Matematicko-fyzikálny časopis

Josef Vala

Doppelverhältnisscharen mit zusammenfallenden oder imaginären Grundkurven auf Regelflächen

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 4, 337--348

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126987`

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

DOPPELVERHÄLTNISSCHAREN MIT ZUSAMMENFALLENDEN ODER IMAGINÄREN GRUNDKURVEN AUF REGELFLÄCHEN

JOSEF VALA, Brno

In der Behandlung betrachtet man die Bedingungen der Existenz der quadratischen und schichtbildenden Doppelverhältnisscharen mit den zusammenfallenden oder imaginären Grundkurven auf der Regelfläche Φ, die keine Torse ist.

a) Betrachten wir eine Regelfläche Φ im projektiven dreidimensionalen Raum P_3. In diesem Raum denken wir uns ein festes projektives Koordinatensystem eingeführt, das uns ermöglicht, jeden analytischen Punkt X des Raumes P_3 durch seine Koordinaten $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, festzulegen. Die Gleichung der Fläche Φ sei in der Form

$$x = y(u) + v\, z(u). \tag{1}$$

Die Fläche Φ sei keine Torse. Die Koordinaten $\bar{y}_i, \bar{z}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, der Punkte der Leitkurven C_y, C_z seien die analytischen Funktionen der reellen Veränderlichen u, die in dem angegebenen abgeschlossenen Intervall I definiert sind. Setzen wir weiter voraus, daß für alle Werte des Parameters u im Intervall I

$$(y, z, y', z') \neq 0 \tag{1a}$$

gilt. (Die Striche bedeuten die Ableitungen nach u.) Das bedeutet, daß keine der Erzeugenden der Fläche Φ im Intervall I die Torsalgerade ist.
Die Differentialgleichungen der Leitkurven C_y, C_z der Fläche Φ haben die Form:

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Größen α_{ik}, β_{ik}, $i, k = 1, 2$, kann man bei den gegebenen arithmetischen Kurven C_y, C_z aus den Gleichungen (2) erhalten. Bei Gültigkeit von (1a) sind α_{ik}, β_{ik}, α'_{ik}, β'_{ik}, $i, k = 1, 2$, reelle Funktionen des Parameters u, die im Intervall I definiert sind.

Auf der Fläche Φ betrachten wir *eine Doppelverhältnisschar* (*eine R-Schar*), die durch die Riccatische Differentialgleichung

$$v' + \alpha(u) + 2\beta(u)v + \gamma(u)\,v^2 = 0 \tag{3}$$

gegeben ist. Die Funktionen $\alpha(u) + 2\beta(u)v + \gamma(u)v^2$, $\alpha'(u) + 2\beta'(u)v + \gamma'(u)v^2$ der Parameter u, v seien für $u \in I$, und für alle reelle Werte von v definiert. Dann sind auch die Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$, $\alpha'(u)$, $\beta'(u)$, $\gamma'(u)$ im Intervall I definiert. Wir schließen den Fall aus, daß für irgendeinen Wert u_0 des Parameters u, $u_0 \in I$, wenigstens eine von den Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ nicht definiert ist. Dann existieren keine Lösungen der Gleichung (3), die in den reellen Punkten der Geraden p $(u = u_0)$ der Fläche Φ die reellen, von der Geraden p verschiedenen Tangenten haben. Weiter schließen wir den Fall aus, daß für irgendeinen Wert u_1 des Parameters u, $u_1 \in I$, die Funktionen $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ zwar definiert sind, aber wenigstens eine der Funktionen $\alpha'(u)$, $\beta'(u)$, $\gamma'(u)$ nicht definiert ist. Dann sind für die Integralkurven der Gleichung (3) keine Schmiegebenen in den Punkten der Geraden $\bar{p}$ $(u = u_1)$ der Fläche Φ definiert. Im folgenden schliessen wir auch den Fall aus, daß die Schar von Integralkurven der Gleichung (3) die asymptotische Schar der Fläche Φ ist.

Die Kurven der R-Schar schneiden die Erzeugenden der Fläche Φ in den projektiven Punktreihen durch. Die Tangenten der Kurven der R-Schar längs der Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Quadrik Ψ. Die Flächen Ψ längs aller Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine einparametrische Quadrikschar Ψ_u. Die Charakteristik der Quadrik dieser Schar besteht aus der Erzeugenden der Fläche Φ und allgemein noch aus der Kurve k dritter Ordnung.

In dem Raum P_3 denken wir uns das bewegliche Koordinatensystem: die Ecken dieses Systems seien die Punkte y, z, y', z'. Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten des Punktes X, d. h.

$$X = x_1 y + x_2 z + x_3 y' + x_4 z',$$

dann haben die Kurven k folgende Gleichungen (siehe [4]):

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi + B' + 2(B + \psi)(\beta + \gamma v) - B(\beta_{11} + v\beta_{21}),\\ x_2 &= v(\varphi + B') - 2(B + \psi)(\alpha + \beta v) - B(\beta_{12} + v\beta_{22}),\\ x_3 &= \psi + 2B,\\ x_4 &= v(\psi + 2B), \end{aligned} \tag{4}$$

$B = -\alpha - 2\beta v - \gamma v^2$, $\varphi = -v^2\alpha_{21} + v(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}$, $\psi = -v^2\beta_{21} + v(\beta_{22} - \beta_{11}) + \beta_{12}$. Wenn sich der Parameter u ändert, dann bilden die Kurven k die Fläche Ω.

Längs der Kurve k berührt die Fläche Ω die Torse T dritter Klasse. Die Torse T ist die Hüllfläche der Schmiegebenen der Kurven der R-Schar längs der zugehörigen Erzeugenden p der Fläche Φ. Diese Schmiegebenen haben die Gleichung (siehe [4]):

(5) $-v(\varphi + 2B)x_1 + (\varphi + 2B)x_2 + [-B(\beta_{12} + v\beta_{22}) - 2B^2 - v(-\varphi - \bar{B})]x_3 + [B(\beta_{11} + v\beta_{21}) - \varphi - \bar{B}]x_4 = 0,$

wo $\bar{B} = \dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{\partial B}{\partial v} B.$

Wenn die Kurven k immer in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen, dann nennen wir die betrachtete R-Schar *quadratisch*, wenn aber die Kurven k immer in drei Geraden zerfallen, dann nennen wir die betrachtete R-Schar *schichtbildend* (Mayer [2], S. 5).

b) Wir nennen *Grundkurven* der R-Schar ein Kurvenpaar der Fläche Φ mit der Eigenschaft, daß in den Punkten dieses Paares die Kurven der R-Schar die asymptotischen Kurven berühren. In der Behandlung [4] betrachtet man die R-Scharen mit den reellen nicht zusammenfallenden Grundkurven. Betrachten wir nun den Fall, daß die Grundkurven dieses Paares in eine Kurve zusammenfallen. Durch eine geeignete Wahl des parametrischen Systems auf der Fläche Φ kann man erreichen, daß die Grundkurve der R-Schar die Kurve C_y ist. Das werden wir im folgenden voraussetzen. Alle R-Scharen mit den zusammenfallenden Grundkurven in der Kurve C_y bezeichnen wir mit $R(y, y)$.

Satz 1. *Jede $R(y, y)$-Schar ist die Schar von Integralkurven der Differentialgleichung*

$$(6) \qquad v' + \frac{\beta_{12}}{2} + \frac{\beta_{22} - \beta_{11}}{2} v + \left(\varrho - \frac{\beta_{21}}{2}\right) v^2 = 0;$$

ϱ ist eine beliebige Funktion des Parameters u.
Man muß voraussetzen daß ϱ, ϱ' reelle Funktionen des Parameters u im Intervall I sind. (ϱ ist im Intervall I der Differentialklasse C^1.)

Beweis: Die asymptotischen Kurven der Fläche Φ haben die Gleichung

$$(7) \qquad 2v' + \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})v - \beta_{21}v^2 = 0.$$

(Barner [1], S. 57.)
Offenbar ist durch (7) eine schichtbildende Schar mit zwei Geraden der zerfallenen Charakteristik, die immer mit der zugehörigen Geraden p der Fläche Φ zusammenfallen.

Die Gleichungen der Kurven, in deren Punkten die Kurven der betrachteten R-Schar die asymptotischen Kurven berühren, bekommen wir leicht aus den Gleichungen (3), (7)

$$-\frac{\beta_{12}}{2} - \frac{\beta_{22} - \beta_{11}}{2} v + \frac{\beta_{21}}{2} v^2 + \alpha + 2\beta v + \gamma v^2 = 0.$$

Aus der Bedingung, daß diese Relation eine zweifache Wurzel $v = 0$ hat, bekommen wir dann

$$\alpha = \frac{\beta_{12}}{2}, \quad 2\beta = \frac{\beta_{22} - \beta_{11}}{2}, \quad \gamma = \varrho - \frac{\beta_{21}}{2}, \quad \varrho = \varrho(u).$$

Weiter ist $\varrho \neq 0$, das folgt leicht aus der Voraussetzung, daß die betrachtete $R(y, y)$-Schar nicht eine asymptotische Schar ist. Im folgenden setzen wir $\varrho(u) \neq 0$ für $u \in I$ voraus.

Satz 2. *Wenn die Kurve C_y eine Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann sind alle $R(y, y)$-Scharen quadratisch oder schichtbildend. Wenn C_y keine Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, dann existiert keine quadratische oder schichtbildende $R(y, y)$-Schar.*

Bemerkung. Jede Kurve der Quadrik kann man als Fleknodalkurve betrachten.

Beweis. Die kubische Charakteristik der Quadrik Ψ der $R(y, y)$-Schar in den Punkten der Geraden p der Fläche Φ hat nach (4), (6) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(8)\quad x_1 &= v^3\varrho(\beta_{21} - 2\varrho) + v^2[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \varrho' + \tfrac{1}{2}\varrho(\beta_{22} + \beta_{11}) - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} \\ &\quad + \beta_{11})] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \beta_{12}\varrho] \\ &\quad + [\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11})], \\ x_2 &= v^3[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \varrho' - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\varrho\beta_{11} + \tfrac{3}{2}\varrho\beta_{22}] + v^2[\alpha_{22} \\ &\quad - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + 2\beta_{12}\varrho + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2)] + v[\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11})], \\ x_3 &= -2\varrho v^2, \\ x_4 &= -2\varrho v^3.\end{aligned}$$

Die Charakteristik zerfällt, nur in dem Falle, wenn

$$(9)\qquad \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0$$

gilt.

Die Fleknodalkurven der Fläche Φ haben die Gleichung

$$\begin{aligned}(10)\quad &[\alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})v - \alpha_{21}v^2] - \tfrac{1}{2}[\beta'_{12} + (\beta'_{22} - \beta'_{11})v - \beta'_{21}v^2] + \tfrac{1}{4}[\beta_{12} \\ &+ (\beta_{22} - \beta_{11})v - \beta_{21}v^2](\beta_{22} + \beta_{11}) = 0.\end{aligned}$$

Wenn wir in der Gleichung (10) $v = 0$ voraussetzen, dann bekommen wir die Bedingung (9). Die Bedingung (9) hängt nicht von ϱ ab, bei ihrer Gültigkeit sind alle $R(y, y)$-Scharen quadratisch oder schichtbildend.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die Fläche Φ keine Quadrik ist. Das bedeutet, daß die Koeffizienten bei v^k, $k = 0, 1, 2$ in der Gleichung (10) nicht alle identisch gleich Null sind.

Satz 3. *Wenn die Kurve C_y eine Fleknodalkurve und keine asymptotische Kurve der Fläche Φ ist und wenn die zweite Fleknodalkurve nicht mit C_y zusam-*

menfällt, dann existiert nur eine schichtbildende $R(y, y)$-Schar. Wenn C_y eine Gerade ist, dann existiert allgemein keine schichtbildende $R(y, y)$ Schar. Wenn aber die zweite Fleknodalkurve mit der Geraden C_y zusammenfällt, dann sind alle $R(y, y)$-Scharen schichtbildend. Wenn beide Fleknodalkurven der Fläche Φ in der Kurve (nicht in der Geraden) C_y zusammenfallen, dann sind alle $R(y, y)$-Scharen quadratisch.

Beweis. Setzen wir voraus, daß die Kurve C_y die Fleknodalkurve der Fläche Φ ist. Dann gilt die Relation (9). Wir können leicht nach (5) und (6) die Ebenenkoordinaten der Schmiegebenen der Kurven der $R(y, y)$ Schar. (d. h. die Koeffizienten bei x_1, x_2, x_3, x_4 in der Gleichung (5) finden.

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \xi_1 &= 2\varrho r^2,\\
\xi_2 &= -2\varrho r,\\
\xi_3 &= r^2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{21}}{2}-\varrho\right)(\beta_{22}+\beta_{11})-\alpha_{21}+\left(\frac{\beta_{21}}{2}-\varrho\right)'\right]+v\left[\frac{1}{4}(\beta_{22}\right.\\
&\quad\left.-\beta_{11})(\beta_{22}+\beta_{11})+(\alpha_{22}-\alpha_{11})-\frac{1}{2}(\beta'_{22}-\beta'_{11})\right].\\
\xi_4 &= r^2\left[\left(\frac{\beta_{21}}{2}-\varrho\right)\beta_{21}-2\left(\frac{\beta_{21}}{2}-\varrho\right)^2\right]+v\left[\alpha_{21}-\left(\frac{\beta_{21}}{2}-\varrho\right)'-\right.\\
&\quad\left.-\varrho\left(\frac{3}{2}\beta_{22}-\frac{1}{2}\beta_{11}\right)+\frac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22}+\beta_{11})\right]+\left[\frac{1}{2}(\beta'_{22}-\beta'_{11})-\right.\\
&\quad\left.-(\alpha_{22}-\alpha_{11})-\varrho\beta_{12}-\frac{1}{4}(\beta_{22}^2-\beta_{11}^2)\right].
\end{aligned}
$$

Wir schließen den Fall $v = 0$, d. h. für alle Werte von $u = u_0$ $(u \in I)$ immer den Ebenenbüschel mit der Achse in der asymptotischen Tangente im Punkte der Kurve C_y (Mayer [3], S. 5.) aus; durch die Gleichung (11) ist für $u = u_0$ ein quadratischer Kegel gegeben. Dieser Kegel zerfällt, wenn

$$
(12)\qquad \xi_i = \lambda(u, v)\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2}+\mu(u, v)\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.
$$

für alle Werte des Parameters v immer bei dem konstanten Werte des Parameters u gilt.

Die Bedingung (12) ist nur in dem Falle erfüllt, wenn

$$
(13)\qquad \tfrac{1}{2}(\beta_{22}-\beta_{11})'-(\alpha_{22}-\alpha_{11})-\tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2-\beta_{11}^2)-\varrho\beta_{12}=0
$$

gilt. Allgemein kann man also nur ein solches ϱ finden, für welches die Relation (12) erfüllt ist. Es existiert dann nur eine schichtbildende $R(y, y)$-Schar.

Wenn aber $\beta_{12} = 0$ gilt, dann gilt nach (9) auch $\alpha_{12} = 0$, C_y ist dann nach (2) eine Gerade und die Relation (13) lautet dann:

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' - (\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) = 0.$$

Wenn (14) und (9) gilt, dann fallen nach (10) in der Geraden C_y beide Fleknodallinien der Fläche Φ zusammen. Alle $R(y, y)$-Scharen sind dann schichtbildend.

Wenn aber (14), (9) und $\beta_{12} \neq 0$ gilt, dann existiert keine schichtbildende $R(y, y)$-Schar.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Fläche Φ eine Quadrik ist.

Satz 4. *Wenn die Fläche Φ eine Quadrik ist, dann existiert allgemein keine schichtbildende $R(y, y)$-Schar, alle $R(y, y)$-Scharen sind dann quadratisch. Wenn aber C_y eine Gerade der Fläche Φ ist, dann sind alle $R(y, y)$-Scharen schichtbildend.*

Beweis. Wenn Φ eine Quadrik ist, dann ist die Relation (13) für $\varrho \neq 0$ nur dann erfüllt, wenn $\beta_{12} = 0$ ist. Dann ist aber C_y eine Gerade.

c) Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die nach a) definierte Fläche Φ keine Torse ist, sonst kann sie eine beliebige Regelfläche sein. Weiter werden wir voraussetzen, daß C_y eine Fleknodalkurve der Fläche Φ ist. Auf der Fläche Φ betrachten wir eine quadratische $R(y, y)$-Schar. Die quadratischen Charakteristiken der Flächen Ψ der Ψ_u-Quadrikschar, die zur gegebenen $R(y, y)$-Schar gehört, haben nach (8) und (9) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(15)\quad x_1 &= v^2\varrho(\beta_{21} - 2\varrho) + v[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}' - \varrho' + \tfrac{1}{2}\varrho(\beta_{22} + \beta_{11}) - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \\ &\quad + \beta_{11})] + [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) + \beta_{12}\varrho],\\ x_2 &= v^2[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}' - \varrho' - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\varrho\beta_{11} + \tfrac{3}{2}\varrho\beta_{22}] + v[\alpha_{22} - \\ &\quad - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + 2\beta_{12}\varrho + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2)],\\ x_3 &= -2\varrho v,\\ x_4 &= -2\varrho v^2.\end{aligned}$$

Diese Kurven bilden dann eine Kegelschnittsfläche $\Omega(y, y)$. Betrachten wir eine Erzeugende p $(u = u_0)$ der Fläche Φ. Bei dem konstanten Werte des Parameters u $(u = u_0)$ bestimmen die Gleichungen (15) einen Kegelschnitt $k[y(u_0), y(u_0)]$. Diese Kurve schneidet die Gerade p $(u = u_0)$ der Fläche Φ im Punkte $y(u_0)$.

Im folgenden werden wir die Eigenschaften der zu allen quadratischen $R(y, y)$-Scharen gehörenden Kegelschnitte $k[y(u_0), y(u_0)]$ betrachten.

Satz 5. *Die Tangente des Kegelschnittes $k[y(u_0), y(u_0)]$ im Punkte $y(u_0)$ kann keine asymptotische Tangente der Fläche Φ sein.*

Beweis. Die Tangente der Kurve $k[y(u_0), y(u_0)]$ im Punkte $y(u_0)$ ist durch den Punkt $y(u_0)$ und nach (15) durch den Punkt

(16) $[-\alpha_{21} + \frac{1}{2}\beta'_{21} - \varrho' + \frac{1}{2}\varrho(\beta_{22} + \beta_{11}) - \frac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11})]y + [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \frac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + 2\beta_{12}\varrho + \frac{1}{4}(\beta^2_{22} - \beta^2_{11})]z - 2\varrho y'$

bestimmt. In der Relation (16) muß man $u = u_0$ einsetzen. Der Punkt (16) liegt nach (7) auf der asymptotischen Tangente der Fläche Φ im Punkte $y(u_0)$ nur in dem Falle, wenn die Relation (13) gilt. Dann zerfällt aber der Kegelschnitt.

Längs der Kurve $k[y(u_0), y(u_0)]$ berührt der quadratische Kegel mit der Spitze $V[y(u_0), y(u_0)]$ die zur gegebenen $R(y, y)$-Schar gehörende Fläche $\Omega(y, y)$. Dieser Kegel ist die Hüllfläche der Schmiegebenen der Kurven der gegebenen $R(y, y)$-Schar längs der Erzeugenden p $(u = u_0)$ der Fläche Φ (siehe a)).

Satz 6. *Die Spitze $V[y(u_0), y(u_0)]$ liegt auf der Tangente der Fleknodalkurve der Fläche Φ im Punkte $y(u_0)$ nur in dem Falle, wenn in dem Punkte $y(u_0)$ beide Fleknodalpunkte der Geraden p $(u = u_0)$ zusammenfallen.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß die Relation (9) gilt. Aus den Gleichungen (11) bekommen wir leicht die Koordinaten der Spitze $V[y(u_0), y(u_0)]$.

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{-[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)(\beta_{22} + \beta_{11}) - \alpha_{21} + (\frac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)']}{2\varrho},$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{\frac{1}{4}(\beta_{22} - \beta_{11})(\beta_{22} + \beta_{11}) + \alpha_{22} - \alpha_{11} - \frac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})'}{2\varrho}, \quad x_4 = 0.$$

In diesen Gleichungen muß man für u den Wert u_0 einsetzen. Die Koordinate x_2 ist gleich Null nur in dem Falle, wenn die Gleichung (14) gilt. Nach (10) fallen aber beide Fleknodalpunkte der Geraden p zusammen.

d) Weiter werden wir die R-Scharen mit den imaginären Grundkurven

$$l_2v^2 + 2l_1v + l_0 = 0, \quad l_i = l_i(u), \tag{17}$$

betrachten. Wir werden voraussetzen, daß l_i, $i = 0, 1, 2$, analytische Funktionen im Intervall I sind und die quadratische Gleichung (17) für v imaginäre Wurzel im Intervall I hat.

Wir ändern nun die parametrische Schar der Fläche Φ durch die Gleichung

$$v = \lambda(u) + \bar{v}\mu(u). \tag{18}$$

Die Gleichung (1) lautet dann:

$$x = \bar{y} + \bar{v}\bar{z}, \quad \bar{y} = y + \lambda(u)z, \quad \bar{z} = \mu(u)z, \tag{19}$$

und die Gleichung (20) hat dann folgende Form:

(20) $\bar{v}^2[l_2\mu^2(u)] + \bar{v}[2l_1\mu(u) + 2l_2\lambda(u)\mu(u)] + [l_0 + 2l_1\lambda(u) + l_2\lambda^2(u)] = 0.$

Man kann nun $\lambda(u)$, $\mu(u)$ so wählen, daß die Gleichung (20) die Wurzel $v = i$ hat. Es genügt

$$\lambda(u) = -\frac{l_1}{l_2}\cdot\mu(u) = \frac{\sqrt{-(l_1^2 - l_0 l_2)}}{l_2} \tag{21}$$

zu wählen.
Der Ausdruck $-(l_1^2 - l_0 l_2)$ ist positiv (Nach der Voraussetzung, daß die Relation (17) imaginäre Wurzel hat.) Die Kurven (17) haben dann folgende Gleichung:

$$v^2 + 1 = 0.$$

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Leitkurven der Fläche Φ in der Gleichung (1) schon so gewählt sind, daß die betrachtete Gleichung (17) die Form

$$v^2 + 1 = 0 \tag{22}$$

hat. Die R-Scharen mit den Grundkurven in den Kurven (22) bezeichnen wir mit $R(U)$.

Satz 7. *Jede $R(U)$-Schar ist eine Schar der Integralkurven der Differentialgleichung*

$$v' + \left(\frac{\beta_{12}}{2} - \varrho\right) + \left(\frac{\beta_{22} - \beta_{11}}{2}\right)v + \left(-\frac{\beta_{21}}{2} - \varrho\right)v^2 = 0, \tag{23}$$

wo ϱ eine beliebige Funktion des Parameters u ist.
Nach a) werden wir notwendig voraussetzen, daß die Funktion ϱ der Differentialklasse C^1 im Intervall I ist.

Beweis. Setzen wir voraus, daß die Differentialgleichung der betrachteten R-Schar die Form (3) hat. Wenn durch (3) die $R(U)$-Schar bestimmt ist, dann berühren die Kurven dieser Schar die asymptotischen Kurven (7) der Fläche in den Punkten der Kurven (22), es gilt dann

$$\tfrac{1}{2}\beta_{12} + \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})v - \tfrac{1}{2}\beta_{21}v^2 - \alpha - 2\beta v - \gamma v^2 = \varrho(v^2 + 1), \quad \varrho = \varrho(u).$$

Leicht bekommen wir dann

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\beta_{12} - \varrho, \quad 2\beta = \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11}), \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \varrho. \tag{24}$$

Schließen wir den Fall $\varrho \equiv 0$ aus, im Falle $\varrho \equiv 0$ ist nämlich die R-Schar asymptotisch.

Satz 8. *Keine der $R(U)$-Schar ist quadratisch.*

Beweis. Wir setzen für α, β, γ nach (24) in die Gleichung (4) ein; dann bekommen wir:

$$(25)\quad \begin{aligned} x_1 &= v^3[2\varrho(-\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)] + v^2[-\alpha_{21} - (-\tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \varrho') + \tfrac{1}{2}(\beta_{22} + \beta_{11})(-\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \\ &\quad - \varrho)] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \varrho(\beta_{12} + \\ &\quad + \beta_{21}) - 2\varrho(-\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)] + [\alpha_{12} - (\tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \varrho') + (\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \varrho)(-\tfrac{1}{2}\beta_{22} + \\ &\quad + \tfrac{3}{2}\beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11})], \\ x_2 &= v^3[-\alpha_{21} - (-\tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \varrho') + (-\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)(\tfrac{3}{2}\beta_{22} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}) + \tfrac{1}{2}\beta_{21}(\beta_{22} - \\ &\quad - \beta_{11})] + v^2[\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})' + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \varrho(\beta_{12} + \\ &\quad + \beta_{21}) - 2\varrho(\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \varrho)] + v[\alpha_{12} - (\tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \varrho') + \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})(\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \\ &\quad - \varrho)] + [-2\varrho(\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \varrho)], \\ x_3 &= 2\varrho(v^2 + 1), \\ x_4 &= 2\varrho v(v^2 + 1). \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (25) sind die zu den $R(U)$-Scharen gehörende Hüllflächen Ω bestimmt.

Wenn wir nur eine der $R(U)$-Scharen voraussetzen (d. h. ϱ ist im I die gegebene Funktion des Parameters u der Differentialklasse C^1) dann sind durch (25) für den konstanten Wert des Parameters u immer die kubischen Kurven auf der Fläche Ω gegeben. Diese Kurven dritter Ordnung zerfallen in die Kurven niedrigerer Ordnungen nur in dem Falle, wenn die Determinante aus den Koeffizienten bei v^k, $k = 0, 1, 2, 3$, in den Gleichungen (25) gleich Null ist. Die $R(U)$-Schar könnte dann quadratisch oder schientbildend sein. Wenn für $u = u_0$ $\varrho(u) = 0$ gilt, dann zerfällt die Kurve $k(u_0)$ in eine Gerade. Im folgenden setzen wir $\varrho(u) \neq 0$ für $u \in I$ voraus. Die Kurven $k(u)$ zerfallen dann, wenn

$$(26)\quad [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \varrho(\beta_{12} + \beta_{21})]^2 + [\alpha_{21} + \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \varrho(\beta_{22} - \beta_{11})]^2 = 0$$ gilt.

ϱ ist nach der Voraussetzung eine reelle Funktion des Parameters u im Intervall I, nach a) sind auch α_{ik}, β_{ik}, α'_{ik}, β'_{ik}, $i, k = 1, 2$, reelle Funktionen des Parameters u im Intervall I. Dann gilt notwendig:

$$(27\text{a})\qquad \alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \tfrac{1}{4}(\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) - \varrho(\beta_{12} + \beta_{21}) = 0,$$

$$(27\text{b})\qquad \begin{aligned} &\alpha_{21} + \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \\ &\quad + \varrho(\beta_{22} - \beta_{11}) = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Relationen in die Gleichungen (25) einsetzen, bekommen wir:

$$(28)\quad \begin{aligned} x_1(1 + v^2)^{-1} &= v[2\varrho(-\tfrac{1}{2}\beta_{21} - \varrho)] + [-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \varrho' - \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\varrho(\beta_{22} + \beta_{11})], \\ x_2(1 + v^2)^{-1} &= v[\alpha_{12} + \varrho' - \tfrac{1}{2}\varrho(\beta_{22} + \beta_{11}) + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\beta'_{12}] - \\ &\quad - 2\varrho(\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \varrho), \\ x_3(1 + v^2)^{-1} &= 2\varrho, \\ x_4(1 + v^2)^{-1} &= 2v\varrho, \end{aligned}$$

wo ϱ, ϱ' nach (27a) oder (27b) noch eingesetzt werden muß. Die rechten Seiten dieser Gleichungen hängen linear von dem Parameter v ab. Wenn für $R(U)$-Schar die Gleichungen (27) gelten, dann ist die $R(U)$-Schar schichtbildend, falls gleichzeitig

(29a) $$\alpha_{22} - \alpha_{11} - \tfrac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \tfrac{1}{4}(\beta^2_{22} - \beta^2_{11}) = 0,$$

(29b) $$\alpha_{21} + \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \tfrac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11}) = 0$$

nicht gilt. Wenn (29a), (29b) gilt, dann haben die Relationen (27) die Lösung $\varrho = 0$.
Besonders werden wir den Fall $\beta_{22} - \beta_{11} = 0$ und den Fall $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$ betrachten.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Fläche Φ keine Quadrik ist.

Satz 9. *Wenn die Kurven $v^2 + 1 = 0$ nicht mit den Fleknodalkurven der Fläche Φ zusammenfallen und wenn $\beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$ für $u \in I$ gilt, dann und nur dann existiert eine schichtbildende $R(U)$-Schar, wenn*

(30) $$\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11} - \frac{1}{2}(\beta'_{22} - \beta'_{11}) + \frac{1}{4}(\beta^2_{22} - \beta^2_{11})}{\beta_{12} + \beta_{21}} =$$
$$= \frac{\alpha_{21} + \alpha_{12} - \frac{1}{2}\beta'_{21} - \frac{1}{2}\beta'_{12} + \frac{1}{4}\beta_{21}(\beta_{22} + \beta_{11}) + \frac{1}{4}\beta_{12}(\beta_{22} + \beta_{11})}{-(\beta_{22} - \beta_{11})}$$

gilt.

Beweis. Die Relation (30) bekommen wir durch Ausschließen der Größe ϱ aus den Gleichungen (27). Die Relationen (29) sind nach (10) die Bedingungen, daß die Flekonodalkurven der Fläche Φ mit den Kurven $v^2 + 1 = 0$ zusammenfallen. Wenn (29) gilt, dann existiert, unter Voraussetzung $\beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$ keine schichtbildende $R(U)$-Schar.

In der Behandlung [4] findet man die Bedingugen, daß unter den R-Scharen mit den gemeinsamen reellen nichtzusammenfallenden Grundkurven eine schichtbildende R-Schar existiert. Unter Voraussetzung, daß keine der angeführten Grundkurven asymptotisch oder Fleknodalkurve der Fläche Φ ist, ist die Existenz der schichtbildenden R-Schar durch die Bedingung der Konjugiertheit der beiden Grundkurven im Sinne von Terracini [3] gegeben. Die Relation (30) ist die ähnliche Bedingung für die Existenz (unter Voraussetzung $\beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$) der schichtbildenden $R(U)$-Schar, d. h. der R-Schar mit den imaginären Grundkurven (22). Die Konjugiertheit von zwei imaginären Kurven der Regelfläche Φ kann man allerdings nicht so einführen, wie es für die reellen Paare Terracini in der Behandlung [3] tut.

Betrachten wir die R-Scharen mit der Differentialgleichung, welche die Lösungen $v = \pm i$ hat. Diese Differentalgleichung hat folgende Form:

$$(31) \qquad v' + \vartheta(1 + v^2) = 0,$$

ϑ ist eine beliebige Funktion des Parameters u, wir werden voraussetzen, daß diese Funktion im Intervall I der Klasse C^1 ist.

Die Grundkurven der Scharen (31) sind die Kurven

$$(32) \qquad [\vartheta + \tfrac{1}{2}\beta_{21}]v^2 + [-\tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})]v + [\vartheta - \tfrac{1}{2}\beta_{12}] = 0.$$

Setzen wir weiter

$$(33) \qquad \beta_{12} + \beta_{21} = 0, \quad \beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$$

für $u \in I$ voraus.
In diesem Falle ist die Existenz der schichtbildenden $R(U)$-Schar durch Gültigkeit der Gleichung (29a) und Ungültigkeit der Gleichung (29b) gegeben. Wenn (29a) gilt, dann ist das Paar der Kurven $v^2 - 1 = 0$ mit dem Paare der Kurven (32) für alle Werte von ϑ apolar. Die Gleichung (29a) ist nach (10) die Bedingung, daß die Fleknodalkurven der Fläche Φ und die Kurven C_y, C_z die harmonische Lage haben.

Setzen wir nun voraus, daß

$$(34) \qquad \beta_{22} - \beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$$

für $u \in I$ gilt. Dann haben die Kurven, in deren Punkten die Kurven der $R(U)$-Schar die parametrischen Kurven berühren, und die Kurven C_y, C_z die harmonische Lage. Die Bedingung der Existenz der schichtbildenden $R(U)$-Schar ist demnach die Gültigkeit der Gleichung (29b) und die Ungültigkeit der Gleichung (29a). Wenn (34), (29b) gilt, dann sind nach (10) die Fleknodalkurven der Fläche Φ zu den Kurven $v^2 - 1 = 0$ apolar.

Wenn

$$(35) \qquad \beta_{12} + \beta_{21} = 0, \quad \beta_{22} - \beta_{11} = 0$$

gilt, dann ist die Existenz der schichtbildenden $R(U)$-Schar nach (27) durch die Relationen

$$(36) \qquad \alpha_{22} - \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0$$

gegeben. Wenn (35), (36) gilt, dann ist die Determinante aus den Koeffizienten bei v^k, $k = 0, 1, 2, 3$, in der Gleichung (25) immer gleich Null, alle $R(U)$-Scharen sind schichtbildend. Nur in dem Falle, wenn die Relationen (35), (36) gelten, sind die Punkte

$$y + iz, \quad y' + iz', \quad y'' + iz'',$$

und ähnlich auch die Punkte

$$y,\ R_1,\ y',\ R_1',\ y'',\ R_1''$$

für alle Werte des Parameters u linear abhängig.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Fläche Φ eine Quadrik ist, d. h. die Koeffizienten der Fleknodalform der Fläche Φ identisch gleich Null sind. Unter Voraussetzung $\beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} = 0$ existiert dann auf der Fläche Φ keine schichtbildende $R(U)$-Schar. Dasselbe gilt für den Fall $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$ und für den Fall $\beta_{12} + \beta_{21} \neq 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} \neq 0$. Wenn aber $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$, $\beta_{22} - \beta_{11} = 0$ für $u \in I$ gilt, dann sind alle $R(U)$-Scharen für $u \in I$ schichtbildend.

LITERATUR

1] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Math. Z. 62 (1955), 50–[illegible].

2] Mayer O., *Études sur les surfaces réglées*, Bull. Sc. de l'Acad. du Roumanie [illegible], 1–33.

3] Terracini A., *Proiettività con una data curva*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecnico Torino 9 (1949/50), 325–342.

4] Vala J., *Spezielle Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Mat. fyz. časopis 15 (1965), 126–142.

Eingegangen am [illegible]. 9. 1965

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
stavební fakulty
Vysokého učení technického,
Brno