Pavel Goralčík; Zdeněk Hedrlín

# О сдвигах полугрупп. II. Сюръективные преобразования

*Matematický časopis*, Vol. 18 (1968), No. 4, 263--272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126871

Matematický časopis 18 (1968), No. 4

# О СДВИГАХ ПОЛУГРУПП II

# СЮРЪЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ПАВЕЛ ГОРАЛЬЧИК (PAVEL GORALČÍK), ЗДЕНЕК ГЕДРЛИН (ZDENĚK HEDRLÍN), Praha

В этой работе продолжается изучение строения сдвигов полугрупп с единицей, начатое в [1]. Свое внимание сосредоточим сейчас на сюръективных преобразованиях, т. е. отображениях множеств на себя.

В класс сюръективных преобразований входят как обратимые, так и необратимые преобразования. Что касается первых, нетрудно видеть, что они являются квазипериодическими, и, таким образом, входят в класс преобразований, рассмотренных в [1].

Чтобы закончить изучение сюръективных сдвигов полугрупп с единицей, рассмотрим сейчас необратимые преобразования множеств на себя. Исходным будем считать следующее определение.

**Определение 1.** *Преобразование $\varphi$ множества $X$ назовем увеличительным преобразованием, если оно сюръективно, но не взаимно однозначно, т. е., если существует множество $X_0 \subset X$, $X_0 \neq X$, такое, что $\varphi[X_0] = X$.*

Понятно, что здесь мы будем иметь дело с увеличительными элементами полугрупп — понятием, введенным Е. С. Ляпным. Элемент $a$ полугруппы $S$ называется левым увеличительным, если для некоторого собственного подмножества $A$ множества $S$ имеет место $aA = S$.

Очевидно, внутренний сдвиг полугруппы является увеличительным преобразованием тогда и только тогда, когда он определяется увеличительным элементом. С другой стороны, класс увеличительных преобразований гораздо шире класса увеличительных сдвигов. Настоящая работа посвящена доказательству необходимого и достаточного условия для того, чтобы данное увеличительное преобразование $\varphi$ множества $X$ служило сдвигом для некоторой полугруппы с единицей, определенной на $X$.

Попутно будет построен целый класс простых полугрупп, включающий в себя, в частности, известную бициклическую полугруппу.

Отправным пунктом наших построений опять является лемма (см. [1]), гласящая, что введение ассоциативной операции с единицей на некотором множестве $X$ равносильно заданию на $X$ двух систем преобразований $F$ и $G$ таким образом, чтобы для всех $f \in F$ и $g \in G$ было $f \circ g = g \circ f$, и чтобы существовал элемент $e \in X$ такой, что $F(e) = G(e) = X$.

Ясно, что сдвигами полугрупп с единицей на множестве будут те и только те преобразования, которые можно включить в системы преобразований этого типа.

Далее, понадобятся два понятия из теории делимости преобразований. Пусть $\iota$ тождественное преобразования $X$. Если $\varphi \circ \chi = \iota$, то $\varphi$ называется ретракцией $\chi$, и $\chi$ называется иссечением $\varphi$. Для того, чтобы преобразование $\varphi$ обладало иссечением, необходимо и достаточно, чтобы преобразование $\varphi$ отображало $X$ на себя. Для того, чтобы преобразование $\chi$ обладало ретракцией, необходимо и достаточно, чтобы $\chi$ отображало $X$ в себя взаимно однозначно.

Простейшими среди увеличительных преобразований являются связные увеличительные преобразования.

Напомним, что преобразование $\varphi$ определяет разбиение множества $X$, классы которого мы называем компенентами $\varphi$, по следующей эквивалентности $E_\varphi$: Скажем, что $xE_\varphi y$, если найдутся натуральные $m$, $n$ так, что $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$.

Связными называются однокомпонентные преобразования, с них мы и начнем свое рассмотрение увеличительных сдвигов.

Прежде чем сформулировать первую теорему, дадим определения изоморфного вложения преобразований (как алгебр с одной унарной операцией) и ассоциированной последовательности преобразований.

**Определение 2.** *Скажем, что преобразование $\varphi$ множества $X$ изоморфно вкладывается в преобразование $\psi$ множества $Y$, если существует взаимно однозначное отображение $\sigma$ множества $X$ в множество $Y$ такое, что $\sigma(\varphi(x)) = \psi(\sigma(x))$ имеет место для всех $x \in X$.*

**Определение 3.** *Пусть $\varphi$ — связное преобразование множества $X$, не обладающее циклом, т. е. для всех $x \in X$ равенство $\varphi^p(x) = \varphi^q(x)$ влечет $p = q$, и пусть $e \in X$ некоторый фиксированный элемент. Пусть, далее, $\bar{\varphi}$ означает преобразование $X$, тождественное на множестве $H_0 = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [\varphi^k(e)]$, и совпадающее с $\varphi$ на $X \backslash H_0$. Преобразование $\bar{\varphi}$ уже не будет связным, каждому $\varphi^k(e)$ соответствует одна компонента $\bar{\varphi}$ — обозначим ее $T_k$.*

Последовательность преобразований $\tau_k = \bar{\varphi}/T_k$ , $k \geqslant 0$ назовем ассоциированной с $\varphi$ по $e$.

**Теорема 1.** *Увеличительное связное преобразование $\varphi$ множества $X$ является сдвигом некоторой полугруппы $S$ с единицей тогда и только тогда, если оно не имеет цикла, и в $X$ найдется такой элемент $e$, что в ассоциированной с $\varphi$ по $e$ последовательности преобразований $\{\tau_k\}_0^\infty$ преобразование $\tau_k$ изоморфно вкладывается в $\tau_{k+1}$ для всех $k \geqslant 0$.*

Полугруппа $S$ по необходимости простая.

Доказательство. Остановимся сначала на необходимости условия теоремы. Предположим, что $\varphi$ является связным увеличительным сдвигом, ради определенности левым, полугруппы $S$ на множестве $X$. Покажем, что последовательность преобразований $\{\tau_k\}_0^\infty$ ассоциированная с $\varphi$ по единице $e$ полугруппы $S$, обладает свойством вложимости $\tau_k$ в $\tau_{k+1}$ для всех $k \geqslant 0$.

Заметим прежде всего, что в силу увеличительности $\varphi$, множество $\varphi^{-1}[x]$ тех элементов $t \in X$, для которых $\varphi(t) = x$, непусто для всех $x \in X$, в частности, $\varphi^{-1}[e] \neq \emptyset$.

Пусть $b$ — произвольный элемент из $\varphi^{-1}[e]$. Правый сдвиг $g_a$, определяемый элементом $a = \varphi(e)$, отображает, в силу перестановочности с $\varphi$, элемент $b$ в $\varphi^{-1}[a]$. Действительно,

$$\varphi(g_a(b)) = g_a(\varphi(b)) = g_a(e) = a.$$

В множество $\varphi^{-1}[a]$ входит $e$, выясним поэтому, может ли быть $g_a(b) = e$. В таком случае, для левого сдвига $f_b$ было бы

$$f_b(a) = f_b(g_a(e)) = g_a(f_b(e)) = g_a(b) = e,$$

но тогда $\varphi \circ f_b(e) = f_b \circ \varphi(e) = e$, т. е. $\varphi \circ f_b = f_b \circ \varphi = f_\iota$ — тождественное преобразование множества $X$, и $\varphi$ было бы обратимым преобразованием, что противоречит предположению.

Для дальнейшего выяснения структуры $g_a$ определим множества $H_n$ и $T_{m,n}$, полагая $H_0 = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [\varphi^k(e)]$, $H_1 = \varphi^{-1}[H_0] \backslash H_0$ и $H_{n+1} = \varphi^{-1}[H_n]$ для $n \geqslant 1$, $T_{m,n} = T_m \cap H_n$ для $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$, где $T_m$ — компонента элемента $\varphi^m(e)$ преобразования $\bar{\varphi}$ (см. определние 3).

До сих пор мы доказали, что $g_a[T_{0,1}] \subset T_{1,1}$, учитывая, что $T_{0,1} = \varphi^{-1}[e]$, $T_{1,1} = \varphi^{-1}[a] \backslash [e]$ и $b$ — произвольный элемент из $\varphi^{-1}[e]$. Покажем далее, что $g_a[T_{m,1}] \subset T_{m+1,1}$ для всех $m \geqslant 1$. Дело в том, что преобразование $g_a$ взаимно однозначное, так как оно обладает ретракцией. Действительно, для любого $b \in \varphi^{-1}[e]$

$$g_b(g_a(e)) = g_b(a) = g_b(\varphi(e)) = \varphi(g_b(e)) = \varphi(b) = e,$$

значит, $g_b \circ g_a$ — тождественное на $X$ преобразование.

Далее, сдвиг $g_a$ совпадает с $\varphi$ на множестве $H_0$, так как

$$g_a(\varphi^k(e)) = \varphi^k(g_a(e)) = \varphi^k(a) = \varphi^k(\varphi(e)) = \varphi(\varphi^k(e)).$$

Для $t \in T_{m,1}$ имеем $\varphi(g_a(t)) = g_a(\varphi(t)) = g_a(\varphi^m(e)) = \varphi^{m+1}(e)$, следовательно, $g_a[T_{m,1}] \subset \varphi^{-1}[\varphi^{m+1}(e)] = T_{m+1,1} \cup [\varphi^m(e)]$. Но если бы $g_a(t) = \varphi^m(e)$ для некоторого $t \in T_{m,1}$, то, поскольку $\varphi^{m-1}(e) \neq t$ и $g_a(\varphi^{m-1}(e)) = \varphi^m(e)$, $g_a$ не было бы взаимно однозначным преобразованием.

Итак, $g_a[T_{m,1}] \subset T_{m+1,1}$ для всех $m \geqslant 0$.

Предположим, что $g_a[T_{m,k}] \subset T_{m+1,k}$ имеет место для всех $k \leqslant n$, и пусть $t \in T_{m,n+1}$. Так как $\varphi(t) \in T_{m,n}$, то $\varphi(g_a(t)) = g_a(\varphi(t)) \in T_{m+1,n}$, но это означает, что $g_a(t) \in \varphi^{-1}[T_{m+1,n}] = T_{m+1,n+1}$. Тем самым доказано, что для всех $m$, $n \geqslant 0$ $g_a[T_{m,n}] \subset T_{m+1,n}$, откуда следует, что $g_a$ отображает $T_m$ в $T_{m+1}$ для всех $m \geqslant 0$. При этом для $t \in T_{m,n}$, где $n \geqslant 1$

$$g_a(\tau_m(t)) = g_a(\varphi(t)) = \varphi(g_a(t)) = \tau_{m+1}(g_a(t)),$$

для $t \in T_{m,0}$, т. е. для $t = \varphi^m(e)$

$$g_a \circ \tau_m(t) = g_a \circ \tau_m(\varphi^m(e)) = g_a \circ \varphi^m(e) = \varphi^{m+1}(e) = \tau_{m\ 1} \circ \varphi^{m+1}(e) =$$
$$= \tau_{m+1} \circ g_a(t).$$

Мы видим, что $g_a$ изоморфно вкладывает $\tau_m$ в $\tau_{m+1}$ для всех $m \geqslant 0$.

Допустим, что у $\varphi$ имеется цикл $Z$. Из $\varphi[Z] = Z$ вытекает $Z \subset H_0$, но тогда $Z$ является также циклом $g_a$, поскольку $g_a/H_0 = \varphi/H_0$. Так как $g_a$ взаимно однозначно, должно быть $Z = H_0$, но это опять, в свою очередь, повлекло бы обратимость $\varphi$. (Если $\varphi^r(e) = e$ для $r \geqslant 1$, то свдиг $\varphi^{r-1}$ является преобразованием, обратным к $\varphi$.)

Остается показать, что полугруппа $S$ простая, т. е. не содержит собственного двустороннего идеала. Но это сразу видно из того, что, если $x \in T_{m,n}$, то $g_b^m \circ \varphi^n(x) = e$, значит, всякий двусторонний главный идеал содержит единицу $e$, и тем самым он равен $S$.

Докажем сейчас достаточность условия теоремы. Пусть дано связное увеличительное преобразование $\varphi$ множества $X$, не обладающее циклом, и пусть $e \in X$ — некоторый фиксированный элемент, для которого ассоциированная с $\varphi$ по $e$ последовательность преобразований допустима в смысле теоремы. Определим сначала необходимые в дальнейшем преобразования $\eta$, $\chi$, $\psi$.

1) По предположению, существует последовательность преобразований $\{\sigma_n\}_\infty^0$ такая, что $\sigma_n$ есть изоморфизм $\tau_n$ в $\tau_{n+1}$. Выберем одну такую последовательность и определим преобразование $\eta$, полагая $\eta = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \sigma_n$, т. е. для каждого $n \geqslant 0$ $\eta$ совпадает с $\sigma_n$ на $T_n$. Заметим, что обязательно

$\sigma_n$ отображает неподвижную точку преобразования $\tau_n$ в неподвижную точку $\tau_{n+1}$, т. е. $\eta(\varphi^n(e)) = \varphi^{n+1}(e)$, так что $\eta$ совпадает с $\varphi$ на $H_0$.

Покажем, что $\eta$ перестановочно с $\varphi$. Пусть $t \notin H_0$. Тогда для некоторого $n$ будет $t \in T_n$, и

$$\eta(\varphi(t) = \eta(\tau_n(t)) = \sigma_n(\tau_n(t)) = \tau_{n+1}(\sigma_n(t)) = \varphi(\eta(t)).$$

Последнее равенство основано на том, что из-за взаимной однозначности $\sigma_n$ будет также $\sigma_n(t) \notin H_0$. На множестве $H_0$ $\varphi$ и $\eta$ совпадают, отсюда тривиально следует

$$\varphi \circ \eta(t) = \eta \circ \varphi(t).$$

Наконец заметим, что для всех $m$, $n \geqslant 0$ преобразование $\eta$ отображает $T_{m,n}$ в $T_{m+1,n}$.

2. Построим сейчас преобразование $\chi$.

На множестве $X \backslash \eta[X]$ пусть $\chi$ совпадает с произвольным иссечением $\omega$ преобразования $\varphi$. Так как $T_0 \subset X \backslash \eta[X]$, $\chi$ определено полностью на $T_0$. Пусть $\chi$ определено уже на $T_0 \cup \ldots \cup T_n$. Для $t \in \eta[T_n] \subset T_{n+1}$ положим

$$\chi(t) = \eta \circ \chi \circ \eta^{-1}(t).$$

Тем самым, по индукции доопределяется $\chi$ на всем $\eta[X]$.

Зададимся произвольным $t \in X$. Так как $\eta(t) \in \eta[X]$,

$$\chi(\eta(t)) = \eta \circ \chi \circ \eta^{-1}(\eta(t)) = \eta(\chi(t)),$$

значит, преобразование $\chi$ перестановочно с $\eta$.

Покажем, что для всех $x \in X$ имеет место $\varphi \circ \chi(x) = x$. Для $x \in X \backslash \eta[X]$ это выполняется по определению. Пусть $y \in \eta[X] \cap T_m$. Тогда существуют $x \in X \backslash \eta(X)$ и $k$-натуральное так, что $\eta^k(x) = y$. Действительно, так как $y \in \eta[X]$, $\eta^{-1}(y)$ определено, и, учитывая, что $\eta[T_{m-1}] \subset T_m$ для всех $m \geqslant 1$, $\eta^{-1}(y) \in T_{m-1}$. Если $\eta^{-1}(y) \notin \eta[X]$, то положим $\eta^{-1}(y) = x$, и будет $\eta(x) = y$, $x \notin \eta[X]$, если $\eta^{-1}(y) \in \eta[X]$ то определено $\eta^{-2}(y) \in T_{m-2}$, итд. Не позже, чем после $m$ шагов мы дойдем до нужного нам $x$, так как $T_0 \cap \eta[X] = \emptyset$. Тогда $\varphi \circ \chi(y) = \varphi \circ \chi \circ \eta^k(x) = \eta^k \circ \varphi \circ \chi(x) = \eta^k(x) = y$.

Преобразование $\chi$ являестя иссечением $\varphi$, поэтому оно взаимно однозначно.

Из $\chi(t) \in \varphi^{-1}[t]$ вытекает, что для $t \in T_{m,n}$, $n \geqslant 1$ будет $\chi(t) \in T_{m,n+1}$, и $\chi(e) \in \varphi^{-1}[e] = T_{0,1}$. Пусть $\chi(e) = c$. Тогда $\chi(\varphi^m(e)) = \eta^m(\chi(e)) = \eta^m(\chi(e)) \in$ $\in \eta^m(c) \in T_{m,1}$.

Следовательно, для всех $m$, $n \geqslant 0$ будет $\chi[T_{m,n}] \subset T_{m,n+1}$.

3. Преобразование $\psi$ определим на $\eta[X]$ как обратное к $\eta$, т. е. для

$t \in \eta[X]$ положим $\psi(t) = \eta^{-1}(t)$. Таким образом, для любого $t \in X$ будет $\psi \circ \eta(t) = t$.

Чтобы $\psi$ было полностью определено на $H_0$, остается доопределить его в точке $e$. Положим $\psi(e) = b$, где $b$ — произвольная точка из $\varphi^{-1}[e]$. Дальше $\psi$ строится по индукции. Предполагая $\psi$ уже определенным на $H_0 \cup \ldots \cup H_n$, положим для всех $t \in H_{n+1} \backslash \eta[X]$

$$\psi(t) = \chi \circ \psi \circ \varphi(t).$$

Это возможно в силу того, что $\varphi(t) \in H_n$.

Покажем, что $\psi$ перестановочно с $\varphi$ и $\chi$.

Заметим сначала, что

$$\varphi \circ \psi(e) = \varphi(b) = e = \eta^{-1} \circ \eta(e) = \psi \circ \varphi(e).$$

Если $t \in \eta[X]$, то, в силу тождественности $\psi \circ \eta$, будет

$$\varphi \circ \psi(t) = \varphi \circ \psi \circ \eta \circ \eta^{-1}(t) = \varphi \circ \eta^{-1}(t) = \psi \circ \eta \circ \varphi \circ \eta^{-1}(t) =$$

$$\psi \circ \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1}(t) = \psi \circ \varphi(t),$$

и совершенно также

$$\chi \circ \psi(t) = \chi \circ \psi \circ \eta \circ \eta^{-1}(t) = \chi \circ \eta^{-1}(t) = \psi \circ \eta \circ \chi \circ \eta^{-1}(t) =$$

$$= \psi \circ \chi \circ \eta \circ \eta^{-1}(t) = \psi \circ \chi(t).$$

Пусть сейчас $t \notin H_0 \cup \eta[X]$. Тогда, по определению, $\psi(t) = \chi \circ \psi \circ \varphi(t)$, откуда $\varphi \circ \psi(t) = \varphi \circ \chi \circ \psi \circ \varphi(t) = \psi \circ \varphi(t)$. Из $t \notin \eta[X]$ вытекает, что также $\chi(t) \notin \eta[X]$. Действительно, если $\chi(t) \in \eta[X]$, то также $\eta \circ \varphi \circ \eta^{-1} \circ \circ \chi(t) \in \eta[X]$, но $\eta \circ \varphi \circ \eta^{-1} \circ \chi(t) = \varphi \circ \eta \circ \eta^{-1} \circ \chi(t) = \varphi \circ \chi(t) = t$. Кроме того, для всех $t \in X$ будет $\chi(t) \in H_0$. Поэтому, если $t \notin \eta[X]$, то $\psi \circ \chi(t) = = \chi \circ \psi \circ \varphi \circ \chi(t) = \chi \circ \psi(t)$.

Покажем далее, что $\psi[T_{m,n}] \subset T_{m-1,n}$ для всех $m \geqslant 1$. Прежде всего, пусть $t \in T_{m,n} \cap \eta[X]$. Тогда $\psi(t) = \eta^{-1}(t) \in T_{m-1,n}$. Тем самым, $\psi[T_{m,0}] \subset \subset T_{m+1,0}$, поскольку $T_{m,0} \subset \eta[X]$. Пусть сейчас $\psi[T_{m,k}] \subset T_{m-1,k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и пусть $t \in T_{m,n} \backslash \eta[X]$. Тогда $\psi(t) = \chi \circ \psi \circ \varphi(t)$, но $\varphi(t) \in T_{m,n-1}$, $\psi[T_{m,n-1}] \subset T_{m-1,n-1}$, $\chi[T_{m-1,n-1}] \subset T_{m-1,n}$, следовательно, $\psi[T_{m,n}] \subset T_{m-1,n}$.

Наконец, $\psi(e) = b \in \varphi^{-1}[e]$, т. е. $\psi[T_{0,0}] \subset T_{0,1}$. Предположим, что $\psi[T_{0,k}] \subset T_{0,k+1}$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и пусть $t \in T_{0,n}$. Поскольку $T_0 \subset X \backslash \eta[X]$, то $t \notin \eta[X]$ и $\psi(t) = \chi \circ \psi \circ \varphi(t)$. Но $\varphi(t) \in T_{0,n-1}$, $\psi[T_{0,n-1}] \subset T_{0,n}$ и $\chi[T_{0,n}] \subset T_{0,n+1}$.

Следовательно, для всех $n \geqslant 0$ будет $\psi[T_{0,n}] \subset T_{0,n+1}$.

Итак, у нас есть сейчас преобразования $\varphi$, $\chi$, $\eta$, $\psi$ такие, что $\varphi \circ \chi(t) = = \psi \circ \eta(t) = t$ для всех $t \in X$, и преобразования $\varphi$, $\chi$ перестановочны с $\eta$ и $\psi$.

Приступим к определению семейств преобразований $F = \{f_x\}$ и $G = \{g_x\}$, $x \in X$, служащих системами соответственно левых и правых сдвигов для одной из тех полугрупп с единицей, для которых $\varphi$ будет левым сдвигом:

Для $x \in T_{p,q}$

$$f_x(t) = \begin{cases} \eta^m \circ \psi^n(x) & \text{для} \quad t \in T_{m,n},\ n \leqslant p, \\ \chi^q \circ \varphi^p(t) & \text{для остальных } t, \end{cases}$$

для $y \in T_{r,s}$

$$g_y(t) = \begin{cases} \chi^l \circ \varphi^k(y) & \text{для} \quad t \in T_{k,\,l},\ k > s, \\ \eta^r \circ \psi^s(t) & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f_x(e) = g_x(e) = x$ для всех $x \in X$, следовательно, $F(e) = G(e) = X$, причем $\varphi = f_{\varphi(e)} \in F$.

Покажем, что $f_x$ перестановочно с $g_y$ для любых $x, y \in X$. Предположим, что $t \in T_{m,n}$, $x \in T_{p,q}$, $y \in T_{r,s}$, и рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $n \leqslant p$, $m > s$:

$$f_x(t) = \eta^m \circ \psi^n(x) \in T_{p+m-n,q}$$

$$g_y(t) = \chi^n \circ \varphi^m(y) \in T_{r,s-m+n}.$$

Действительно, $x \in T_{p,q}$ и, так как $n \leqslant p$, то $\psi^n[T_{p,q}] \subset T_{p-n,q}$ и $\eta^m[T_{p-n,q}] \subset T_{p-n+m,q}$. Во втором случае, $y \in T_{r,s}$ и, так как $m > s$, то $\varphi^m[T_{r,s}] \subset T_{r,s-m}$ и $\chi_n[T_{r,s-m}] \subset T_{r,s-m+n}$.

а) Если $p + m - n < s$, то $s - m + n > p$, и будет

$$f_x \circ g_y(t) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \chi^n \circ \varphi^m(y) = \chi^q \circ \varphi^{p-n+m}(y),$$

$$g_y \circ f_x(t) = \chi^q \circ \varphi^{p+m-n}(y).$$

б) Если $p + m - n \geqslant s$, то $s - m + n \leqslant p$, и будет

$$f_x \circ g_y(t) = \eta^r \circ \psi^{s-m+n}(x)$$

$$g_y \circ f_x(t) = \eta^r \circ \psi^s \circ \eta^m \circ \psi^n(x) = \eta^r \circ \psi^{s-m+n}(x).$$

2. Пусть $n \leqslant p$, $m \geqslant s$:

$$f_x(t) = \eta^m \circ \psi^n(x) \in T_{p+m-n,q}$$

$$g_y(t) = \eta^r \circ \psi^s(t) \in T_{m-s+r,n},$$

так как $t \in T_{m,n}$, то в силу $m \geqslant s$ $\psi^s[T_{m,n}] \subset T_{m-s,n}$, $\eta^r[T_{m-s,n}] \subset T_{m\ s+r,n}$. Учитывая, что $p + m - n \geqslant s$,

$$f_x \circ g_y(t) = \eta^{m-r+s} \circ \psi^n(x),$$

$$g_y \circ f_x(t) = \eta^r \circ \psi^s \circ \eta^m \circ \psi^n(x) = \eta^{m-r+s} \circ \psi^n(x).$$

3. Пусть $n > p$, $m > s$:

$$f_x(t) = \chi^q \circ \varphi^p(t) \in T_{m,n-p+q},$$

$$g_y(t) = \chi^n \circ \varphi^m(y) \in T_{r,s-m+n}, \quad s - m + n > p,$$

$$f_x \circ g_y(t) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \chi^n \circ \varphi^m(y) = \chi^{q+n-p} \circ \varphi^m(y),$$

$$g_y \circ f_x(t) = \chi^{n-p+q} \circ \varphi^m(y).$$

4. Пусть, наконец, $n > p$, $m \geqslant s$:

$$f_x(t) = \chi^q \circ \varphi^p(t) \in Tm_{,n-p+q},$$

$$g_y(t) = \eta^r \circ \psi^s(t) \in Tm_{m-s+r,n},$$

$$f_x \circ g_y(t) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \eta^r \circ \psi^s(t),$$

$$g_y f_x(t) = \eta^r \circ \psi^s \circ \chi^q \circ \varphi^p(t) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \eta^r \circ \psi^s(t)$$

На этом доказательство теоремы 1 закончивается.

Простейшим преобразованием, удовлетворяющим условиям теоремы 1, будет следующее преобразование $\varphi$:

Пусть $X = \{x_{m,n}\}$, $m, n \geqslant 0$, $\varphi(x_{m,n}) = \begin{cases} x_{m,n-1}, & n \geqslant 1, \\ x_{m+1,n}, & n = 0. \end{cases}$

Если применить нашу конструкцию к этому преобразованию, то обнаружим, что преобразования $\eta$, $\chi$, $\psi$ определяются совершенно однозначно, именно

$$\eta(x_{m,n}) = x_{m+1,n}, \quad \chi(x_{m,n}) = x_{m,n+1}, \quad \psi(x_{m,n}) = \begin{cases} x_{m-1,n}, & m \geqslant 1, \\ x_{m,n+1}, & m = 0. \end{cases}$$

и в результате получается бициклическая полугруппа (см. [2]).

Приступим к формулировке общей теоремы об увеличительных преобразованиях, освободившись от требования связности.

**Теорема 2.** *Увеличительное преобразование $\varphi$ является сдвигом некоторой полугруппы $S$ с единицей тогда и только тогда, если хотя бы одна из его компонент удовлетворяет условиям теоремы 1.*

При этом полугруппа $S$ может не быть простой, но она содержит нетривиальную простую подполугруппу с той же единицей.

Доказательство. Пусть $\varphi$ является увеличительным сдвигом полугруппы $S$ с единицей $e$. Компонента $E_\varphi(e)$ является подполугруппой полугруппы $S$. Действительно, если $x$, $y \in E_\varphi(e)$ и $g_y$ — правый сдвиг, определяемый элементом $y$, то $xy = g_y(x)$. Далее найдутся $m$ и $n$ такие, что $\varphi^m(e) = \varphi^n(x)$. Тогда

$$\varphi^m(y) - \varphi^m(g_y(e)) = g_y(\varphi^m(e)) = g_y(\varphi^n(x)) = \varphi^n(g_y(x)) = \varphi^n(xy),$$

т. е. $yE_\varphi xy$, следовательно, $xy \in E_\varphi(e)$.

Если бы преобразование $\varphi$ было взаимно однозначным на $E_\varphi(e)$, тогда левый сдвиг $f_b$, определяемый элементом $b$ таким, что $\varphi(b) = e$, был бы преобразованием, обратным к $\varphi$: тогда $\varphi \circ f_b(e) = \varphi(b) = e$, и, пользуясь правым сдвигом $g_a$, $a = \varphi(e)$, мы получаем

$$f_b \circ \varphi(e) = f_b \circ g_a(e) = g_a(b) \in \varphi^{-1}[g_a(\varphi(b))] = \varphi^{-1}[a]$$

т. е. $f_b \circ \varphi(e) = e$. Таким образом, преобразование $\varphi/E_\varphi(e)$ является связным увеличительным сдвигом полугруппы $E_\varphi(e)$ и должно подчиняться условиям теоремы 1.

Достаточность вытекает из следующего расширения конструкции систем сдвигов $F$ и $G$ для связного $\varphi$: Пусть преобразования $\eta$, $\chi$, $\psi$ построены на $E_\varphi(e)$ по конструкции из доказательства теоремы 1, и пусть, далее, $\eta$ и $\psi$ тождественны на $X \backslash E_\varphi(e)$, и $\chi$ на $X \backslash E_\varphi(e)$ совпадает с произвольным иссечением $\omega$ преобразования $\varphi$. Положим

для $x \in T_{p,q}$

$$f_x(t) = \begin{cases} \eta^m \circ \psi^n(x) & \text{для} \quad t \in T_{m,n},\ n \leqslant p, \\ \chi^q \circ \varphi^p(t) & \text{для} \quad \text{остальных } t, \end{cases}$$

для $x \in X \backslash E_\varphi(e)$ $f_x(t) = x$ для всех $t \in X$,

для $y \in T_{r,s}$

$$g_y(t) = \begin{cases} \chi^l \circ \varphi^k(y) & \text{для} \quad t \in T_{k,l},\ k > s, \\ \eta^r \circ \psi^s(t) & \text{для} \quad \text{остальных } t, \end{cases}$$

для $y \in X \backslash E_\varphi(e)$

$$g_y(t) = \begin{cases} \chi^l \circ \varphi^k(y) & \text{для} \quad t \in T_{k,l}, \\ t & \text{для} \quad t \in X \backslash E_\varphi(e). \end{cases}$$

Системы $\{f_x\}$ и $\{g_x\}$ для $x \in E_\varphi(e)$ совпадают с построенными в доказательстве теоремы 1 системами сдвигов, поэтому нет надобности в проверке перестановочности $f_x$ и $g_y$ на $E_\varphi(e)$ для $x$, $y \in E_\varphi(e)$.

Далее, для всех $x$, $y \in X$, $f_x[X \backslash E_\varphi(e)] \subset X \backslash E_\varphi(e)$ и $g_y[X \backslash E_\varphi(e)] \subset X \backslash E_\varphi(e)$. причем $g_y$ тождественно на $X \backslash E_\varphi(e)$. Тем самым обеспечена перестановочность $f_x$ и $g_y$ на $X \backslash E_\varphi(e)$ для всех $x$, $y \in X$. Для $x \in X \backslash E_\varphi(e)$ и любого $y \in X$ будет $f_x \circ g_y(t) = x = g_y(x) = g_y \circ f_x(t)$ для всех $t \in X$.

Наконец, пусть $x \in T_{p,q}$, $y \in X \backslash E_\varphi(e)$, $t \in T_{m,n}$. Для $n \leqslant p$ $f_x \circ g_y(t) = f_x \circ \chi^n \circ \varphi^m(y) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \chi^n \circ \varphi^m(y) = \chi^q \circ \varphi^{p+m-n}(y)$, $g_y \circ f_x(t) = g_y \circ \eta^m \circ \psi^n(x) = \chi^q \circ \varphi^{p+m-n}(y)$, так как $\eta^m \circ \psi^n(x) \in T_{p+m-n,q}$. Для $n > p$

$f_x \circ g_y(t) = \chi^q \circ \varphi^p \circ \chi^n \circ \varphi^m(y) = \chi^{n-p+q} \circ \varphi^m(y)$, $g_y \circ f_x(t) = g_y \circ \chi^q \circ \varphi^p(t) = \chi^{n-p+q} \circ \varphi^m(y)$, так как $\chi^q \circ \varphi^p(t) \in T_{m,n-p+q}$.

Итак, нами определены системы преобразований $\{f_x\}$, $\{g_x\}$, $x \in X$ такие, что $f_x \circ g_y = g_y \circ f_x$ для любых $x$, $y \in X$. Притом $f_x(e) = g_x(e) = x$ и $\varphi = f_{\varphi(e)}$. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Гедрлин З., Горальчик П., *О сдвигах полугрупп I, Периодические и квазипериодические преобразования*, Mat. časop. *18* (1968), 161—176.

[2] Clifford A. H., Preston G. B., *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence 1961.


Поступило 2. 4. 1966.

*Katedra základních matematických disciplin*
*na matematicko-fysikální fakultě*
*Karlovy university, Praha*