Josef Kalas

Построение полуаддитивной меры из функции множества определенной на полукольце

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 3, 263--273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126973

Mat. čas. 24, 1974, No 3, 263—273

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУАДДИТИВНОЙ МЕРЫ ИЗ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ПОЛУКОЛЬЦЕ

Й. КАЛАС

В настоящей работе мы будем заниматься возможностью продолжения функции множества λ определенной на полукольце $\mathscr{D}$ подмножеств топологического пространства X и обладающей некоторымы свойствами, на кольцо $\mathscr{R}$ порожденное полукольцом $\mathscr{D}$ так, чтобы мы получили на кольце $\mathscr{R}$ полуаддитивную меру (неотрицательную, полуаддитивную, монотонную, непрерывную сверху в $\emptyset$ и $\mu(\emptyset) = 0$).

Мы покажем, что произвольная полуаддитивная мера определенная на системе всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, имеет требованные свойства функции множества λ, значит, мы можем произвольную полуаддитивную меру продолжить на кольцо порожденное этими интервалами.

Наконец мы займемся вопросом произведения рассуждаемых функций множеств.

С методом конструкции продолжения функции множества λ определенной на полукольце $\mathscr{D}$ на полуаддитивную меру определенную на кольце $\mathscr{R}$ порожденном полукольцом $\mathscr{D}$, можно тоже встретиться в работе [2]. Здесь автор работы В. Н. Алексюк использовал этот метод для построения неотрицательной, монотонной, полуаддитивной функции множества, определенной на классе конечных ограниченных интервалов числовой прямой, замкнутых слева и открытых справа, из изотонной метрики заданной в множестве всех вещественных чисел.

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство и $\mathscr{D}$ полукольцо подмножеств пространства X. Мы будем предполагать, что на полукольце $\mathscr{D}$ определеная функция множества λ удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $0 \leq \lambda(A) < \infty$ для всех множеств $A \in \mathscr{D}$ и $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) для произвольного множества $A \in \mathscr{D}$ справедливо:

$$\inf \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(C_i) : C_i \in \mathscr{D}, \quad \bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset A - B, \quad B \subset K \subset A, \quad B \in \mathscr{D},$$

K — компактное множество$\} = 0$.

Обозначим через $\mathscr{R}$ кольцо порожденное полукольцом $\mathscr{D}$. Кольцо $\mathscr{R}$ состоит из всех конечных сумм взаимно непересекающихся множеств принадлежащих полукольцу $\mathscr{D}$. Определим на кольце $\mathscr{R}$ функцию множества μ следующим образом:

$\mu(A) = \inf \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathscr{D}\}$ для всех $A \in \mathscr{R}$ (*).

Лемма 1. *Для произвольного множества $A \in \mathscr{R}$ и произвольного положительного числа ε существует множество $B \in \mathscr{R}$ и компактное множество K так, что $A - B \subset K \subset A$ и $\mu(B) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{R}$ и ε любое положительное число. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathscr{D}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из условия (ii) следует, что для каждого множества A_i, существуют множества $C_i^j \in \mathscr{D}$, $j = 1, 2, \ldots, k_i$, $B_i \in \mathscr{D}$ и компактное множество K_i так, что $\bigcup_{j=1}^{k_i} C_i^j \supset A_i - B_i$, $B_i \subset K_i \subset A_i$ и $\sum_{j=1}^{k_i} \lambda(C_i^j) \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$. Мы положим теперь $B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} C_i^j$, $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Тогда множество B принадлежит кольцу $\mathscr{R}$, K — компактное множество и $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} C_i^j \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i - \bigcup_{j=1}^{k_i} C_i^j) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i = K \subset A$. Из определения функции μ следует, что

$$\mu(B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda(C_i^j) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема 1. *Функция множества μ, определенная на кольце $\mathscr{R}$ отношением (*), является полуаддитивной мерой.*

Доказательство. Неотрицательность и то, что $\mu(\emptyset) = 0$ следует непосредственно из определения функции μ и из условия (i) наложенного на функцию множества λ.

Пусть $A \in \mathscr{R}, B \in \mathscr{R}$ и $A \subset B$. Если $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i, B_i \in \mathscr{D}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, то тоже $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, значит, $\mu(A) = \inf \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset A,\ A_i \in \mathscr{D}\} \leqslant \inf \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) : \bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset B,\ B_i \in \mathscr{D}\} = \mu(B)$. Мы показали, что функция множества μ монотонная.

Докажем теперь полуаддитивность функции μ. Пусть A и B принадлежат кольцу $\mathscr{R}$. Из определения функции μ вытекает, что к произвольному положительному числу $\frac{\varepsilon}{2}$ существуют множества $A_i \in \mathscr{D}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset A$ и множества $B_j \in \mathscr{D}$ $j = 1, 2, \ldots, m$, $\bigcup_{j=1}^{m} B_j \supset B$ так, что $\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$ и $\mu(B) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_j)$. Так как $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} B_j \supset$ $\supset A \cup B$, справедливо, что $\mu(A \cup B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_j) \leqslant \mu(A) +$ $+ \frac{\varepsilon}{2} + \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A) + \mu(B) + \varepsilon$. Так как число $\varepsilon > 0$ произвольное, $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$.

Для того, чтобы функция μ была непрерывна сверху в $\emptyset$ мы должны показать, что если A_n, $n = 1, 2, \ldots$, любая убывающая последовательность множеств из кольца $\mathscr{R}$ такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Это условие равносильно следующему:

Если существует такое положительное число ε, что $\mu(A_n) \geqslant \varepsilon$ для всех n, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Мы покажем, что функция множества μ удовлетворяет этому условию. Пусть A_n, $n = 1, 2, \ldots$, убывающая последовательность множеств из кольца $\mathscr{R}$ и пусть $\mu(A_n) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех n. Из леммы следует, что к множеству A_1 существует множество $B_0 \in \mathscr{R}$ и компактное множество K_1 так, что $A_1 - B_0 \subset K_1 \subset A_1$ и $\mu(B_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из монотонности и полуаддитивности функции μ следует, что для всех $n = 1, 2, \ldots$, справедливо:

$\mu(A_n - B_0) \geqslant \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B_0) \geqslant \mu(A_n) - \mu(B_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Из леммы тоже следует, что к множеству $A_2 - B_0 \in \mathscr{R}$ существует множество $B_1 \in \mathscr{R}$ и компактное множество K_2 так, что $(A_2 - B_0) - B_1 \subset K_2 \subset A_2 - B_0$ и $\mu((A_n - B_0) - B_1) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом можно продолжать далее, значит, к $A_m - \bigcup_{i=0}^{m-2} B_i \in \mathscr{R}$ существует множество $B_{m-1} \in \mathscr{R}$ и компактное множество K_m так, что $(A_m - \bigcup_{i=0}^{m-2} B_i) - B_{m-1} \subset K_m \subset$

$\subset A_m - \bigcup_{i=0}^{m-2} B_i$ и $\mu((A_n - \bigcup_{i=0}^{m-2} B_i) - B_{m-1}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^m}$, $n = 1, 2, \ldots$ Мы получим таким образом последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактных множеств и последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств из кольца $\mathscr{R}$ со следующими свойствами:

$A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i \subset K_n \subset A_n$ и $\mu(A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Из этого следует, что $K_n \neq \emptyset$ для всех n. Покажем, что $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая последовательность множеств:

$K_{n+1} \subset A_{n+1} - \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i \subset A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i \subset K_n$ для всех n. Значит, мы построили убывающую последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $K_n \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, компактных множеств, но тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Из того, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ следует, что тоже $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, значит, функция множества μ обладает уже всеми свойствами полуаддитивной меры.

Если функция множества λ определена на полукольце $\mathscr{S}$, удовлетворяет кроме условий (i) и (ii) также условиям:

(iii) $A, B \in \mathscr{S}$ и $A \subset B$, то $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$,

(iV) если $A_i \in \mathscr{S}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ и тоже $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{S}$, то $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i),$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Функция множества μ определенная на кольце $\mathscr{R}$ отношением (*), является продолжением функции множества λ, ($\lambda(A) = \mu(A)$ для всех множеств $A \in \mathscr{S}$).*

Доказательство. Пусть A произвольное множество принадлежащее полукольцу $\mathscr{S}$. Потому что $A \subset A$, из определения функции μ следует, что $\mu(A) \leqslant \lambda(A)$. (1)

Из определения функции μ тоже следует, что к произвольному положительному числу ε существуют множества $A_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, так, что $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset A$ и $\mu(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$. Из того, что функция λ удовлетворяет условиям (iii) и (iv) следует, что $\mu(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i \cap A) \geqslant$

$\geqslant \lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A)) = \lambda(A)$. Неравенство $\mu(A) + \varepsilon \geqslant \lambda(A)$ справедливо для любого числа $\varepsilon > 0$. Из того следует, что $\mu(A) \geqslant \lambda(A)$. (2)

Из неравенств (1) и (2) для множества $A \in \mathscr{D}$ следует:

$$\mu(A) = \lambda(A).$$

Мы будем теперь заниматься случаем, когда топологическим пространством служит числовая прямая с обычной топологией, полукольцо $\mathscr{D}$ образовано классом всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа и вместо функции множества λ, мы будем заниматься полуаддитивной мерой λ' определенной на этом классе $\mathscr{D}$.

Мы покажем, что из доказанных теорем вытекает одно следствие, которое касается продолжения полуаддитивной меры λ' из полукольца $\mathscr{D}$ на кольцо порожденное классом $\mathscr{D}$.

Следствие. *Для любой конечно полуаддитивной меры λ', определенной на полукольце $\mathscr{D}$ всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, существует продолжение на полуаддитивную меру определенную на кольце порожденном классом $\mathscr{D}$.*

Доказательство. К доказательству следствия достаточно показать, что полуаддитивная мера λ' удовлетворяет всем условиям (i), (ii), (iii), (iv), наложенным на функцию множества λ.

Свойства (i), (iii) очевидны. Покажем, что полуаддитивная мера λ' удовлетворяет тоже условию (ii). Пусть $[a, c)$ произвольный, слева замкнутый и справа открытый интервал. Обозначим через $a_n = c - \dfrac{c-a}{2^n}$. Последовательность интервалов $[a_n, c)$, $n = 1, 2, \ldots$ убывающая и $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, c) = \emptyset$. Ввиду того, что полуаддитивная мера непрерывна сверху в $\emptyset$, справедливо, что $\lim_{n\to\infty} \lambda'([a_n, c)) = 0$. Следовательно, существует число M так, что $\lambda'([a_M, c)) < \varepsilon$. Из построения последовательности $\{[a_n, c)\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что $[a, a_M) \subset [a, a_M] \subset [a, c)$ и $[a_M, c) \supset [a, c) - [a, a_M)$. Мы показали, что для любого множества $A = [a, c) \in \mathscr{D}$ и для любого положительного числа ε, существуют множества $B = [a, a_M) \in \mathscr{D}$, $C = [a_M, c) \in \mathscr{D}$ и компактное множество $K = [a, a_M]$ так, что $B \subset K \subset A$, $C \supset A - B$ и $\lambda'(C) < \varepsilon$. Значит, условие (ii) выполнено.

Докажем теперь конечную полуаддитивность полуаддитивной меры λ'. Пусть $[a_i, b_i) \in \mathscr{D}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = [a, b)$. Мы будем сначала предполагать, что из отношения $[a_k, b_k) \subset [a_l, b_l)$ следует $k = l$. (**)

Множества $[a_i, b_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ занумерованы так, что $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b_n = b$. Ввиду предположения (**) справедливо, что $a_k \leqslant b_{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$, значит, $\bigcup_{j=1}^{k} [a_j, b_j) = [a_1, b_k)$ $k = 1, 2, \ldots, n$. Затем из полуаддитивности полуаддитивной меры λ' следует, что $\lambda'([a, b)) = \lambda'(\bigcup_{i=1}^{n} [a_i\, b_i)) = \lambda'(\bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i) \cup [a_n, b_n)) \leqslant \lambda'(\bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i)) + \lambda'([a_n, b_n)) \leqslant \ldots \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda'([a_i, b_i))$. Если в последовательности $\{[a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ существуют интервалы, которые являются подмножествами некоторых других, то интервал, который мы получим соединением всех, не изменяется, если такие интервалы из соединения выпустим.

Значит, $[a, b) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcup_{i=1}^{r} [a_{ki}, b_{ki})$, где $[a_{ki}, b_{ki})$ $i = 1, 2, \ldots r$ уже удовлетворяют предположению (**), следовательно $\lambda'([a, b)) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \lambda'([a_{ki}, b_{ki})) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda'([a_i, b_i))$ и доказательство следствия уже закончено.

Пример 1. Пусть f произвольная, неотрицательная и непрерывная функция, определенная на числовой прямой. Определим на полукольце $\mathscr{D} = \{[a, c) : a, c \text{ действит. чис.}\}$ функцию множества λ_f, следующим образом:

$$\lambda_f([a, c)) = \max_{x \in [a, c]} f(x) - \min_{x \in [a, c]} f(x) \quad \text{и} \quad \lambda_f(\emptyset) = 0.$$

Покажем, что функция множества λ_f, является на полукольце $\mathscr{D}$ полуаддитивной мерой. Из определения следует, что функция λ_f неотрицательная. Обозначим через $M_{[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ и $H_{[a, b]} = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Пусть $[a, b) \subset [c, d)$. Тогда $M_{[a, b]} \leqslant M_{[c, d]}$ и $H_{[a, b]} \geqslant H_{[c, d]}$. Следовательно, $\lambda_f([a, b)) = M_{[a, b]} - H_{[a, b]} \leqslant M_{[c, d]} - H_{[c, d]} = \lambda_f([c, d))$, значит, функция множества λ_f монотонная.

Докажем далее, что она тоже полуаддитивная.

Пусть $[a, b) = [c, d) \cup [e, g)$ и пусть $M_{[a, b]} = f(x_1)$, $H_{[a, b]} = f(x_2)$. Если точки x_1, x_2 лежат в одном множестве, например в множестве $[c, d]$, то $\lambda_f([a, b)) = \lambda_f([c, d)) \leqslant \lambda_f([c, d)) + \lambda_f([e, g))$. Если точка $x_1 \in [e, g)$ и точка $x_2 \in [c, d)$, то $M_{[e, g]} = M_{[a, b]}$ и $H_{[c, d]} = H_{[a, b]}$. Очевидно, $[c, d] \cap [e, g] \neq \emptyset$. Пусть x_0 — точка принадлежащая $[c, d] \cap [e, g]$. Для значения $f(x_0)$ справедливо, что $H_{[e, g]} \leqslant f(x_0) \leqslant M_{[c, d]}$, значит, $\lambda_f([c, d)) + \lambda_f([e, g)) = M_{[c, d]} - H_{[c, d]} + M_{[e, g]} - H_{[e, g]} = M_{[a, b]} - H_{[a, b]} + M_{[c, d]} - H_{[e, g]} \geqslant M_{[a, b]} - H_{[a, b]} = \lambda_f([a, b))$. Для того, чтобы функция

λ_f была полуаддитивной мерой, мы должны еще доказать, что она непрерывна сверху в $\emptyset$.

Пусть $\{[a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств принадлежащих полукольцу $\mathscr{D}$, для которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) = \emptyset$. Тогда к любому числу $\delta > 0$ существует число N так, что для всех $n > N$ справедливо $b_n - a_n < \delta$. (Если ν лебеговская мера, то из ее непрерывности сверху следует, что $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \nu([a_n, b_n)) = 0$).

Пусть ε любое положительное число. Из ровномерной непрерывности функции f на интервале $[a_1, b_1]$ вытекает, что существует $\delta > 0$ так, что для всех точек $x_1, x_2 \in [a_1, b_1]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$, справедливо, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. К числу $\delta > 0$ существует число $N > 0$ так, что для всех $n > N$ справедливо, что $b_n - a_n < \delta$. Из того следует, что $M_{[a_n, b_n]} - H_{[a_n, b_n]} < \varepsilon$ для всех $n > N$, значит, $\lim_{n\to\infty} \lambda_f([a_n, b_n)) = 0$.

Заметим, что функция множества λ_f не должна обладать свойством аддитивности. Если, например

$$f(x) = |\sin x|, \text{то } \lambda_f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lambda_f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right) =$$

$$= \lambda_f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \emptyset, \text{ но } \lambda_f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) < \lambda_f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right) + \lambda_f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Из примера и предыдущих рассуждений следует, что произвольная, неотрицательная и непрерывная функция f, определенная на числовой прямой, «индуцирует» на кольце порожденном ограниченными интервалами слева замкнутыми и справа открытыми, полуаддитивную меру μ_f, которая обладает на интервалах следующим свойством:

$$\mu_f([a, c)) = \max_{x\in[a, c]} f(x) - \min_{x\in[a, c]} f(x).$$

Прямое произведение рассуждаемых функций множеств

Пусть X_1 и X_2 хаусдорфово топологическое пространство, $\mathscr{D}_1$ полукольцо подмножеств пространства X_1, $\mathscr{D}_2$ полукольцо подмножеств пространства X_2, λ_1 функция множества определенная на системе $\mathscr{D}_1$ и λ_2 функция множества определенная на системе $\mathscr{D}_2$.

Мы будем предполагать, что функции λ_1 и λ_2 удовлетворяют условиям (i) и (ii), наложенным на функцию λ в начале работы.

Определим на классе $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 = \{E \times F : E \in \mathscr{D}_1, F \in \mathscr{D}_2\}$, который очевидно является полукольцом, функцию множества $\bar{\lambda}$ следующим образом: $\bar{\lambda}(E \times F) = \lambda_1(E) \cdot \lambda_2(F)$, для всех множеств $E \times F \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$. Функцию множества $\bar{\lambda}$ мы назвем произведением функций λ_1 и λ_2.

Лемма 2. *Произведение $\bar{\lambda}$ удовлетворяет условиям* (i), (ii) *наложенным на функцию множества λ в начале работы.*

Доказательство. Из определения произведения $\bar{\lambda}$ непосредственно следует, что $\bar{\lambda}$ удовлетворяет условию (i).

Докажем теперь, что функция $\bar{\lambda}$ удовлетворяет условию (ii), значит, для любого множества $A \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ справедливо:

$$\inf \{\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}(C_i) : C_i \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2, \ \bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset A - B,$$

$$B \subset K \subset A, \quad B \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2, \quad K \text{ — компактное множество}\} = 0.$$

Пусть $A = A_1 \times A_2 \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ и ε произвольное положительное число. Определим числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ таким образом, чтобы $\lambda_1(A_1) \cdot \varepsilon_2 + \lambda_2(A_2) \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon$. Так как функции λ_1 и λ_2 удовлетворяют условию (ii), существуют множества $B_1 \in \mathscr{D}_1$, $C_i^1 \in \mathscr{D}_1$ $i = 1, 2, \ldots, n$ и компактное множество K_1 так, что $\bigcup_{i=1}^{n} C_i^1 \supset A_1 - B_1$, $B_1 \subset K_1 \subset A_1$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_1(C_i^1) < \varepsilon_1$. Подобным образом существуют множества $B_2 \subset \mathscr{D}_2$, $C_2^j \in \mathscr{D}_2$ $j = 1, 2, \ldots, m$, компактное множество K_2 так, что $\bigcup_{j=1}^{m} C_j^2 \supset A_2 - B_2$, $B_2 \subset K_2 \subset A_2$ и $\sum_{j=1}^{m} \lambda_2(C_j^2) < \varepsilon_2$.

Положим теперь $B = B_1 \times B_2$ и $K = K_1 \times K_2$. Из предыдущего следует, что $B \subset K \subset A$, $B \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ и K-компактное множество. Множества $A_1 \times C_j^2$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $C_i^1 \times A_2$ $i = 1, 2, \ldots, n$ принадлежат системе $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$, их соединение содержит разность $A - B$, так как $A - B = (A_1 \times A_2) - (B_1 \times B_2) \subset (A_1 \times (A_2 - B_2)) \cup ((A_1 - B_1) \times A_2) \subset (A_1 \times \bigcup_{j=1}^{m} C_j^2) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} C_i^1 \times A_2) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_1 \times C_j^2) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (C_i^1 \times A_2)$ и $\sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}(A_1 \times C_j^2) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}(C_i^1 \times A_2) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_1(A_1) \cdot \lambda_2(C_j^2) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(C_i^1) \cdot \lambda_2(A_2) = \lambda_1(A_1) \cdot \sum_{j=1}^{m} \lambda_2(C_j^2) + \lambda_2(A_2) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(C_i^1) < \lambda_1(A_1) \cdot \varepsilon_2 + \lambda_2(A_2) \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon$. Доказательство леммы закончено.

Замечание 1. Можно легко показать, что если функции множества

λ_1 и λ_2 монотонные, то и их произведение обладает свойством монотонности.

Обозначим через $\overline{\mathscr{R}}$ кольцо порожденное полукольцом $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$. Определим на кольце $\overline{\mathscr{R}}$ функцию множества $\bar{\mu}$ уже приведенным способом:

$$\bar{\mu}(A) = \inf\{\sum \bar{\lambda}(A_i) : A \subset \bigcup_{i-1}^{n} A_i, \quad A_i \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \ (***)$$

для всех множеств $A \in \overline{\mathscr{R}}$.

Из предыдущих рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема *Функция множества $\bar{\mu}$ определенная на кольце $\overline{\mathscr{R}}$ отношением* (***) *является полуаддитивной мерой.*

Замечание 2. Из определения функции множества $\bar{\mu}$ вытекает, что она на полукольце $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ сверху ограничена функцией множества $\bar{\lambda}$ ($\bar{\mu}(A) \leqslant \bar{\lambda}(A)$, $A \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$), что непосредственно следует из определения функции $\bar{\mu}$.

Пример 2. Пусть $X_1 = X_2 = E_1$ (числовая прямая) и $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2 = \{[a, c) : a, c$ действит. чис.$\}$.

Пусть функции f, g определены на E_1. Мы будем предполагать, что они неотрицательные, непрерывные и что существуют точки a_1, a_2 и числа $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ так, что функция f возрастает на интервале $[a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1]$ и функция g возрастает на интервале $[a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2]$. Определим на $\mathscr{D}_1(\mathscr{D}_2)$ функции множества $\lambda_f(\lambda_g)$ как в примере 1.

Уже знаем, что на кольце порожденном полукольцом $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ можно из произведения $\bar{\lambda}_{f,g}$ функций множеств λ_f и λ_g построить полуаддитивную меру $\bar{\mu}_{f,g}$ определенную на кольце порожденном классом $\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$, о которой теперь укажем, что она не тривиальна.

Функция f индуцирует на борелевских подмножествах пространства $A_1 = [a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1)$ меру Лебега—Стильтьеса μ_f и функция g индуцирует меру Лебега—Стильтьеса μ_g на борелевских подмножествах пространства $A_2 = [a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2)$. Произведение мер μ_f и μ_g определено на борелевских подмножествах пространства $A = A_1 \times A_2$, и обозначим его через $\mu_{f,g}$. Из того, что функция f возрастает на A_1 и функция g возрастает на A_2 следует, что если множества $B_1 \in \mathscr{D}_1$ и $B_2 \in \mathscr{D}_2$ такие, что $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$, то $\lambda_f(B_1) = \mu_f(B_1)$ и $\lambda_g(B_2) = \mu_g(B_2)$, значит, $\bar{\lambda}_{f,g}(B_1 \times B_2) = \mu_{f,g}(B_1 \times B_2)$.

Из определения $\bar{\mu}_{f,g}(A)$ следует, что к любому положительному числу ε, существуют множества $C_i \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset A$ так, что $\bar{\mu}_{f,g}(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_{f,g}(C_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_{f,g}(C_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{f,g}(C_i \cap A) \geqslant$

$\geqslant \mu_{f,g}(A) = \mu_f(A_1) \, . \, \mu_g(A_2) = \mu_f([a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1)) \, . \, \mu_g([a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2)) =$ $= (f(a_1 + \varepsilon_1) - f(a_1 - \varepsilon_1)) \, . \, (g(a_2 - \varepsilon_2) - g(a_2 - \varepsilon_2)) > 0$. Значит, существует положительное число $K = (f(a_1 + \varepsilon_1) - f(a_1 - \varepsilon_1)) \times (g(a_2 + \varepsilon_2) - g(a_1 - \varepsilon_1))$ такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\bar{\mu}_{f,g}(A) + \varepsilon \geqslant K.$$

Следовательно, $\bar{\mu}_{f,g}(A) > 0$, значит, полуаддитивная мера $\bar{\mu}_{f,g}$ нетривиальная.

Замечание 3. В последней части работы мы определили произведение функций множеств, которые удовлетворяли условиям (i), (ii), введеным в начале этой работы. Если множители (λ_1, λ_2) удовлетворяют условию конечной полуаддитивности, нам не известно, этому ли условию удовлетворяет тоже их произведение. Нам также не известно доказательство того, что полуаддитивная мера построенная из этого произведения, приведенным способом, является его продолжением.

Summary

Let X be a Hausdorff topological space and let $\mathscr{D}$ be a semiring of subsets of X. Suppose a set function λ defined on the semiring $\mathscr{D}$ satisfying the following properties:

a.) $0 \leqslant \lambda(A) < \infty$ for every $A \in \mathscr{D}$ and $\lambda(\emptyset) = 0$,

b.) $\inf \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset A - B, B \subset K \subset A, B \in \mathscr{D}, K\text{-compact. set}\} = 0$ for every $A \in \mathscr{D}$

c.) if $A, B \in \mathscr{D}$, $A \subset B$, then $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$

d.) if $A_i \in \mathscr{D}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ and $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{D}$, then $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$.

Starting from the set function λ, a subadditive measure μ is constructed, μ being an extension of λ to the ring $\mathscr{R}$ generated by the semiring $\mathscr{D}$. It is also shown that every subadditive measure defined on the class of left-closed and right-open bounded intervals on the real line can be extended to a subadditive measure defined on the ring generated by this class.

In the last part of the paper, a product of two set functions having the above-mentioned properties is studied.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. R. HALMOS: Measure theory. NEW YORK, 1950
[2] АЛЕКСЮК, В. Н.: О слабой компактности семейства квазимер. О взаимосвязи метрики и меры. Сибирский математический журнал, т. XI, № 4, 1970, 723—739.
[3] ФИХТЕНГОЛЬЦ, Г. М.: Курс диференциального и интегрального исчисления. Москва, 1949.

Поступило 11. 5. 1973

Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty UK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava