Alfonz Haviar
N-Schrägverbände und Quasiordnungen

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 3, 240--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126885

Matematický časopis 23 (1973), No. 3

N-SCHRÄGVERBÄNDE UND QUASIORDNUNGEN

ALFONZ HAVIAR, Banská Bystrica

In seiner Arbeit [1] zeigte M. D. Gerhardts, daß zwischen Fastverbänden und bestimmten Quasiordnungen eine enge Beziehung besteht, so daß Fastverbände gewissermaßen mit derartigen Quasiordnungen identifiziert werden können. In der folgenden Untersuchung wird eine größere Klasse von nichtkommutativen Verbänden angegeben, für die eine solche Identifizierung möglich ist.

Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen. Ist M eine nichtleere Menge und T eine zweistellige Relation auf M, so bedeute

$$D: = \{(x, x) | x \in M\}, \qquad k(T) : = T \cap T^{-1},$$

$$h_1(T): = TT^{-1}, \qquad h_2(T): = T^{-1}T.$$

Manchmal schreiben wir statt $(a, b) \in T$ auch $a\ T\ b$.

1. Fastverbände und N-Schrägverbände

Es sei M eine nichtleere Menge, und $\wedge$ und $\vee$ seien zwei binäre (eindeutige, vollständige), idempotente und assoziative Operationen in M. Die Algebra $(M; \wedge, \vee)$ heißt ein *Fastverband* ([1]), wenn für je drei Elemente $a, b, c \in M$ die folgenden Axiome gelten:

$$(S_\wedge)\ \ (a \vee b) \wedge (c \vee b \vee a) = a \vee b, \quad (S_\vee)\ \ (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge a) = b \wedge a,$$

$$(T_\wedge)\ \ (c \vee b \vee a) \wedge (a \vee b) = b \vee a, \quad (T_\vee)\ \ (b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge c) = a \wedge b.$$

Das Axiomensystem ist dualsymmetrisch in folgendem Sinne: Es ist invariant gegenüber der Umkehrung der Reihenfolge der Elemente bei gleichzeitiger Permutation von $\wedge$ und $\vee$.

1.1. *Eine Algebra $(M; \wedge, \vee)$ mit zwei binären, assoziativen (eindeutigen und vollständigen) Operationen $\wedge$ und $\vee$ in der nichtleeren Menge M ist genau dann ein Fastverband, wenn die Forderungen*

$(B_\wedge)$ $a \wedge (b \vee a) = a$, $(B_\vee)$ $(a \wedge b) \vee a = a$, $(T_\wedge)$ *und* $(T_\vee)$

für je drei $a, b, c \in M$ *erfüllt sind* ([1]).

1.2. *Es sei* $(M; \wedge, \vee)$ *ein Fastverband. Dann gelten folgende Aussagen:*

$$(C_\wedge)\ a \wedge (a \vee b) = a, \quad (C_\vee)\ (b \wedge a) \vee a = a,$$

$$(E_\wedge)\ (b \vee a) \wedge a = a, \quad (E_\vee)\ a \vee (a \wedge b) = a,$$

$$(G_\wedge)\ a \wedge b \wedge a = a \wedge b, \quad (G_\vee)\ a \vee b \vee a = b \vee a,$$

für je zwei $a, b \in M$ ([1] und [2]).

Definition I. *Es sei* M *eine nichtleere Menge, und* $\wedge$ *und* $\vee$ *seien zwei binäre (eindeutige und vollständige), assoziative Operationen in* M. *Die Algebra* $(M; \wedge, \vee)$ *nennen wir ein N-Schrägverband, wenn für je drei Elemente* $a, b, c \in M$ *die folgenden Axiome gelten:*

$$(C_\wedge)\ a \wedge (a \vee b) = a, \qquad (C_\vee)\ (b \wedge a) \vee a = a,$$

$$(I_\wedge)\quad a \wedge a = a, \qquad (I_\vee)\quad a \vee a = a,$$

$$(N_\wedge)\ a \wedge (b \wedge c) = a \wedge (c \wedge b), \qquad (N_\vee)\ (c \vee b) \vee a = (b \vee c) \vee a.$$

Das Axiomensystem ist auch dualsymmetrisch im vorbezeichneten Sinne.

1.3. *Für je zwei Elemente* a, b *eines N-Schrägverbandes gilt:*

$$(G_\wedge), \quad (G_\vee), \quad (B_\wedge) \quad \textit{und} \quad (B_\vee).$$

Beweis. Aus $(N_\wedge)$, $(N_\vee)$, $(I_\wedge)$ und $(I_\vee)$ folgt unmittelbar $(G_\wedge)$ und $(G_\vee)$. Aus $(G_\vee)$, $(G_\wedge)$, $(C_\wedge)$, $(C_\vee)$ erhält man leicht $(B_\wedge)$ und $(B_\vee)$.

1.4. *Jeder Fastverband* $(M; \wedge, \vee)$ *ist ein N-Schrägverband.*

Beweis. Für je drei Elemente $a, b, c \in M$ gilt wegen 1.2

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge c \wedge b \wedge a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = \qquad (C_\vee)$$

$$= (a \wedge c \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \qquad (G_\wedge)$$

und entsprechend

$$a \wedge c \wedge b = (a \wedge b \wedge c \wedge a \wedge c \wedge b) \vee (a \wedge c \wedge b) = \qquad (C_\vee)$$

$$= (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c \wedge b). \qquad (G_\wedge)$$

Daraus folgt

$$a \wedge c \wedge b = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c \wedge b) =$$

$$= (a \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c \wedge b)) \wedge ((a \wedge c \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c)) = \qquad (T_\wedge)$$

$= (a \vee (a \wedge c \wedge b)) \wedge (a \wedge b \wedge c) =$

$= a \wedge b \wedge c.$ $\qquad (E_\vee)$ und $(I_\wedge)$

$(N_\vee)$ ergibt sich dual, woraus wegen 1.2 die Behauptung folgt.

Die Algebra $(\{a, b, c, d\}; \wedge, \vee)$ mit den Operationen

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	b	b	c	c
d	b	b	d	d

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	c	d
d	c	c	c	d

ist ein N-Schrägverband, aber kein Fastverband (Z. B. $(d \vee a) \wedge a = c \wedge a = b \neq a$.)

1.5. *Ein N-Schrägverband $(M; \wedge, \vee)$ ist dann und nur dann ein Fastverband, wenn $(E_\wedge)$ und $(E_\vee)$ für je $a, b \in M$ erfüllt sind.*

Beweis. Es sei $(M; \wedge, \vee)$ ein N-Schrägverband und $(E_\wedge)$ und $(E_\vee)$ sei für je $a, b \in M$ erfüllt. Dann gilt für je drei Elemente $a, b, c \in M$:

$$(c \vee b \vee a) \wedge (a \vee b) = (c \vee b \vee a) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b \vee a) = \qquad (C_\wedge)$$

$$= (c \vee b \vee a) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee a) = \qquad (G_\vee)$$

$$= (c \vee b \vee a) \wedge (b \vee a) \wedge (a \vee b) = \qquad (N_\wedge)$$

$$= (b \vee a) \wedge (a \vee b) = \qquad (E_\wedge)$$

$$= (b \vee a) \wedge (b \vee a \vee b) = b \vee a. \qquad (G_\vee) \text{ und } (C_\wedge)$$

Dual gilt $(T_\vee)$. Also ist $(M; \wedge, \vee)$ nach 1.3 und 1.1 ein Fastverband. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus 1.2 und 1.4.

2. Ausgezeichnete Quasiordnungen

Es sei M eine nichtleere Menge, R eine zweistellige, reflexive und transitive Relation auf M. Das Paar $(M; R)$ heißt sodann eine Quasiordnung.

Definition II. *Es sei $(M; R)$ eine Quasiordnung und R_1, R_2 zweistellige Relationen auf M. Wir nennen $(M; R, R_1, R_2)$ eine ausgezeichnete Quasiordnung, wenn für die Relationen R_1, R_2 folgenden Bedingungen gelten:*

(*i*) $R_1 \subseteq R$ *und* $R_2 \subseteq R$,

(*ii*) R_1, R_2 *sind Halbordnungen,*

(*iii*) $h_1(R_1) \cap k(R) \subseteq D$ *und* $h_2(R_2) \cap k(R) \subseteq D$.

Bemerkung. Falls dabei $R_1 = R_2$ erfüllt ist, so erhält man eine ausgezeichnete Quasiordnung im Sinne [1].

Es sei $(M; R, R_1, R_2)$ eine ausgezeichnete Quasiordnung und $(a_1, \ldots, a_n)$ ein n-tupel von Elementen aus M.

Definition III. *Ein Element $u \in M$ heißt eine ausgezeichnete untere Schranke von $(a_1, \ldots, a_n)$, wenn $u\ R\ a_\lambda$ für alle $\lambda = 1, \ldots, n$ gilt. Gibt es in der Menge der ausgezeichneten unteren Schranken von $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Element i mit den beiden Eigenschaften $i\ R_1\ a_1$ und $u\ R\ i$ für jede ausgezeichnete untere Schranke u, so heißt i ein ausgezeichnetes Infimum von $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Definition IV. *Ein Element $o \in M$ heißt eine ausgezeichnete obere Schranke von $(a_1, \ldots, a_n)$, wenn $a_\lambda\ R\ o$ für alle $\lambda = 1, \ldots, n$ gilt. Gibt es in der Menge der ausgezeichneten oberen Schranken von $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Element s mit den beiden Eigenschaften $a_n\ R_2\ s$ und $s\ R\ o$ für jede ausgezeichnete obere Schranke o, so heißt s ein ausgezeichnetes Supremum von $(a_1, \ldots, a_n)$.*

2.1. *In einer ausgezeichneten Quasiordnung $(M; R, R_1, R_2)$ gibt es zu jedem n-tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ höchstens ein ausgezeichnetes Infimum und höchstens ein ausgezeichnetes Supremum.*

Beweis. Es seien i_1 und i_2 zwei ausgezeichnete Infima von $(a_1, \ldots, a_n)$. Dann gilt $i_1\ R_1\ a_1$, $i_2\ R_1\ a_1$, $i_1\ R\ i_2$ und $i_2\ R\ i_1$. Daraus folgt $(i_1, i_2) \in h_1(R_1) \cap k(R)$, also $i_1 = i_2$. Entsprechend beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

Das durch 2.1 im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmte ausgezeichnete Infimum von $(a_1, \ldots, a_n)$ soll kurz mit $inf(a_1, \ldots, a_n)$ bezeichnet werden. Ebenso schreiben wir $sup(a_1, \ldots, a_n)$ für das ausgezeichnete Supremum von $a_1, \ldots, a_n)$, falls ein solches vorhanden ist.

Es sei $(M; R, R_1, R_2)$ eine ausgezeichnete Quasiordnung. Wie man leicht nachprüft, gelten folgende Aussagen.

2.2. $$inf(a, a) = a, \qquad sup(a, a) = a.$$

2.3. $$aRb \Leftrightarrow inf(a, b) = a, \qquad aRb \Leftrightarrow sup(a, b) = b.$$

2.4. $$aR_1b \Leftrightarrow inf(b, a) = a, \qquad aR_2b \Leftrightarrow sup(b, a) = b.$$

3. Relation in N-Schrägverbänden und Operationen in ausgezeichneten Quasiordnungen

3.1. *Es sei $(M; \wedge, \vee)$ ein N-Schrägverband. Wir erklären auf M drei Relationen R, R_1, R_2 durch die Festsetzung*

(r) $\quad aRb :\Leftrightarrow a \wedge b = a,$

$(r_1)\quad aR_1b :\Leftrightarrow b \wedge a = a,$

$(r_2)\quad aR_2b :\Leftrightarrow b \vee a = b.$

Dann ist $(M;\, R,\, R_1,\, R_2)$ *eine ausgezeichnete Quasiordnung.*

Beweis. Aus Idempotenz und Assoziativität von $\wedge$ folgen Reflexivität und Transitivität von R. Nun zeigen wir, daß für die beiden Relationen R_1, R_2 die Behauptungen (i), (ii) und (iii) erfüllt sind.
(i). Es gelte aR_1b; dann ist $b \wedge a = a$ und nach $(G_\wedge)$ $a \wedge b = a \wedge b \wedge a = a \wedge a = a$, also gilt aRb. Der zweite Teil ergibt sich dual.
(ii). Aus Idempotenz und Assoziativität von $\wedge$ folgen Reflexivität und Transitivität von R_1. Nun gelte aR_1b und bR_1a; dann ist mit $(G_\wedge)$ $b = a \wedge b = a \wedge b \wedge a = a \wedge a = a$. Der zweite Teil ergibt sich dual.
(iii). Ist $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$, $(a, v) \in R_1$ und $(b, v) \in R_1$, so folgt aus $(N_\wedge)$ $a = v \wedge a = v \wedge a \wedge b = v \wedge b \wedge a = v \wedge b = b$. Der zweite Teil ergibt sich dual.

Es sei $\mathscr{M} = (M;\, \wedge,\, \vee)$ ein N-Schrägverband. Die ausgezeichnete Quasiordnung $(M;\, R,\, R_1,\, R_2)$, vermöge (r), (r_1) und (r_2) zum N-Schrägverband $\mathscr{M}$ zugeordnet, bezeichnen wir mit $\mathscr{M}^*$.

3.2. *In der ausgezeichneten Quasiordnung* $\mathscr{M}^* = (M;\, R,\, R_1,\, R_2)$ *hat jedes geordnete Paar* $(a,\, b) \in M^2$ *genau ein ausgezeichnetes Infimum und genau ein ausgezeichnetes Supremum.*

Beweis. Leicht beweist man $a \wedge b = inf(a, b)$ und $a \vee b = sup(a, b)$. Die Eindeutigkeit folgt aus 2.1.

3.3. *Es sei* $(M;\, R,\, R_1,\, R_2)$ *eine ausgezeichnete Quasiordnung, in der jedes geordnete Paar von Elementen ein ausgezeichnetes Infimum und ein ausgezeichnetes Supremum hat. Wir erklären in* M *zwei Operationen* $\wedge$ *und* $\vee$ *durch die Festsetzung*

$(o_\wedge)\quad a \wedge b := inf(a, b),$

$(o_\vee)\quad a \vee b := sup(a, b).$

Dann ist $(M;\, \wedge,\, \vee)$ *ein N-Schrägverband.*

Beweis. Aus 2.2 folgt $(I_\wedge)$ und $(I_\vee)$. Es sei $i_1 = inf(a,\, inf(b, c))$, $i_2 = inf(inf(a, b), c)$ und $i_3 = inf(a, inf(c, b))$. Leicht beweist man mit Hilfe (i) und (ii) von der Definition II $i_1 = inf(a, b, c) = i_2 = i_3$. Daraus folgt Assoziativität von $\wedge$ und $(N_\wedge)$. Entsprechend beweist man Assoziativität von $\vee$ und $(N_\vee)$. Offensichtlich gilt $inf(a, sup(a, b)) = a$ und $sup(inf(b, a), a) = a$. Damit ergibt sich auch $(C_\wedge)$ und $(C_\vee)$.

Es sei $\mathscr{R} = (M; R, R_1, R_2)$ eine ausgezeichnete Quasiordnung, in der jedes geordnete Paar von Elementen ein ausgezeichnetes Infimum und Supremum hat. Den N-Schrägverband $(M; \wedge, \vee)$ zugeordnet durch die Festsetzung $(o_\wedge)$ und $(o_\vee)$, bezeichnen wir mit $\mathscr{R}^+$.

4. Ordnungstheoretische Charakterisierung der N-Schrägverbände

Nun zeigen wir, daß zwischen N-Schrägverbänden und ausgezeichneten Quasiordnungen, in denen jedes geordnete Paar von Elementen ein ausgezeichnetes Infimum und ein ausgezeichnetes Supremum hat, eine eindeutige Beziehung besteht.

4.1. *Es sei $\mathscr{M} = (M; \wedge, \vee)$ ein N-Schrägverband; es gilt:*

$$(\mathscr{M}^*)^+ = \mathscr{M}.$$

Beweis. $\mathscr{M} = (M; \wedge, \vee)$ und $(\mathscr{M}^*)^+ = (M; \cap, \cup)$ sind Algebren über derselben Menge M. Aus Dualitätsgründen genügt es, die erste der beiden Identitäten $a \wedge b = a \cap b$ und $a \vee b = a \cup b$ nachzuweisen. Es sei $a \cap b = i$. Nach $(o_\wedge)$ ist $i = inf(a, b)$ in der ausgezeichneten Quasiordnung $\mathscr{M}^* = (M, R, R_1, R_2)$, also ist:

(a) iR_1a und iRb,

(b) uRa und $uRb \Rightarrow uRi$.

Aus (a) ergibt sich mit Hilfe von (r) und (r_1) $a \wedge i = i, i \wedge b = i$. Nach $(N_\wedge)$ ist dann $a \wedge b \wedge i = a \wedge i \wedge b = a \wedge i = i$, also

(c) $a \wedge b \wedge i = i$.

Nach (r) und (r_1) zusammen mit $(I_\wedge)$ ergibt sich $a \wedge bR_1a$ und $a \wedge bRb$. Daraus folgt wegen (b) $a \wedge bRi$ und somit nach (r)

(d) $a \wedge b \wedge i = a \wedge b$.

Aus (c) und (d) folgt $a \wedge b = i = a \cap b$.

4.2. *Es sei $\mathscr{R} = (M; R, R_1, R_2)$ die in Rede stehende ausgezeichnete Quasiordnung; es gilt $(\mathscr{R}^+)^* = \mathscr{R}$.*

Beweis. $\mathscr{R} = (M; R, R_1, R_2)$ und $(\mathscr{R}^+)^* = (M; S, S_1, S_2)$ sind ausgezeichnete Quasiordnungen über derselben Menge M. Nach (r), $(o_\wedge)$ und 2.3 ist

$$aSb \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a = inf(a, b) \Leftrightarrow aRb,$$

also $S = R$. Nach (r_1), $(o_\wedge)$ und 2.4 ist

$$aS_1b \Leftrightarrow b \wedge a = a \Leftrightarrow a = inf(b, a) \Leftrightarrow aR_1b,$$

also $S_1 = R_1$. Entsprechend erhält man $S_2 = R_2$.

Auf Grund dieser eindeutigen Beziehung können N-Schrägverbände mit den in Rede stehenden ausgezeichneten Quasiordnungen gewissermaßen identifiziert werden.

5. Beispiele

5.1. Es sei Z die Menge aller ganzen Zahlen. Für je zwei Elemente $a, b \in Z$ werde festgesetzt

$$a \wedge b := \lambda\,|ggT(a, b)|,$$

$$a \vee b := \sigma\,|kgV(a, b)|;$$

es sei: $\lambda = 1$ $(\sigma = 1)$ wenn $a \geqq 0$ $(b \geqq 0)$,

$\lambda = -1$ $(\sigma = -1)$ wenn $a < 0$ $(b < 0)$.

Dann ist $(Z;\ \wedge,\ \vee)$ ein N-Schrägverband, jedoch kein Fastverband (z. B. $(0 \vee -2) \wedge -2 = 2 \neq -2$). Die zugeordnete ausgezeichnete Quasiordnung $(Z;\ R,\ R_1,\ R_2)$ enthält die folgenden bestimmten Relationen

$aRb \quad :\Leftrightarrow a|b,$

$aR_1b \quad :\Leftrightarrow a|b$ und auch $(ab > 0$ oder $a \geqq 0,\ b = 0)$,

$aR_2b \quad :\Leftrightarrow a|b$ und $ab \geqq 0$.

5.2. Es sei C die Menge aller komplexen Zahlen. Für zwei komplexe Zahlen $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, $a_1 \leqq b_1$ setzt man

$\alpha \wedge \beta := \alpha, \quad \beta \wedge \alpha := (a_1, a_1 + b_2 - b_1),$

$\alpha \vee \beta := \beta, \quad \beta \vee \alpha := (b_1, a_1 + a_2 - b_1).$

Dann ist $(C;\ \wedge,\ \vee)$ ein N-Schrägverband, jedoch kein Fastverband. Die zugeordnete ausgezeichnete Quasiordnung $(C;\ R,\ R_1,\ R_2)$ ist durch die Festsetzung

$$\alpha R \beta \quad :\Leftrightarrow a_1 \leqq b_1,$$

$$\alpha R_1 \beta \quad :\Leftrightarrow a_1 \leqq b_1 \text{ und } b_1 - a_1 = b_2 - a_2,$$

$$\alpha R_2 \beta \quad :\Leftrightarrow a_1 \leqq b_1 \text{ und } b_1 - a_1 = a_2 - b_2$$

bestimmt.

5.3. Es sei L ein Verband und A eine endliche Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Weiter seien $(f_1, \ldots, f_n)$, $(g_1, \ldots, g_n)$ zwei n-Tupel solcher Abbildungen des Verbandes L in die Menge A, für welche

$$f_i(x) \in A - \{f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x)\}$$

$$g_i(x) \in A - \{g_1(x), \ldots, g_{i-1}(x)\}$$

$(x \in L,\ i \in \{2, \ldots, n\})$ gelten soll.

Es sei (x, a_i), $(y, a_j) \in L \times A$. Dann existieren Abbildungen f_k, g_h, so daß die Beziehungen $f_k(x) = a_i$, $g_h(y) = a_j$ erfüllt sind $(i, j, k, h \in \{1, \ldots, n\})$. Nun setzt man

$$(x, a_i) \wedge (y, a_j) := (x \wedge y, f_k(x \wedge y)),$$

$$(x, a_i) \vee (y, a_j) := (x \vee y, g_h(x \vee y)).$$

Dann ist die Algebra $(L \times A; \wedge, \vee)$ ein N-Schrägverband. Die zugeordnete ausgezeichnete Quasiordnung $(L \times A; R, R_1, R_2)$ wurde auf folgende Weise definiert: Es sei $\leqq$ die Halbordnung im Verband L und (x, a_i), $(y, a_j) \in L \times A$. Es gilt

$$(x, a_i)\ R\ (y, a_j) \quad :\Leftrightarrow x \leqq y,$$

$$(x, a_i)\ R_1\ (y, a_j) \quad :\Leftrightarrow x \leqq y \text{ und es gibt } f_k \text{, so daß } f_k(x) = a_i,\ f_k(y) = a_j \text{ gilt,}$$

$$(x, a_i)\ R_2\ (y, a_j) \quad :\Leftrightarrow x \leqq y \text{ und es gibt } g_h \text{, so daß } g_h(x) = a_i,\ g_h(y) = a_j \text{ gilt,}$$

$i, j, k, h \in \{1, \ldots, n\}$. Ist $f_k = g_k$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, dann gilt auch $R_1 = R_2$, und $(L \times A; \wedge, \vee)$ ist ein Fastverband.

5.4. Es sei $(T, \mathscr{U})$ ein zusammenhängender topologischer Raum, wobei $\mathscr{U}$ das System der abgeschlossenen Mengen bedeutet. Zu jeder Teilmenge $A \subseteq T$ ist ihre abgeschlossene Hülle (mit $\bar{A}$ bezeichnet) und ihr Inneres (mit $int(A)$ bezeichnet) zugeordnet. Es sei $\mathscr{S} = \{int(A) \mid A \in \mathscr{U}\}$ und $\mathscr{P} = \mathscr{U} \cup \mathscr{S}$. Für je zwei Elemente $A, B \in \mathscr{P}$ werde festgesetzt:

$$\text{ist } A \in \mathscr{U} \quad \text{dann } A \wedge B := A \cap \bar{B},\ B \vee A := \bar{B} \cup A,$$

$$\text{ist } A \notin \mathscr{U} \quad \text{dann } A \wedge B := A \cap int(B),\ B \vee A := int(B) \cup A.$$

Die Algebra $(\mathscr{P}; \wedge, \vee)$ ist ein N-Schrägverband. Die zugeordnete ausgezeichnete Quasiordnung $(\mathscr{P}, R, R_1, R_2)$ ist durch

$$ARB \quad :\Leftrightarrow A \subseteq \bar{B},$$

$$AR_1B \quad :\Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathscr{U} \text{ für } B = T \\ A \subseteq \bar{B} \text{ für } B \neq T \text{ und } A, B \in \mathscr{U} \text{ oder } A, B \in \mathscr{S}, \end{cases}$$

$$AR_2B \quad :\Leftrightarrow \begin{cases} B \in \mathscr{U} \quad \text{für } A = \emptyset \\ A \subseteq \bar{B} \text{ für } A \neq \emptyset \text{ und } A,\, B \in \mathscr{U} \text{ oder } A,\, B \in \mathscr{S} \end{cases}$$

bestimmt.

Ist $(T, \mathscr{U})$ das kleinste Element im Verband der T_1-topologischen Räume, dann gilt $R_1 = R_2 = R$, und sie stellt einen Verband dar.

LITERATUR

[1] GERHARDTS, M. D.: Schrägverbände und Quasiordnungen, Math. Ann. 181, 65—73 (1969).

[2] GERHARDTS, M. D.: Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände, Math. Ann. 161, 231—240 (1965).

Eingegangen am 12. 1. 1972

Katedra matematiky Ped. fakulty
Banská Bystrica