Ernest Jucovič

Raumansprüchliche Kreispackungen in der euklidischen Ebene

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 1, 3--10

MATEMATICKÝ ČASOPIS
ROČNÍK 20 1970 ČÍSLO 1

RAUMANSPRÜCHLICHE KREISPACKUNGEN IN DER EUKLIDISCHEN EBENE

ERNEST JUCOVIČ, Košice

In der euklidischen Ebene sei eine Menge $\{K_i\}$ von paarweise disjunkten offenen („schwarzen") Einheitskreisscheiben so eingelagert, dass eine jede dieser Kreisscheiben K_i durch einander disjunkte („weisse") Kreise $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{im}$ mit Halbmesser $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$, $m \geq 1$, von aussen berührt wird. Die „weissen" Kreise $k_{i1}, \ldots, k_{im}$, die einen „schwarzen" Kreis K_i berühren, wollen wir als Raumanspruch des Kreises K_i bezeichnen. Dabei müssen nicht Raumansprüche von zwei verschiedenen „schwarzen" Kreisen einander disjunkt zu sein. Diese Packung — wir werden sie *raumansprüchlich* nennen — wurde von J. Molnár eingeführt; in [2], [3] hat er die maximale Dichte der „schwarzen" Kreise in raumansprüchlichen Kreispackungen auf allen Flächen konstanter Krümmung, also auch in der hyperbolischen Ebene und auf der sphärischen Fläche, studiert. Eben die Lagerungsdichte der „schwarzen" Kreise wird als Dichte der betrachteten raumansprüchlichen Kreispackung bezeichnet. (Bekanntlich wird als Dichte des in der Ebene liegenden Kreissystems $\{K_i\}$ die Zahl $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\Sigma K_i \cap K(r)}{K(r)}$ bezeichnet, wo $K(r)$ bezw. K_i den Inhalt eines in derselben Ebene liegenden Kreises mit Halbmesser r bezw. des Kreises K_i bedeutet.)

Unter anderem gibt J. Molnár eine sehr gute obere Schranke für die maximale Dichte einer Packung an, bei der der Raumanspruch aus einem Kreis, bezw. aus zwei kongruenten Kreisen besteht. Er zeigt, dass einige der homogenen Kreispackungen die obere Schranke erreichen, andere schätzen gut die maximale Dichte von unten ab. Eine explizite Formel für die maximale Dichte von Packungen, bei denen der Raumanspruch aus mehr als zwei Kreisen oder aus zwei inkongruenten Kreisen besteht, wurde bisher nicht publiziert.

Im unserem Satz 1 geben wir eine obere Schranke für die Dichte von raumansprüchlichen Packungen in der euklidischen Ebene, bei denen jeder Kreis des Raumanspruches einen Halbmesser ≥ 1 hat (Der Raumanspruch besteht dann aus höchstens sechs Kreisen.) Für $m = 1$ ist unsere Schranke eine direkte Folge eines Satzes von Molnár [2]. Bei einigen ϱ stimmen beide Schranken überein, im allgemeinen ist die unsere für $m = 1, 2$ grober als die von Molnár. — Im unserem Satz 2 werden wir von unten die maximale Dichte einer solchen Packung abschätzen, bei welcher der Raumanspruch aus einem Kreis mit Halbmesser $\varrho \geqq 1$ besteht. (Mit den in [2] enthaltenen homogenen Packungen ist dies für $\varrho < 2\sqrt{2 - \sqrt{3}.\ (2 + \sqrt{3})} - 1$ getan.)

Satz 1. *Sind in der euklidischen Ebene wenigstens drei „schwarze "Einheitskreise so eingelagert, dass ein jeder einen aus $m \geqq 1$ „weissen" Kreisen mit Halbmesser $\varrho_1, \ldots, \varrho_m, \varrho_i \geqq 1$, bestehenden Raumanspruch besitzt, dann gilt für ihre Dichte*

$$(1) \qquad \leqq \frac{\pi}{\pi + u + \sum_1^m \{\sqrt{\varrho_i^2 + 2\varrho_i} - \operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i)\}}$$

$$\textit{wo } u = \left[\frac{6\pi - 6\sum_1^m \operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i)}{\pi}\right] \textit{ist}.$$

Beweis. Es sei $K(0; 1)$ ein „schwarzer" Kreis mit Mittelpunkt O und Halbmesser 1, dessen Raumanspruch die Kreise $k_1(C_1; \varrho_1), \ldots, k_m(C_m; \varrho_m)$ sind. Dann ist $\operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i)$ die Grösse des Winkels $\sphericalangle C_iST_i$, wobei T_i den Berührungspunkt der Tangente aus C_i zum Kreis K bedeutet. Ist T_i' der Berührungspunkt der zweiten Tangente aus C_i zu K, dann ist $\{\sqrt{\varrho_i^2 + 2\varrho_i} - \operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i)\}$ der Inhalt des Flächenstückes, das durch Entfernen des Sektors T_iOT_i' des Kreises K vom Viereck $C_iT_iOT_i'$ entsteht; wir wollen dieses Flächenstück kurz das zum Punkt C_i oder zum Halbmesser ϱ_i gehörende „Mützchen" nennen. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ ist der Inhalt des zum Halbmesser $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$ gehörenden „Mützchens".

Einem jeden Punkt O_i eines Punktsystems $\{O_i\}$ in der Ebene lässt sich folgend ein Teil der Ebene, die Dirichlet'sche Zelle des Punktes O_i, zuordnen: In der Dirichlet'schen Zelle des Punktes O_i liegt ein jeder Punkt der Ebene, dessen Abstand von einem jeden Punkt $O_j \neq O_i$ des Systems grösser ist als von O_i. Ist das System $\{O_i\}$ nicht abgeschlossen, dann sind die zu diesem System gehörenden Dirichlet'sche Zellen konvexe Polygone, die die Ebene in eine Mosaik teilen (s. z. B. L. Fejes Tóth [1]). Der Beweis unseres Satzes wird so fortgeführt, dass die Ebene in Dirichlet'sche Zellen zerteilt wird, die den Mittelpunkten O_i der „schwarzen" Kreise unserer raumansprüchlichen

Packung zugeordnet sind; dabei wird gezeigt, dass die Dichte eines „schwarzen" Kreises in seiner Dirichlet'schen Zelle nie grösser ist, als die rechte Seite in (1), dass also der Inhalt keiner der betrachteten Dirichlet'schen Zellen kleiner als der Nenner in der rechten Seite von (1) ist. (Offenbar ist jeder Kreis in der Dirichlet'schen Zelle seines Mittelpunktes enthalten; wir können also von Dirichl. Zellen, die den Kreisen zugeordnet sind, sprechen.)

Weiter, der Mittelpunkt eines „weissen" Kreises $\varkappa$ aus dem Raumanspruch eines gewissen „schwarzen" Kreises K ist entweder innerer Punkt der Dirichlet'schen Zelle des Kreises K (wenn $\varkappa$ zu keinem Raumanspruch eines Kreises $K' \neq K$ gehört), oder gehört er zum Abschluss seiner Dirichlet'schen Zelle und ist ihr Eckpunkt (wenn $\varkappa$ auch zum Raumanspruch eines Kreises $K' \neq K$ gehört).

Für m 1 ist unsere Behauptung im folgenden Satz von Molnár enthalten ([2] nicht wörtliche Formulierung): Sind in der euklidischen Ebene wenigstens drei „schwarze" Einheitskreise so eingelagert, dass ein jeder als Raumanspruch einen Kreis mit Halbmesser $\varrho \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1 hat, dann ist ihre Lagerungsdichte

$$\leqq \frac{\pi}{\Pi^\circ\left(1; \frac{2}{3}\sqrt{3}; \varrho + 1\right)}$$

wo $\Pi\left(1; \frac{2}{3}\sqrt{3}; \varrho + 1\right)$ den Inhalt eines folgend konstruierten, den Kreis $k(S;1)$ enthaltenden, konvexen Polygons $XYA_1 \ldots Z$ bedeutet (Abb. 1): Aus einem

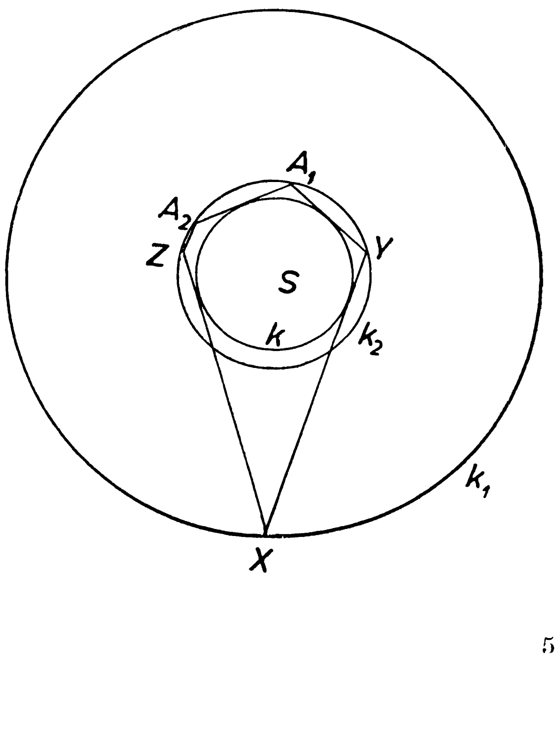

Abb. 1

Punkt X des Kreises $k_1(S; 1 + \varrho)$ werden Tangenten des Kreises k geführt, ihre Schnittpunkte mit dem Kreis $k_2\left(S; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ sollen die Punkte Y, Z sein Die Punkte $A_1, \ldots, A_d$ liegen am Kreis k_2, wobei die Strecken YA_1, $A_1A_2, \ldots$ A_dZ möglicher weise mit Ausnahme der Strecke A_dZ den Kreis k berühren.

$m \geqq 3$. Dann ist $\sum\limits_1^m \operatorname{arc\,sec}\,(1 \quad \varrho_i) \geqq \pi$. Gleichheit erfolgt hier nur für $m \quad 3, \varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \varrho_3 \quad 1$. In diesem Falle können alle Seiten des Dreiecks $C_1C_2C_3$ den „schwarzen" Kreis $K(O; 1)$ berühren, wobei C_1, C_2, C_3 Mittelpunkte der „weissen" Kreise des Raumanspruches des Kreises K sind. Dann gleicht der Inhalt des Dreiecks $C_1C_2C_3$, das ein Teil der Dirichlet'schen Zelle des Kreises K ist, der Summe des Inhaltes des Kreises K und der Inhalte der zu den Punkten C_i, $i \quad 1, 2, 3$, gehörenden „Mützchen".

Oder hat irgendeine der Seiten des Dreiecks $C_1C_2C_3$ keinen gemeinsamen Punkt mit dem abgeschlossenen Kreis K; das folgt auch für jedes $m \quad 3$, also $\sum\limits_1^m \operatorname{arc\,sec}\,(1 + \varrho_i) > \pi$; allerdings ist $u \quad 0$. Es seien $k_1(C_1; \varrho_1)$, $k_2(C_2; \varrho_2)$ zwei benachbarte „weisse" Kreise des Raumanspruches von $K(O; 1)$. Wir beweisen zunächst die Existenz des Berührungspunktes T_1 bezw. T_2 der Tangente C_1T_1 bezw. C_2T_2 zum Kreis K im konvexen Winkel $\sphericalangle C_1OC_2$

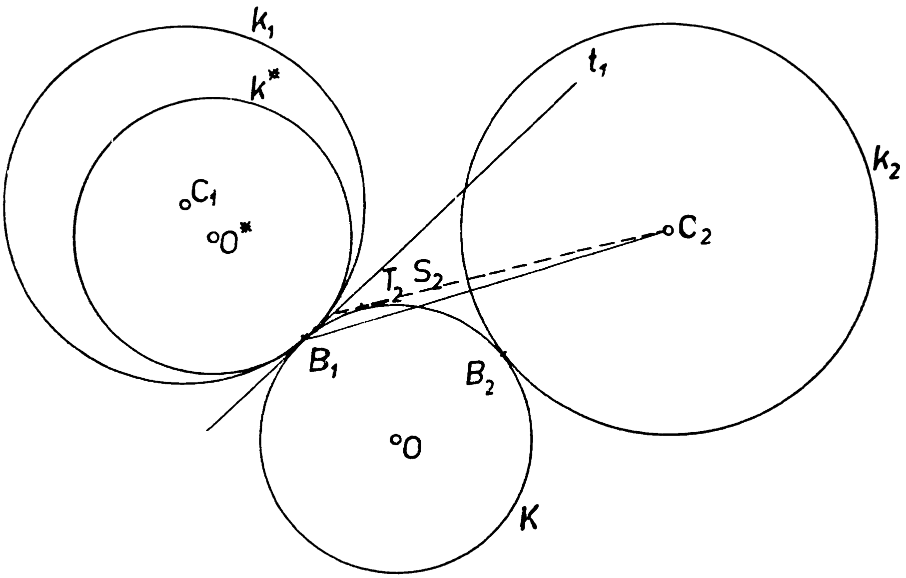

Abb. 2

Bezeichnen wir mit S_1 bezw. S_2 den Schnittpunkt der Gerade C_1B_2 bezw C_2B_1 mit K, wo B_1 bezw. B_2 der Berührungspunkt der Kreise k_1, K bezw k_2, K ist (Abb. 2). Sei t_1 die zum Punkt B_1 gehörende Tangente des Kreises k_1. K^* sei das Spiegelbild von K im Bezug auf t_1. Da $\varrho_1 \geqq 1$ ist und k_1, k_2 disjunkt sind, gilt $C_2O^* \geq C_2O$, wo O^* der Mittelpunkt von K^* ist. Folglich liegen der Punkt C_2 und der Kreis K auf derselben Seite von t_1 und deshalb liegt der Punkt S_2 im Winkel $\sphericalangle C_1OC_2$. Da aber T_2 innerer Punkt des im Winkel $\sphericalangle C_1OC_2$ liegenden Kreisbogens $\overset{\frown}{B_1S_2}$ ist, liegt T_2 im Winkel $\sphericalangle C_1OC_2$. In ähnlicher Weise ergibt es sich, dass auch der Punkt T_1 im Winkel $\sphericalangle C_1OC_2$ liegt.

Das Dreieck OC_1C_2 — möglicherweise ohne der Strecke C_1C_2 — gehört zur Dirichlet'schen Zelle des Kreises K. Es sei U der Schnittpunkt der Geraden C_1T_1, C_2T_2 und $M_i(i = 1, 2)$ der Schnittpunkt der Gerade C_iT_i mit der Tangente t_i (Abb. 3).

Da T_i innerer Punkt des Winkels $\sphericalangle C_1OC_2$ ist, gilt $UT_i \leq T_iM_i = B_iM_i < C_iM_i$ $(i = 1, 2)$. Deshalb ist der Inhalt des Dreiecks UT_1T_2 kleiner als der Inhalt des Dreiecks C_1UC_2. Deshalb ist der Inhalt des Mengenunterschiedes des Dreiecks C_1C_2O und der Kreisscheibe K grösser als die Summe der Inhalte einer Hälfte des „Mützchens" des Punktes C_1 und einer Hälfte des „Mützchens" des Punktes C_2. Dasselbe gilt über alle solche benachbarte Punktpaare C_i, C_{i+1}, bei denen die Strecke C_iC_{i+1} den Kreis K nicht schneidet.

Auch wenn z. B. die Strecke C_1C_2 den Kreis K schneidet, gehören die „Mützchen" der Punkte C_1, C_2 zur Dirichlet'schen Zelle des Kreises K, da

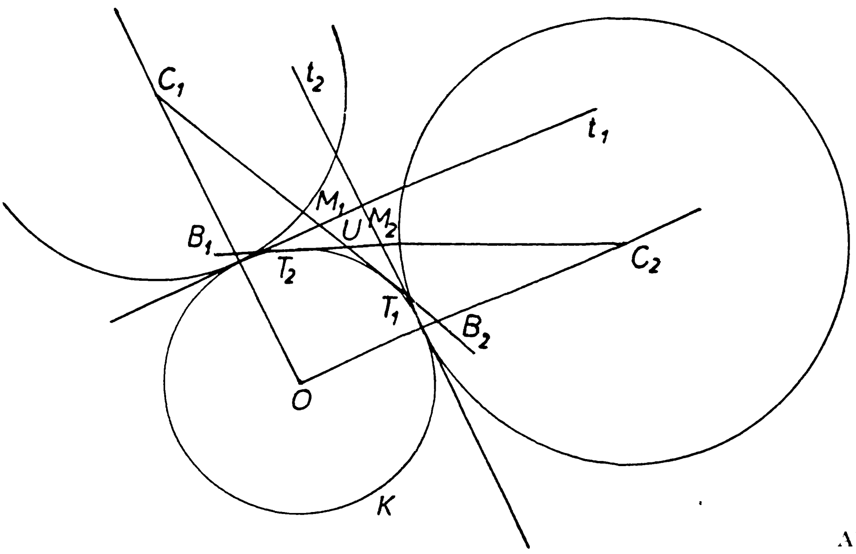

Abb. 3

diese Zelle konvex ist, den ganzen Kreis K enthält und C_1, C_2 ihre inneren Punkte oder Randpunkte sind.

$m = 2$. Die Fälle, bei denen $\pi - \sum_1^2 \operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i) < \frac{\pi}{6}$ ist, werden analog wie oben erledigt. Für die übrigen Fälle betrachten wir den minimalen Abstand CO eines Eckpunktes C der Dirichlet'schen Zelle vom Mittelpunkt O des in ihr enthaltenen „schwarzen" Kreises K. Da ein jeder Eckpunkt wenigstens für drei Zellen gemeinsam ist, wird der Abstand CO dann minimal, wenn C gemeinsamer Eckpunkt von Zellen ist, die drei einander berührenden „schwarzen" Kreisen zugeordnet sind, d. h. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Wenn $\left[\dfrac{\pi - \sum_1^2 \operatorname{arc\,sec}(1 + \varrho_i)}{\frac{\pi}{6}}\right] = 1$, folgt (1) daraus, dass jede Dirichlet'sche Zelle wenigstens drei Eckpunkte hat und ausser dem ganzen Kreis K und zwei „Mützchen" von Punkten in Entfernungen $1 + \varrho_1$, $1 + \varrho_2$ vom Mittelpunkt des Kreises K noch wenigstens ein „Mützchen" enthält. Der Inhalt dessen kann aber nicht kleiner als $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ sein. $\left[\dfrac{6\pi - 6\sum_1^2 \operatorname{arc\,sec}(1+\varrho_i)}{\pi}\right] = 2$ kommt nur bei $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ vor. Eine einfache Überlegung zeigt, dass der Inhalt der viereckigen Dirichlet'schen Zelle in diesem Falle nicht kleiner als der Nenner auf der rechten Seite von (1) ist und dass der Inhalt jeder anderen Zelle diesen Nenner übertrifft. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Gleichheit in (1) erfolgt in diesen Fällen: $m = 1$, $\varrho = 1$, die Mittelpunkte der

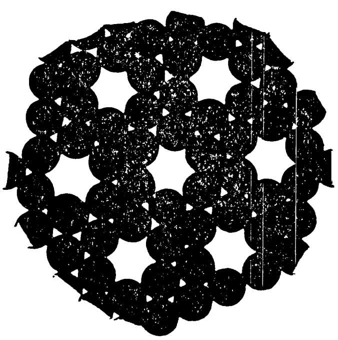

Abb. 4

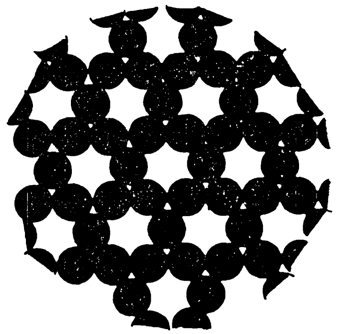

Abb. 5

„schwarzen“ Kreise sind Eckpunkte der archimedischen Mosaik (3, 3, 3, 3, 6) (Abb. 4); $m = 2$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, die Mittelpunkte der Kreise sind Eckpunkte der archimedischen Mosaik (3, 6, 3, 6) (Abb. 5); $m = 2$,

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.\,(2 + \sqrt{3}) - 1,$$

die Mittelpunkte der Kreise sind Eckpunkte der archimedischen Mosaik (3, 12, 12) (Abb. 6); $m = 3$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 1$, die Mittelpunkte der Kreise sind Eckpunkte der regulären Mosaik $\{6, 3\}$ (Abb. 7).

Satz 2. *Sind in der euklidischen Ebene wenigstens drei Einheitskreise so eingelagert, dass ein jeder als Raumanspruch einen Kreis mit Halbmesser* $\varrho \geqq 1$ *hat, dann ist ihre maximale Dichte*

$$\Delta \geqq \frac{3k\pi}{\sigma\,.\,\sqrt{3}}$$

wo $k = \left[\frac{\pi}{6 \operatorname{arc\,cosec}\,(1 + \varrho)}\right]$, $\sigma = (\varrho + 1)^2 + \sqrt{3}\,.\,\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho}$ *ist*.

Beweis. Die folgende Kreispackung liefert die Dichte $\frac{3k\pi}{\sigma\,.\,\sqrt{3}}$: Die Mittel

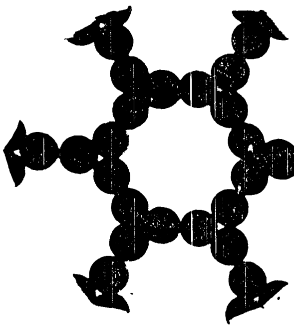

Abb. 6

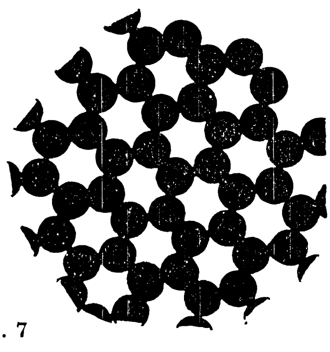

Abb. 7

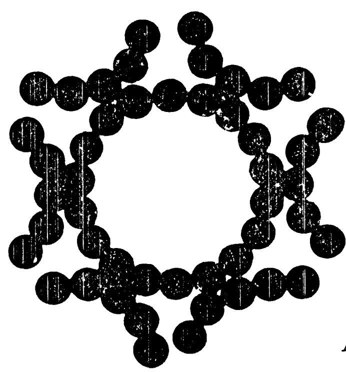

Abb. 8

punkte der „weissen“ Kreise sind Eckpunkte der regulären Mosaik $\{3, 6\}$, deren Kanten die Länge $2\sqrt{\sigma}$ haben. Die Mittelpunkte der „schwarzen“ Kreise sind Eckpunkte regulärer $6k$-Ecke, wobei die $6k$-eckigen Kränze um benachbarte „weisse“ Kreise ineinander fallen (Abb. 8 für $k = 3$).

Bemerkung. Es liegt die Vermutung nahe, dass im 2. Satz Gleichheit für alle ϱ eintritt, für die $\frac{\pi}{2}$ durch 3 arccosec $(1 + \varrho)$ teilbar ist. Für die übrigen Werte von ϱ ist eine Verbesserung der Abschätzung möglich.

LITERATUR

[1] Fejes Tóth L., *Regular Figures*, Pergamon Press, Oxford 1964.

[2] Molnár J., *Térigényes körelhelyezésekröl*, Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl., *11* (1964), 113—136.

[3] Molnár J., *Collocazioni di cerchi con esigenza di spazio*, Annales Univ. Sc. Budapest, Sectio Math., *9* (1966), 71—86.

Eingegangen am 14. 9. 1967.

Katedra geometrie a algebry
Prírodovedeckej fakulty UPJŠ
v Košiciach