j, \\ 1, \text{ ak hrana } v_i v_j \text{ patrí do } F_1, \\ 2, \text{ ak hrana } v_i v_j \text{ patrí do } F_2, \\ 3, \text{ ak hrana } v_i v_j \text{ patrí do } F_3. \end{cases}$$

Je zrejmé, že potom platí: $X = X_A$, $Y = Y_A$, $Z = Z_A$. Túto korešpondenciu môžeme využiť na zjednodušenie vety 3 vo forme nasledujúceho dôsledku:

4.5. Dôsledok. *Dané sú prirodzené čísla n, d, e, f. Platí: kompletný graf s n vrcholmi možno rozložiť na 3 faktory s priemermi d, e, f práve vtedy, keď existuje štvorcová (0—3)-matica $A = (a_{ij})$ stupňa n nasledujúcich vlastností:*

(1′) $a_{ii} = 0$ *pre každé* $i = 1, 2, \ldots, n$;

(2′) $a_{ij} = a_{ji}$ *pre každé* $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

(3′) $X_A^{(d-1)} \neq J$, $Y_A^{(e-1)} \neq J$, $Z_A^{(f-1)} \neq J$;

(4′) $X_A^{(d)} = Y_A^{(e)} = Z_A^{(f)} = J$.

Dôkaz vyplýva priamo z predchádzajúcich úvah a z vety 3.

5. Hľadanie rozkladu grafu pomocou samočinného počítača

5.1. Opis práce počítača. Na predchádzajúcich výsledkoch sú založené nasledujúce algoritmy, ktoré napíšeme vo forme programov vo FORTRANe. V týchto algoritmoch sa predpokladá, že matice A nejakým spôsobom vyberáme. Pri „malom" stupni n matíc A môžeme ich vyberať z úplného zoznamu matíc daného typu. Pri „väčšom" n je to prakticky nerealizovateľné, preto vytvoríme program pre náhodnú tvorbu matíc pomocou samočinného počítača.

Na podklade blokových schém sme vypracovali program vo FORTRANe IV (pozri 5.2). Výpočet sme uskutočnili na strednom samočinnom počítači NCR 315. Do vstupnej pomocnej matice B sme vložili ako tretí faktor $F3$ graf z obr. 12 pomocou incidenčnej matice (tab. 1). Vstupné údaje tvorila pomocná matica B (tab. 2), asi 80 štítkov s vydierovanými cca 6000 číslami 1 a 2 v náhodnom poradí; štítky s náhodnými číslami sme v priebehu snímania niekoľkokrát zamiešali a znovu vložili do snímača. Podľa nastaveného alebo vypnutého hradla programu počítač mal tlačiť buď každú maticu, v ktorej bolo možné očakávať rozložiteľnosť na faktory, buď len tie matice, ku ktorým príslušné rozklady obsahovali aspoň 1 faktor priemeru 2 (v skutočnosti dva faktory priemeru 2, lebo jeden faktor už bol vopred vložený do pomocnej matice B). Program ďalej počítal a tlačil celkový počet nájdených matíc A.

Počas 30 minút strojového času, ktoré sme mali k dispozícii, program našiel 75 matíc a jednu maticu obsahujúcu faktor priemeru 2, ktorú uvádzame v tabuľke 3.

Pretože sme nemali už viac strojového času, nemohli sme preskúšať všeobecnejší program, ktorý by sa od preskúšaného (pozri 5.2) líšil len tým, že inštrukcia 0144 by namiesto $N = 3$ obsahovala $N = 0$ a inštrukcie 0572 až 0608 včítane by sme nahradili týmito inštrukciami:

```
C9 VSEOBECNY PROGRAM
   21 IF (PP. EQ. 0) GO TO 220
      IF (PP. EQ. 1) GO TO 221
      N = 1
      GO TO 17
  220 IF (QP. NE. 0) GO TO 22
      N = 3
      GO TO 17
  221 IF (QP. EQ. 1) GO TO 223
      N = 5
      GO TO 17
  222 IF (QP. EQ. 1) GO TO 224
      N = 4
      GO TO 17
  223 N = 6
      GO TO 17
  224 N = 2
      GO TO 17
```

V tomto všeobecnejšom programe sa nám javí náhodné vytváranie matíc A vzhľadom na veľký počet možností plne oprávnené.

V prípade už preskúšaného programu na počítači, kedy pri rozklade kompletného grafu o 12 vrcholoch na 3 faktory priemeru 2 išlo vlastne o doplnenie daného faktoru $F3$ priemeru 2 dvoma faktormi $F1$ a $F2$ priemeru 2, sa nám zdá, že by sa pri vhodnej úprave programu dala s použitím počítača preskúšať významná časť všetkých možností.

Ako sme už spomenuli, nevýhody deterministického riešenia problémov rozkladu viedli k pokusu o použitie náhodných prvkov pri hľadaní rozkladu. Experiment mal dva varianty, z ktorých prvý bol vyskúšaný na počítači.

V prvom variante experimentu sa predpokladalo, že je vopred daný jeden faktor (priemeru 2) rozkladu kompletného grafu o 12 faktoroch na 3 faktory. Tento faktor, označený ako $F3$ sa vloží do počítača prostredníctvom pomocnej vstupnej matice B. V priloženom fortranovskom programe (pozri 5.2) sme použili faktor nájdený v 3. časti práce (obr. 12). Jeho incidenčnú maticu uvádzame v tabuľke 1 a príslušnú pomocnú vstupnú maticu B v tabuľke 2.

Druhý variant experimentu zatiaľ v praxi nebol vyskúšaný. Pri tomto variante nie je vopred daný ani jeden faktor rozkladu.

Pri obidvoch variantoch sa využíva lema 1 z 3.2, ktorá nám umožňuje obmedziť sa na matice A, ktoré v každom riadku obsahujú aspoň 3 jednotky, 3 dvojky a 3 trojky (keďže na hlavnej uhlopriečke sú nuly, vyplýva z toho, že v každom riadku je najviac 5 jednotiek, 5 dvojok a 5 trojok).

5.2. Program pre počítač NCR 315 v programovacom jazyku FORTRAN IV

```
ROZKLAD G                                                  NCR FORTRAN IV

0000  C  ROZKLAD KOMPLETNEHO GRAFU O 12 VRCHOLOCH
         NA 3 FAKTORY PRIEMERU 2
0010          DIMENSION IG3(74), A(12,12), B(12,12), X(12,12), C(12,12), W(3)
0010          DIMENSION Z(12,12,3)
0010          INTEGER S, Q, R, P, PP, QP, RP, A, B, X, C, W, Z
0010          IM = 81
0014          IK = 0
0018          DO 800 I = 1,3
0022      800 W(I) = 0
0048  C1 CITANIE POMOCNEJ MATICE B
0048          READ 1, ((B(L, M), M = 1, 12), L = 1, 12)
0104        1 FORMAT (12I2)
0104        2 K = 1
0108  C2 TVORBA MATICE A
0108        3 I = 1
0112        4 J = 1
0116          P = 0
0120          Q = 0
0124          R = 0
0128          PP = 0
0132          QP = 0
0136          RP - 0
0140          S = 0
0144          N = 3
0148        5 IF ((B(I, J) . EQ . 4) GO TO 6
0174          A(I, J) = (I, J)
0210          IF (I . EQ . J) GO TO 7
0220          GO TO 15
0222        7 IF (J . EQ . 12) GO TO 12
0232       13 J = J + 1
0238          GO TO 5
0240        6 IF (I . LT . J) GO TO 144
0250          A(I, J) = A(J, I)
```

```
0286        15 IF (A(I, J) . EQ . 1) GO TO 8
0312           IF (A(I, J) . EQ . 2) GO TO 9
0338           GO TO 20
0340         9 Q = Q + 1
0346           IF (Q . GE . 4) GO TO 16
0354        17 IF (J . EQ . 12) GO TO 11
0364           GO TO 13
0366        11 I = I + 1
0372           GO TO 4
0374        16 QP = QP + 1
0380           GO TO 18
0382        14 IF (IM . GT . 74) GO TO 1001
0392      1002 IF (IG3(IM) . EQ . 9) GO TO 2005
0414           A(I, J) = IG3(IM)
0446           IM = IM + 1
0452           GO TO 15
0454      1001 READ 1000, (IG3(IN), IN = 1,74)
0492      1000 FORMAT (74 I1)
0492           IM = 1
0496           GO TO 1002
0498         8 P = P + 1
0504           IF (P . GE . 4) GO TO 19
0512           GO TO 17
0514        20 R = R + 1
0520           IF (R . GE . 4) GO TO 10
0528           GO TO 17
0530        19 PP = PP + 1
0536           GO TO 18
0538        10 RP = RP + 1
0544        18 S = S + 1
0550           IF (S . EQ . 3) GO TO 3
0560           IF (S . EQ . 2) GO TO 21
0570           GO TO 17
0572        21 IF (PP . EQ . 0) GO TO 22
0582           N = 5
0586           GO TO 17
0588        22 IF (QP . EQ . 0) GO TO 23
0598           N = 4
0602           GO TO 17
0604        23 N = 3
0608           GO TO 17
0610       144 IF (N . EQ . 4) GO TO 444
0620           IF (N . EQ . 5) GO TO 445
0630           GO TO 14
0632       444 A(I, J) = 1
0652           GO TO 8
0654       445 A(I, J) = 2
0674           GO TO 9
0676        12 IK + 1
0682    C3 ROZKLAD MATICE NA TRI FAKTORY
0682           IF (SENSE SWITCH 5) 60, 47
0690        47 DO 202 I = 1, 12
0694           DO 202 J = 1, 12
0698           IF (I . EQ . J . OR . (I . NE . J . AND . A(I, J) . EQ . K)) GO TO 200
0740           X(I, J) = 0
0760           GO TO 201
0762       200 X(I, J) = 1
0782       201 CONTINUE
0782           Z(I, J, K) = X(I, J)
0822       202 CONTINUE
0842    C4 DRUHE MOCNINY FAKTOROV
```

```
0842          I = 1
0846          L = 1
0850          J = 1
0854          M = 1
0858       31 C(I, M) = 0
0878       32 C(I, M) = X(I, J)* × (L, M) + C(I, M)
0950          J = J + 1
0956          L = L + 1
0962          IF(J . LE . 12) GO TO 32
0962          IF(J . LE . 12) GO TO 32
0970          J = 1
0974          L = 1
0978          I    I + 1
0984          IF(I . LE . 12) GO TO 31
0992          I = 1
0996          M = M + 1
1002          IF (M . LE . 12) GO TO 31
1010          DO 39 I = 1, 12
1014          DO 39 M = 1, 12
1018          IF (C(I, M) . GT . 1) C(I, M) = 1
1062       39 CONTINUE
1082    C5 SKUSKA CI MOCNINY FAKTOROV TVORIA JEDNOTKOVU MATICU
1082          DO 41 I = 1, 12
1086          DO 41 M = 1, 12
1091          IF (C(I, M) . NE . 1) GO TO 2
1114       41 CONTINUE
1134          GO TO 2001
1136       45 IF (K . EQ . 3) GO TO 2005
1146          K = K + 1
1152          GO TO 47
1154       60 PRINT 61
1166       61 FORMAT (1H1)
1166          PRINT 62
1188       62 FORMAT (//1×$M A T I C A  A$//)
1188          PRINT 1, ((A(I, J), J = 1,12), I = 1,12)
1238          GO TO 47
1240     2001 IF (K . EQ . 1) GO TO 630
1250          GO TO 67
1252      630 PRINT 63
1264       63 FORMAT (1H1)
1264          PRINT 64
1286       64 FORMAT (//1×$M A T I C A  A$//)
1286          PRINT 1, ((A(I, J), J = 1,12), I = 1,12)
1336          PRINT 66
1360       66 FORMAT (//1×$1 . FAKTOR PRIEMERU 2$//)
1360       70 PRINT L, ((X(I, J), J = 1, 12), I = 1,12)
1410          GO TO 45
1412       67 IF (K . EQ . 2) GO TO 68
1422          GO TO 71
1424       68 PRINT 69
1448       69 FORMAT (//1×  2 . FAKTOR PRIEMERU 2 //)
1448          GO TO 70
1450       71 PRINT 72
1474       72 FORMAT (//1×  3 . FAKTOR PRIEMERU 2 //)
1474          GO TO 70
1476     2005 PRINT 73
1488       73 FORMAT (1H1)
1488          PRINT 74, IK
1506       74 FORMAT (1×, I10)
1506          PAUSE
1512          END
```

Tabuľka 1. Incidenčná matica faktoru z obr. 12.

1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1

Tabuľka 2. Vstupná pomocná matica B.

0	4	4	4	4	3	3	3	3	3	4	4
4	0	4	3	4	3	3	4	4	4	4	3
4	4	0	4	3	3	3	4	4	4	3	4
4	3	4	0	4	4	4	4	3	3	3	4
4	4	3	4	0	4	4	4	3	3	4	3
3	3	3	4	4	0	4	4	4	4	4	4
3	3	3	4	4	4	0	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	0	4	4	3	3
3	4	4	3	3	4	4	4	0	4	4	4
3	4	4	3	3	4	4	4	4	0	4	4
4	4	3	3	4	4	4	3	4	4	0	4
4	3	4	4	3	4	4	3	4	4	4	0

Tabuľka 3. Výstup počítača NCR 315.

Matica A

0	1	2	1	2	3	3	3	3	3	2	1
1	0	2	3	2	3	3	1	1	2	1	3
2	2	0	1	3	3	3	2	1	2	3	1
1	3	1	0	1	2	1	2	3	3	3	2
2	2	3	1	0	1	2	1	3	3	1	3
3	3	3	2	1	0	2	2	2	1	1	1
3	3	3	1	2	2	0	1	1	1	2	1
3	1	2	2	1	2	1	0	1	2	3	3
3	1	1	3	3	2	1	1	0	2	1	2
3	2	2	3	3	1	1	2	2	0	1	1
2	1	3	3	1	1	2	3	1	1	0	3
1	3	1	2	3	1	1	3	2	1	2	0

1. faktor priemeru 2

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1

LITERATÚRA

[1] BOSÁK, J.—ERDŐS, P.—ROSA, A.: Decompositions of complete graphs into factors with diameter two. Mat. časop. *21*, 1971, 14—28.

[2] BOSÁK, J.—ROSA, A.—ZNÁM, Š.: On decompositions of complete graphs into factors with given diameters, Theory of Graphs, Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, September 1966; Akadémia Kiadó, Budapest 1968, 37—56.

[3] SAUER, N.: On the factorisation of the complete graphs into factors of diameter 2, J. Comb. Theory *9*, 1970, 423—426.

[4] TOMOVÁ, E.: On the decomposition of the complete directed graph into factors with given diameters, Mat. časop. *20*, 1970, 257—261.

[5] ZNÁM, Š.: Decomposition of the complete directed graph into factors with given diameters, Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, Sc. Publ., New York—London—Paris 1970, 489—490.

[6] ZNÁM, Š.: Decomposition of the complete directed graphs into factors with given diameters, Mat. časop. *20*, 1970, 254—256.

Došlo 29. 1. 1971

INCOMA, Ústav racionalizace a techniky řízení
v obuvnickém průmyslu,
Gottwaldov

THE USE OF COMPUTERS FOR THE INVESTIGATION OF CERTAIN DECOMPOSITIONS OF THE COMPLETE GRAPH

Jaroslav Březina

Summary

The paper deals with the problem of decomposition of the complete undirected graph into factors with given diameters. There are used two fundamental methods to solve this problem: the analytical method and the matrix method. By the aid of the theoretical results of these methods some algorithms are shown constructed in the form of Fortran programs for the NCR 315 computer. Fortran programs serve to produce random matrices decomposable into matrices corresponding to factors and to investigate whether these matrices satisfy the conditions determined by analytical and matrix methods.

The practical significance of theoretical considerations is demonstrated by the problem of three airway companies that have to organize direct airlines between n towns so that each of the three companies is able to transport the passengers by its own means from each of the n towns to all the other towns either directly or so that the passengers have to change only once; it is further required that direct communication between two towns must be always provided by only one of the companies.

The theoretical considerations in the major part of the paper are limited to the case of three factors although the methods can be extended without difficulties to the general case of k factors ($k \geqslant 3$).