Anton Dekrét

Poznámka k T-páru komplexov priamok v P_3

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 1, 48--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126921

Matematický časopis 17 (1967), No. 1

POZNÁMKA K T-PÁRU KOMPLEXOV PRIAMOK V P_3

ANTON DEKRÉT, Žilina

T-páry komplexov sú v článku uvažované v zmysle článku [2].

Nech K, K' sú T-párom komplexov priamok v P_3. Označme l, l' lúče, ktoré si v danom t-zobrazení sebe odpovedajú. Nech A_1, A_2, A_3, A_4 sú vrcholy repéra, ktorého infinitezimálne zobrazenia sú dané vzťahmi

(1) $$\mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

pričom ω_i^k sú Pfaffove formy vyhovujúce rovniciam štruktúry projektívneho priestoru:

(2) $$\mathrm{D}\,\omega_i^k = \sum_{h=1}^{4} [\omega_i^h \omega_h^k], \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Kanonizujme repér tak, že umiestníme A_1, A_2 na lúč l a A_3, A_4 na lúč l', pričom $\{A_1A_2A_4\}(\{A_1A_2A_3\})$ je rovina, ktorá odpovedá v hlavnej korelácii pozdĺž lúča l bodu $A_1(A_2)$ a $\{A_3A_4A_2\}(\{A_3A_4A_1\})$ je rovina, ktorá odpovedá v hlavnej korelácii pozdĺž lúča l' bodu $A_3(A_4)$. Tým pri vhodnej parametrizácii dostávame:

(3) $$\omega_1^4 = \omega_2^3, \quad \omega_3^2 = \omega_4^1.$$

Voľme ω_2^4, ω_1^3, ω_1^4 ako bázové formy. Tým pre hlavné formy ω_i^k môžeme písať:

(3') $$\omega_i^k = a_i^k \omega_2^4 + b_i^k \omega_1^3 + c_i^k \omega_1^4.$$

Vonkajším diferencovaním (3) a použitím Cartanovej lemy dostaneme

(4) $$\begin{aligned} \Omega_1 &= a\omega_2^4 + b\omega_1^3 + c\omega_1^4 = a'\omega_3^1 + b'\omega_4^2 + c'\omega_3^2, \\ \Omega_2 &= b\omega_2^4 + d\omega_1^3 + e\omega_1^4 = b'\omega_3^1 + d'\omega_4^2 + e'\omega_3^2, \\ \Omega_3 &= c\omega_2^4 + e\omega_1^3 + f\omega_1^4 = -c'\omega_3^1 - e'\omega_4^2 - f'\omega_3^2 \end{aligned}$$

a tiež

(5) $$\begin{aligned} ab_3^1 - ba_3^1 + bb_4^2 - da_4^2 + ea_3^2 - cb_3^2 &= 0, \\ ac_3^1 - ca_3^1 + bc_4^2 - ea_4^2 - cc_3^2 + fa_3^2 &= 0, \\ bc_3^1 - cb_3^1 + dc_4^2 - eb_4^2 - ec_3^2 + fb_3^2 &= 0, \text{ kde} \end{aligned}$$
$$\Omega_1 = \omega_1^2 + \omega_4^3, \quad \Omega_2 = -\omega_2^1 - \omega_3^4, \quad \Omega_3 = \omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_2^2 + \omega_3^3.$$

Pre Kleinove obrazy priamok repéru voľme označenie:

$$H_1 = [A_1A_4],\ H_2 = [A_2A_4],\ H_3 = [A_3A_4],\ H_4 = [A_2A_3],\ H_5 = [A_1A_3],$$
$$H_6 = [A_1A_2].$$

Potom

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H_1 &= \omega_4^2 H_6 + \omega_4^3 H_5 + (\omega_1^1 + \omega_4^4) H_1 + \omega_1^2 H_2 + \omega_1^3 H_3,\\
\mathrm{d}H_2 &= \omega_2^1 H_1 + (\omega_2^2 + \omega_4^4) H_2 + \omega_2^3 H_3 - \omega_4^1 H_6 + \omega_4^3 H_4,\\
\mathrm{d}H_3 &= (\omega_3^3 + \omega_4^4) H_3 + \omega_3^1 H_1 - \omega_4^2 H_4 - \omega_4^1 (H_5 - H_2),\\
\mathrm{d}H_4 &= (\omega_2^2 + \omega_3^3) H_4 + \omega_3^4 H_2 - \omega_2^4 H_3 + \omega_2^1 H_5 - \omega_3^1 H_6,\\
\mathrm{d}H_5 &= (\omega_1^1 + \omega_3^3) H_5 + \omega_3^4 H_1 - \omega_1^4 H_3 + \omega_1^2 H_4 + \omega_3^2 H_6,\\
\mathrm{d}H_6 &= (\omega_1^1 + \omega_2^2) H_6 + \omega_2^4 H_1 - \omega_1^3 H_4 + \omega_2^3 (H_5 - H_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

V repéri $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ Kleinova nadkvadrika má rovnicu

$$h_1h_4 - h_2h_5 + h_3h_6 = 0.$$

Zo vzťahov (6) je zrejmé, že tangenciálne lineárne trojrozmerné priestory v bodoch H_6, H_3 variet, ktoré sú Kleinovými obrazmi komplexov K, K' v projektívnom priestore P_5, pretínajú sa v rovine $\tau = \{H_1, H_4, H_5 - H_2\}$. Tým v P_5 dostávame trojparametrickú kongruenciu rovín. Hľadajme ohniská $F = xH_1 + yH_4 + z(H_5 - H_2)$ kongruencie, t. j. body F v rovine τ s vlastnosťou: existuje smer $\omega_2^4 : \omega_1^3 : \omega_1^4$, v ktorom $\mathrm{d}F$ leží tiež v τ. Použitím (6), (4) dostaneme

$$\mathrm{d}F = H_3(x\omega_1^3 - y\omega_2^4 - 2z\omega_1^4) + H_6(x\omega_4^2 - y\omega_3^1 + 2z\omega_3^2) +$$
$$+ H_2(x\Omega_1 - y\Omega_2 + z\Omega_3) + 0 \bmod \tau.$$

Preto F je ohniskom vtedy a len vtedy, keď platí

$$\begin{aligned}
x\omega_1^3 - y\omega_2^4 - 2z\omega_1^4 &= 0,\\
x\omega_2^4 - y\omega_1^3 + 2z\omega_3^2 &= 0,\\
x\Omega_1 - y\Omega_2 + z\Omega_3 &= 0,
\end{aligned}$$

čo po úprave použitím (3′) a (4) dáva:

$$\begin{gathered}
x\omega_1^3 - y\omega_2^4 - 2z\omega_1^4 = 0,\\
\omega_1^3(xb_4^2 - yb_3^1 + 2zb_3^2) + \omega_2^4(xa_4^2 - ya_3^1 + 2za_3^2) + \omega_1^4(xc_4^2 - yc_3^1 + 2zc_3^2) = 0,\\
\omega_1^3(xb - yd + ze) + \omega_2^4(ax - yb + zc) + \omega_1^4(xc - ye + zf) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Systémom (7) je určený fokálny smer $\omega_2^4 : \omega_1^3 : \omega_1^4$ práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix}
x & -y & -2z\\
xb_4^2 - yb_3^1 + 2zb_3^2 & xa_4^2 - ya_3^1 + 2za_3^2 & xc_4^2 - yc_3^1 + 2zc_3^2\\
xb - yd + ze & ax - yb + zc & xc - ye + zf
\end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Tým dostávame

Vetu 1. *Ohniská kongruencie rovín τ, ležiace v rovine τ, ležia na kubike.*

Určme teraz asymptotické krivky na variete bodov H_6, t. j. krivky, ktoré majú s dotykovým lineárnym priestorom $\{H_6, H_1, H_4, H_5—\mathrm{H}_2\}$ styk druhého rádu. Z (6) dostávame

$$\mathrm{d}^2 H_6 = H_3\{\omega_2^4\omega_1^3 + \omega_1^3\omega_2^4 - 2(\omega_2^3)^2\} + H_2(\omega_2^4\Omega_1 + \omega_1^3\Omega_2 + \omega_2^3\Omega_3) + \\ + 0 \bmod \{H_6, H_1, H_4, H_5—H_2\}.$$

Teda

$$\begin{aligned} &\omega_2^4\omega_1^3 - (\omega_1^4)^2 = 0, \\ &\omega_2^4\Omega_1 + \omega_1^3\Omega_2 + \omega_1^4\Omega_3 = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

je systém, ktorým sú určené asymptotické krivky na variete bodov H_6. Podobne dostaneme

$$\mathrm{d}^2 H_3 = H_6\{2\omega_3^1\omega_4^2 - 2(\omega_3^2)^2\} + H_2(\omega_3^1\Omega_1 + \omega_4^2\Omega_2 + \omega_4^1\Omega_3) + \\ + 0 \bmod \{H_3, H_1, H_4, H_5—H_2\}.$$

Teda

$$\begin{aligned} &\omega_3^1\omega_4^2 - (\omega_3^2)^2 = 0, \\ &\omega_3^1\Omega_1 + \omega_4^2\Omega_2 - \omega_3^2\Omega_3 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

je systém, ktorým sú určené asymptotické krivky na variete bodov H_3. Dotykové smery $(\omega_2^4, -\omega_1^3, \omega_1^4)$ variety bodov H_6 v bode H_6, ktoré vyhovujú systému (9) pretínajú rovinu τ v bodoch, ktoré ležia na kužeľosečkách

$$\begin{aligned} &C_1\colon xy + z^2 = 0, \\ &C_2\colon ax^2 + dy^2 + fz^2 - 2bxy + 2cxz - 2eyz = 0. \end{aligned}$$

Dotykové smery $(\omega_3^1, -\omega_4^2, -\omega_4^1)$ variety bodov H_3, v bode H_3, ktoré vyhovujú systému (10) pretínajú τ v bodoch, ktoré ležia na kužeľosečkách

$$\begin{aligned} &C_3\colon xy + z^2 = 0, \\ &C_4\colon x^2a' + y^2d' + z^2f' - 2b'xy - 2c'xz + 2e'yz = 0. \end{aligned}$$

Ľahko sa presvedčíme, že $C_1 \equiv C_3$ je priesekom roviny τ s Kleinovou nadkvadrikou. V ďalšom budeme predpokladať, že kužeľosečky C_2 a C_4 sú regulárne. Pomocou rovníc (3) ľahko zistíme, že ak jedna z kužeľosečiek C_2, C_4 je regulárna, potom už aj druhá je regulárna.

Označme symbolmi (C_1, C_2), (C_1, C_4) zväzky určené príslušnými kužeľosečkami.

Veta 2. *Singulárne body zväzkov (C_1, C_2), (C_1, C_4) ležia na kubike (8), t. j. sú ohniskami kongruencie rovín τ.*

Dôkaz. Z povahy problému je zrejmé, že stačí urobiť dôkaz pre zväzok (C_1, C_2). Kužeľosečky C_1, C_2 môžu mať päť projektívne rôznych polôh. V našom repéri môžeme skúmať polohy II_1, II_2, III_1, III_2 (viď [1] strana 214 až 221) vhodným umiestnením bodov H_1, H_4, H_5—H_2.

α. Nech C_1, C_2 sú v polohe II_1. Kanonizujeme repér ako v [1]. Tým $a = -c = e = 0$. Dosadením do (8) ľahko zistíme, že body H_1, H_5—H_2, t. j. singulárne body zväzku (C_1, C_2) ležia na kubike (8).

β. Nech C_1, C_2 sú v polohe II_2. Kanonizujme repér ako v [1]. Tým $a = d$ $c = e = 0$. Dosadením do (5) dostaneme

$$a_3^1 = b_4^2, \quad bc_4^2 + fa_3^2 = 0, \quad bc_3^1 + fb_3^2 = 0.$$

Tým (8) získava tvar

$$z\{x^2(fa_4^2 + 2ba_4^2) + y^2(-2b_3^1b - fb_3^1) + zx(2a_3^2f + 4a_3^2b) + \\ + zy(4bb_3^2 + 2fb_3^2)\} = 0.$$

Z toho je zrejmé, že kubika sa rozpadá na priamku singulárnych bodov zväzku (C_1, C_2) a na kužeľosečku, ktorá prechádza zvyšným singulárnym bodom.

γ. Nech C_1, C_2 sú v polohe III_1. Kanonizujme repér umiestnením H_1, H_4, H_5—H_2 podľa [1]. Tým $a = d = c = 0$, $f = -2b$. Dosadením do (8) ľahko zistíme, že jediný singulárny bod zväzku leží na kubike.

δ. Nech C_1, C_2 sú v polohe III_2. Kanonizujme repér umiestnením H_1, H_4, H_5—H_2 tak ako v [1]. Tým $a = c = e = 0, f = -2b$.
Z toho a z použitia (5) plynie pre kubiku (8) tvar

$$y\{y^2(-dc_3^1) + yxdc_4^2 + yz(2dc_3^2 + 2da_3^1) + z^2(-4da_3^2) + xz(fb_4^2 - fa_3^1)\} = 0.$$

Teda kubika sa rozpadá na priamku singulárnych bodov zväzku (C_1, C_2) a na kužeľosečku, ktorá prechádza bodom dotyku kužeľosečiek C_1, C_2.

ε. Pri dôkaze vety 2 v prípade, keď C_1, C_2 sú v polohe I je výhodné postupovať spôsobom, na ktorý ma upozornil Hejný z UK v Bratislave. Ide o známu možnosť študovať projektívnu geometriu priamok v P_3 ako geometriu neeuklidovského priestoru Q, ktorý vznikne z P_5, keď miesto grupy projektívnych transformácií sa uvažuje podgrupa G_1, voči prvkom ktorej je nadkvadrika typu $(+++---)$ invariantná.

Nech teda H_i (kde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sú vrcholy repéra v P_5, ktorého infinitezimálne zobrazenia sú dané vzťahmi

$$\mathrm{d}H_i = \omega_i^k A_k, \text{ kde } i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{11}$$

pričom ω_i^k splňujú rovnice štruktúry projektívneho priestoru

$$\mathrm{D}\omega_i^k = \sum_{s=1}^{6} [\omega_i^s \omega_s^k]. \tag{12}$$

Nech je v P_5 daná nadkvadrika

$$F = 2h_1h_5 + e_2h_2^2 + e_3h_3^2 + e_4h_4^2 + e_6h_6^2 = 0, \quad \text{kde } e_i = \pm 1,$$

ktorá je invariantná voči podgrupe G_1. Nasledujúca metóda určenia doplňujúcich rovníc štruktúry priestoru Q je prevzatá od Hejného.

Zrejme platí:

$$F(A_i, A_k) = s_{ik}, \tag{13}$$

kde $s_{11} = s_{55} = 0$, $s_{ii} = e_i$ pre $i = 2, 3, 4, 6$; $s_{15} = s_{51} = 1$, $s_{ik} = 0$ pre $i \neq k$, kde $i, k = 2, 3, 4, 6$.

Diferencovaním (13) dostaneme

$$\begin{aligned}
(14)\quad & \omega_1^5 = \omega_5^1 = \omega_4^4 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_6^6 = 0,\\
& \omega_1^2e_2 + \omega_2^5 = \omega_2^1 + e_2\omega_5^2 = \omega_1^3e_3 + \omega_3^5 = \omega_3^1 + e_3\omega_5^3 = 0,\\
& \omega_1^4e_4 + \omega_4^5 = \omega_4^1 + e_4\omega_5^4 = \omega_1^1 + \omega_5^5 = \omega_1^6e_6 + \omega_6^5 = \omega_6^1 + e_6\omega_5^6 = 0,\\
& \omega_2^3e_3 + e_2\omega_3^2 = \omega_2^4e_4 + e_2\omega_4^2 = \omega_6^2e_6 + e_2\omega_6^2 = 0,\\
& e_4\omega_3^4 + \omega_4^3e_3 = e_6\omega_3^6 + \omega_6^3e_3 = \omega_4^6e_6 + e_4\omega_6^4 = 0.
\end{aligned}$$

Vzťahy (12) spolu so vzťahmi (14) sú rovnicami štruktúry priestoru Q. Nech K, K' sú dve trojrozmerné variety, ležiace na nadkvadrike F, medzi ktorými je jedno-jednoznačné zobrazenie, pri ktorom trojrozmerné dotykové lineárne priestory v odpovedajúcich si bodoch variet K, K' sa pretínajú v rovine τ, ktorá neprechádza žiadnym z dotykových bodov. Kanonizujme repér tak, že umiestníme bod H_1 na K, bod H_5 na varietu K', body H_2, H_3, H_4 do roviny τ (body H_1, H_5 sú body, ktoré si sebe odpovedajú v danom zobrazení). Tým $\omega_1^6 = \omega_5^6 = 0$ a formy ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4, ω_5^3, ω_5^4, ω_5^2 sú hlavné. Voľme formy ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 za bázové. Tým pre ostatné hlavné formy môžeme písať

$$\omega_k^i = a_k^i\omega_1^2 + b_k^i\omega_1^3 + c_k^i\omega_1^4. \tag{15}$$

Vonkajším diferencovaním vzťahov $\omega_1^6 = \omega_5^6 = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(16)\quad \omega_2^6 &= m\omega_1^2 + n\omega_1^3 + r\omega_1^4 = m'\omega_5^2 + n'\omega_5^3 + r\omega_5^4,\\
\omega_3^6 &= n\omega_1^2 + p\omega_1^3 + q\omega_1^4 = n'\omega_5^2 + p'\omega_5^3 + q'\omega_5^4,\\
\omega_4^6 &= r\omega_1^2 + q\omega_1^3 + v\omega_1^4 = r'\omega_5^2 + q'\omega_5^3 + v'\omega_5^4
\end{aligned}$$

a tiež

$$\begin{aligned}
(17)\quad & a_5^2n - b_5^2m + a_5^3p - nb_5^3 + a_5^4q - b_5^4r = 0,\\
& a_5^2r - mc_5^2 + a_5^3q - c_5^3n + a_5^4v - c_5^4r = 0,\\
& b_5^2r - nc_5^2 + b_5^3q - c_5^3p + b_5^4v - c_5^4q = 0.
\end{aligned}$$

Jednoduchým výpočtom zistíme, že asymptotické krivky na variete K sú určené systémom

$$(18)\qquad \begin{gathered} e_2(\omega_1^2)^2 + e_3(\omega_1^3)^2 + e_4(\omega_1^4)^2 = 0, \\ \omega_1^2\omega_2^6 + \omega_1^3\omega_3^6 + \omega_1^3\omega_4^6 = 0. \end{gathered}$$

Podobne asymptotické krivky na variete K' sú určené systémom

$$(19)\qquad \begin{gathered} e_2(\omega_5^2)^2 + e_3(\omega_5^3)^2 + e_4(\omega_5^4)^2 = 0, \\ \omega_5^2\omega_2^6 + \omega_5^3\omega_3^6 + \omega_5^4\omega_4^6 = 0. \end{gathered}$$

Dotykové smery $(\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4)$ variety K v bode H_1, ktoré splňujú (18) pretínajú τ v bodoch, ktoré ležia na kužeľosečkách

$$\begin{aligned} C_1&: e_2x^2 + e_3y^2 + e_4z^2 = 0, \\ C_2&: mx^2 + py^2 + vz^2 + 2nxy + 2rxz + 2qyz = 0. \end{aligned}$$

Podobne dotykové smery $(\omega_5^2, \omega_5^3, \omega_5^4)$ na variete K' v bode H_5, ktoré splňujú systém (19) pretínajú τ v bodoch, ktoré ležia na kužeľosečkách

$$\begin{aligned} C_3&: e_2x^2 + e_3y^2 + e_4z^2 = 0, \\ C_4&: m'x^2 + p'y^2 + v'z^2 + 2n'xy + 2r'xz + 2qy'z = 0. \end{aligned}$$

Kužeľosečka $C_1 \equiv C_3$ je priesekom τ s nadkvadrikou $F \equiv 0$.
Určme ohniská kongruencie rovín τ, ktoré ležia v τ. Jednoduchým výpočtom ako v prvej časti článku zistíme, že fokálne krivky kongruencie, prechádzajúce bodom $L = xH_2 + yH_3 + zH_4$ sú určené systémom

$$(7')\qquad \begin{gathered} xe_2\omega_1^2 + ye_3\omega_1^3 + ze_4\omega_1^4 = 0, \\ (xe_2a_5^2 + ye_3a_5^3 + ze_4a_5^4)\omega_1^2 + (xe_2b_5^2 + ye_3b_5^3 + ze_4b_5^3)\omega_1^3 + \\ + (xe_2c_5^2 + ye_3c_5^3 + ze_4c_5^4)\omega_1^4 = 0, \\ (xm + yn + zr)\omega_1^2 + (nx + yp + zq)\omega_1^3 + (xr + yq + zv)\omega_1^4 = 0, \end{gathered}$$

ktorý má riešenie práve vtedy, keď

$$(8')\qquad \begin{vmatrix} xe_2 & ye_3 & ze_4 \\ xe_2a_5^2 + ye_3a_5^3 + ze_4a_5^4 & xe_2b_5^2 + ye_3b_5^3 + ze_4b_5^4 & xe_2c_5^2 + ye_3c_5^3 + ze_4c_5^4 \\ xm + yn + zr & xn + yp + zq & xr + yq + zv \end{vmatrix} = 0.$$

Teda: ohniská kongruencie rovín τ, ležiace v τ, ležia na kubike (8'). Nech kužeľosečky C_2, C_3 sú regulárne a nech kužeľosečky C_1, C_2 sú v polohe I. Kanonizujme repér umiestnením H_2, H_3, H_4 ako v [1]. Potom $n = r = q = 0$. Dosadením do (8') už ľahko zistíme, že vrcholy polárneho trojuholníka zväzku (C_1, C_2) t. j. singulárne body zväzku, ležia na kubike (8'). Z voľby $e_2 = -1$, $e_4 = -1$, $e_3 = e_6 = 1$ plynie správnosť vety 2 aj v prípade, keď C_1, C_2 sú v polohe I. Tým je dôkaz vety 2 urobený.

Poznámka 1. Správnosť vety 2 nezávisí od čísel e_i.

Poznámka 2. Z [3], strana 30—32 plynie: Tangenciálne smery na variete, ktorá je Kleinovým obrazom komplexu K (K'), pretínajúce rovinu τ v singulárnych bodoch zväzku (C_1, C_2) (prípadne (C_1, C_4)), odpovedajú smerom určeným hlavnými plochami komplexu K (K'), prechádzajúcimi lúčom l (l').

LITERATÚRA

[1] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, Praha 1948.
[2] Акивис М. А., *Пары T комплексов*, Матем. сб. *27* (*69*) (1950), 351—378.
[3] Кованцов Н. И., *Теория комплексов*, Киев 1963.

Došlo 21. 2. 1966.

Katedra matematiky
Vysokej školy dopravnej,
Žilina

ЗАМЕТКА К T-ПАРЕ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В P_3

Антон Декрет

Резюме

Пусть K, K' — T-пара комплексов прямых в P_3. Линейные трехмерные касательные пространства многообразий $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$, которые являются образами Клейна комплексов K, K' в P_5, в соответствующих точках L, L' пересекаются в плоскости τ. Получается трехмерная конгруэнция плоскостей τ в P_5. Фокусы этой конгруэнции, лежащие в τ, находятся на кривой 3-его порядка. Касательные к асимптотическим линиям в точке $L(L')$ многообразия $\tilde{K}(\tilde{K}')$ пересекают плоскость τ в общих точках в статье определенных конических сечений C_1, C_2 (C_1, C_4). Особые точки пучка конических сечений (C_1, C_2), (C_1, C_4) являются фокусами конгруэнции плоскостей.