Pavel Galajda
Nomogramy analytických funkcií s kruhovým indexom

*Matematický časopis*, Vol. 18 (1968), No. 4, 283--298

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126866

Matematický časopis 18 (1968), No. 4

# NOMOGRAMY ANALYTICKÝCH FUNKCIÍ S KRUHOVÝM INDEXOM

PAVEL GALAJDA, Košice

1. V prácach [13], [14], [15] a [16] boli vyšetrované normálne tvary

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}(w - w_0)^2 \tag{1.1}$$

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C\,[N(w - w_0)] \tag{1.2}$$

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S\,[N(w - w_0)] \tag{1.3}$$

kde $C$ sú funkcie sin, cos, sh, ch, ďalej $S$ sú funkcie sin, cos, sec, csc, sh, ch, sech, csch, $N$ a $\gamma$ ľubovoľné reálne alebo rýdzo imaginárne čísla, $z_0 = a_0 + b_0 \mathrm{i}$, $W_0 = p_0 + q_0 \mathrm{i}$ ľubovoľné komplexné čísla. Tieto normálne tvary boli prevedené pre (1.1) na kanonické tvary a to: ak $\gamma$ je reálne číslo

$$a\left(\frac{4p^2}{\gamma}\right) + (b - b_0)^2 - \left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$a\left(\frac{4q^2}{\gamma}\right) - (b - b_0)^2 + \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right) = 0,$$

ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo

$$(a - a_0)^2 - \frac{4\,\mathrm{i}p^2}{\gamma} b + \left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4\,\mathrm{i}b_0p^2}{\gamma}\right) = 0, \tag{1.5}$$

$$(a - a_0)^2 + \frac{4\,\mathrm{i}q^2}{\gamma} b + \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4\,\mathrm{i}b_0q^2}{\gamma}\right) = 0.$$

Pre (1.2) na kanonické tvary, ak $\gamma$ je reálne číslo

$$(1.6)\qquad \left(\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(a-a_0)^2+\left(-\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(b-b_0)^2=1,$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2 q}\right)(a-a_0)^2+\left(\frac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2 q}\right)(b-b_0)^2=1,$$

ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo

$$(1.7)\qquad \left(-\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(b-b_0)^2+\left(\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(a-a_0)^2=1,$$

$$\left(-\frac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2 q}\right)(b-b_0)^2+\left(-\frac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2 q}\right)(a-a_0)^2=1.$$

Pre (1.3) na kanonické tvary, ak $\gamma$ je reálne číslo

$$(1.8)\qquad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)(\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\gamma z})+(\cos 2B)+(\cos 2P)=0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2}\,e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)(e^{-2\mathrm{Re}\gamma z})+(\cos 2B)-(\mathrm{ch}\, 2Q)=0,$$

ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo

$$(1.9)\qquad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)(-\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\gamma z})+(\cos 2B)+(-\cos 2P)=0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)(-\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\gamma z})+(\cos 2B)+(\mathrm{ch}\, 2Q)=0.$$

Boli skonštruované ich príslušné spojnicové nomogramy, ako aj nomogramy s rovnobežnými a kolmými indexami a vyšetrované rozličné transformácie.

2. V tejto časti práce ukážeme transformáciu spojnicových nomogramov kanonického tvaru

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} S(p)X(a)+G(p)Y(b)+H(p)&=0\\ T(q)X(a)+K(q)Y(b)+R(q)&=0\end{aligned}$$

v nomogramy s premenlivým kruhovým indexom, t. j. v tzv. nomogramy N. M. Gersevanova.

Nech stred kružnice je v bode o kóte $z_2(\equiv b)$ stupnice

$$(2.2)\qquad \xi_2=f_2,\quad \eta_2=g_2.$$

Ak táto kružnica pretína stupnicu

(2.3) $$\xi_1 = f_1, \quad \eta_1 = g_1$$

v bode o kóte $z_1$ ($\equiv a$) a stupnicu

(2.4) $$\xi_3 = f_3, \quad \eta_3 = g_3$$

v bode o kóte $z_3$ ($\equiv p$), potom súradnice týchto troch bodov spĺňajú rovnicu

(2.5) $$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 = (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2.$$

Dosadením do (2.5) za $\xi_i$, $\eta_i$, $i = 1; 2; 3$ hodnoty (2.2), (2.3), (2.4) dostaneme rovnicu

(2.6) $$f_3^2 + g_3^2 + (-f_1^2 - g_1^2) + 2f_2(f_1 - f_3) + 2g_2(g_1 - g_3) = 0$$

Rovnice (2.1) je možné uvažovať ako zvláštny prípad kanonického tvaru (2.6).

Úpravou rovníc (2.1) bude

(2.7) $$\left(\frac{H(p)}{S(p)} - A\right) + Y(b)\frac{G(p)}{S(p)} + (X(a) + A) = 0,$$

$$\left(\frac{R(q)}{T(q)} - A\right) + Y(b)\frac{K(q)}{T(q)} + (X(a) + A) = 0,$$

kde $A$ je konštanta a v ďalšom ju budeme voliť tak, aby výrazy pod odmocninami, ktoré sa v ďalšom texte vyskytujú, boli kladné.

Porovnaním kanonických tvarov (2.7) s (2.6) dostávame

(2.8) $$f_1 = 0, \quad g_1 = \sqrt{X(a) + A},$$

$$f_2 = \frac{Y(b)}{2}, \quad g_2 = 0,$$

$$f_3 = \frac{G(p)}{S(p)}, \quad g_3 = \sqrt{A - \left(\frac{H(p)}{S(p)} + \frac{G^2(p)}{S^2(p)}\right)},$$

$$f_4 = \frac{K(q)}{T(q)}, \quad g_4 = \sqrt{A - \left(\frac{R(q)}{T(q)} + \frac{K^2(q)}{T^2(q)}\right)},$$

kde $(X(a) + A)$ je kladné a $S(p) \neq 0$ $T(q) \neq 0$.

Použitím rovníc (2.2), (2.3), (2.4) dostávame zobrazovacie rovnice

(2.9) $$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{X(a) + A},$$

$$\xi_2 = \frac{Y(b)}{2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \frac{G(p)}{S(p)}, \qquad \eta_3 = \sqrt{A - \left(\frac{H(p)}{S(p)} + \frac{G^2(p)}{S^2(p)}\right)},$$

$$\xi_4 = \frac{K(q)}{T(q)}, \qquad \eta_4 = \sqrt{A - \left(\frac{R(q)}{T(q)} + \frac{K^2(q)}{T^2(q)}\right)}.$$

Uvažujme spojnicový nomogram tvaru (2.1), ktorý sa zobrazí pomocou rovníc

$$x_1 = \frac{1}{X(a)}, \quad y_1 = 0, \tag{2.10}$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{Y(b)},$$

$$x_3 = -\frac{S(p)}{H(p)}, \quad y_3 = -\frac{G(p)}{H(p)},$$

$$x_4 = -\frac{T(q)}{R(q)}, \quad y_4 = -\frac{K(q)}{R(q)}.$$

Z rovníc (2.9) zámenou $\xi_i$ a $\eta_i$ na $\bar{x}_i$ a $\bar{y}_i$, kde $i = 3,4$ dostávame, že

$$\bar{x}_i = \frac{y_i}{x_i}, \quad \bar{y}_i = \sqrt{A + \frac{1}{x_i} - \frac{y_i^2}{x_i^2}} \tag{2.11}$$

odkiaľ

$$x_i = \frac{1}{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 - A}, \quad y_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 - A} \tag{2.12}$$

Rovnice (2.9) určujú nomogram s ekvidistantnými bodmi o štyroch niciach, kde stred kružnice treba voliť na stupnici ($b$), bod, cez ktorý prechádza kružnica na stupnici ($a$) a kde nám pretne kružnica stupnice ($p$) a ($q$) čítame výsledky. Stupnice ($a$) a ($b$) sú priamočiare.

V prípade, že stred kružnice volíme na stupnici $z_1$ ($\equiv a$) tak, aby kružnica prechádzala cez bod stupnice $z_2$ ($\equiv b$), potom namiesto tvaru (2.6) dostávame

$$f_3^2 + g_3^2 + (-f_2^2 - g_2^2) - 2f_1(f_3 - f_2) - 2g_1(g_3 - g_2) = 0. \tag{2.13}$$

Úpravou rovníc (2.1) bude

$$\left(A + \frac{H(p)}{G(p)}\right) + X(a)\frac{S(p)}{G(p)} + (Y(b) - A) = 0, \tag{2.14}$$

$$\left(A + \frac{R(q)}{K(q)}\right) + X(a)\frac{T(q)}{K(q)} + (Y(b) - A) = 0.$$

Porovnaním rovníc (2.14) s tvarom (2.13) a použitím zobrazovacích rovníc, aby stred kružnice ležal na stupnici $z_1$ ($\equiv a$) dostaneme zobrazovacie rovnice

$$(2.15) \qquad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{X(a)}{2},$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - Y(b)}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A + \frac{H(p)}{G(p)} - \frac{S^2(p)}{G^2(p)}}, \quad \eta_3 = -\frac{S(p)}{G(p)},$$

$$\xi_4 = \sqrt{A + \frac{R(q)}{K(q)} - \frac{T^2(q)}{K^2(q)}}, \quad \eta_4 = -\frac{T(q)}{K(q)}.$$

Pričom, aby bolo možné voliť $A = 0$ je nutné, aby $Y(b)$ bolo kladné, čo je možné dosiahnuť zmenením znamienka u $Y(b)$ za predpokladu, že $Y(b)$ nemení znamienko.

Pomocou rovníc (2.10) a (2.15) dostávame

$$(2.16) \qquad \bar{x}_i = \sqrt{A - \frac{1}{y_i} - \frac{x_i^2}{y_i^2}}, \quad \bar{y} = -\frac{x_i}{y_i},$$

z toho

$$(2.17) \qquad x_i = -\frac{\bar{y}_i}{A - (\bar{x}_1^2 + \bar{y}_i^2)}, \quad y_i = \frac{1}{A - (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)}.$$

V prípade, že stred kružnice by sme zvolili na $z_3$ ($\equiv p$) (analogicky $z_4$ ($\equiv q$)), potom kanonický tvar je

$$(2.18) \qquad f_1^2 + g_1^2 + 2f_3(f_2 - f_1) + 2g_3(g_2 - g_1) + (-f_2^2 - g_2^2) = 0.$$

Vzťahy (2.11) a (2.16) nám umožňujú transformovať všetky nomogramy funkcií komplexnej premennej a špeciálne aj eliptické v nomogramy s kruhovým indexom.

3. V ďalšom sa budeme zaoberať použitím kanonických tvarov (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) na zostrojenie nomogramov N. M. Gersevanova.

I. Najprv uvažujeme normálny tvar (1.1).

a) Nech stred kružnice je na stupni $z_1$, ($\equiv a$). Porovnaním rovníc (1.4) s upraveným kanonickým tvarom (2.14) dostávame

$$(3.1) \qquad X(a) = a, \quad Y(b) = (b - b_0)^2$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = \frac{4p^2}{\gamma}, \quad \frac{T(q)}{K(q)} = -\frac{4q^2}{\gamma},$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = -\left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right), \quad \frac{R(q)}{K(q)} = -\left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0q^2}{\gamma}\right),$$

Na základe rovníc (2.15) dostaneme zobrazovacie rovnice pre normálny tvar (1.1), ak $\gamma$ je reálne číslo, ktoré sú

$$(3.2) \qquad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{a}{2},$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - (b - b_0)^2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A - \left(\frac{20p^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right)}, \quad \eta_3 = -\frac{4p^2}{\gamma},$$

$$\xi_4 = \sqrt{A - \left(\frac{20q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0q^2}{\gamma}\right)}, \quad \eta_4 = \frac{4q^2}{\gamma}.$$

Z rovníc (3.2) pre $\xi_3$ a $\eta_3$ vylúčením $p$ a z $\xi_4$ a $\eta_4$ vylúčením $q$ dostaneme

$$(3.3) \qquad \frac{\xi_{3,4}^2}{\dfrac{5A + a_0^2}{5}} + \frac{\left(\eta_{3,4} - \dfrac{2}{5}a_0\right)^2}{\dfrac{4}{25}(5A + a_0^2)} = 1.$$

Teda nositeľkou pre premenné $p$ a $q$ sú elipsy, posunuté na osi $\eta$ o $\frac{2}{5}a_0$ a ich poloosi sú $\sqrt{\frac{5A + a_0^2}{5}}$, $\frac{2}{5}\sqrt{5A + a_0^2}$.

V prípade, že $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo podobne porovnaním (1.5) s upraveným kanonickým tvarom (2.14) bude

$$(3.4) \qquad X(a) = b, \quad Y(b) = (a - a_0)^2,$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = -\frac{4\,\mathrm{i}p^2}{\gamma}, \quad \frac{T(q)}{K(q)} = \frac{4\,\mathrm{i}q^2}{\gamma},$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = \left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4\,\mathrm{i}b_0p^2}{\gamma}\right), \quad \frac{R(q)}{K(q)} = \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4\,\mathrm{i}b_0q^2}{\gamma}\right),$$

Použitím rovníc (2.15) dostávame zobrazovacie rovnice pre normálny tvar (1.1) v prípade, že $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo, ktoré sú:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{b}{2}, \tag{3.5}$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - (a - a_0)^2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A - \left(\frac{20p^4}{\gamma^2} + \frac{4\,ib_0p^2}{\gamma}\right)}, \quad \eta_3 = \frac{4\,ip^2}{\gamma},$$

$$\xi_4 = \sqrt{A + \left(\frac{20q^4}{\gamma^2} - \frac{4\,ib_0q^2}{\gamma}\right)}, \quad \eta_4 = -\frac{4\,iq^2}{\gamma}.$$

Z rovníc (3.5) pre $\xi_3$ a $\eta_3$ vylúčením $p$ a z $\xi_4$ a $\eta_4$ vylúčením $q$ dostaneme

$$\frac{\xi_{3,4}^2}{\frac{5A + b_0^2}{5}} + \frac{\left(\eta_{3,4} - \frac{2}{5}\,b_0\right)^2}{\frac{4}{25}(5A + b_0^2)} = 1, \tag{3.6}$$

čiže nositeľkou pre premenné $p$ a $q$ sú opäť elipsy.

b) Nech stred kružnice je na stupnici $z_2$ ($\equiv b$). Analogickým spôsobom použitím rovníc (2.9) dostávame zobrazovacie rovnice a to, ak $\gamma$ je reálne číslo

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{A + (b - b_0)^2}, \tag{3.7}$$

$$\xi_2 = \frac{a}{2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \frac{4p^2}{\gamma}, \quad \eta_3 = \sqrt{A - \left(\frac{12p^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right)},$$

$$\xi_4 = -\frac{4q^2}{\gamma}, \quad \eta_4 = \sqrt{A - \left(\frac{12q^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0q^2}{\gamma}\right)}.$$

Z rovníc (3.7) vylúčením $p$ a $q$ máme, že

$$\frac{\left(\xi_{3,4} - \frac{2}{3}\,a_0\right)^2}{\frac{4}{9}(3A + a_0^2)} + \frac{\eta_{3,4}^2}{\frac{3A + a_0^2}{3}} = 1, \tag{3.8}$$

čo je rovnica elipsy posunutá na osi $\xi$, ktorej poloosi sú $\frac{2}{3}\sqrt{3A + a_0^2}$, $\sqrt{\frac{3A + a_0^2}{3}}$

Ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo zobrazovacie rovnice budú

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{A + (a - a_0)^2}, \tag{3.9}$$

$$\xi_2 = \frac{b}{2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = -\frac{4\,ip^2}{\gamma}, \quad \eta_3 = \sqrt{A + \left(\frac{12p^4}{\gamma^2} - \frac{4\,ib_0p^2}{\gamma}\right)},$$

$$\xi_4 = \frac{4\,iq^2}{\gamma}, \quad \eta_4 = \sqrt{A + \left(\frac{12q^4}{\gamma^2} + \frac{4\,ib_0q^2}{\gamma}\right)}.$$

Z rovníc (3.9) vylúčením $p$ a $q$ dostávame rovnicu

$$\frac{\left(\xi_{3,4} - \frac{2}{3}b_0\right)^2}{\frac{4}{9}(3A + b_0^2)} + \frac{\eta_{3,3}^2}{\frac{3A + b_0^2}{3}} = 1, \tag{3.10}$$

čo je opäť rovnicou elipsy.

Pomocou zobrazovacích rovníc (3.2) a (3.5) bol zkonštruovaný nomogram obr. 1) ako pre $\gamma$ reálne, tak aj pre $\gamma$ — rýdzo imaginárne číslo, ktoré sme (volili $\gamma = 1$, $\gamma = \mathrm{i}$ a $A = 50$.

Príklad 1. Pre dané $a = -4$, $b - b_0 = 3$, $a_0 = -5$, ak $\gamma$ je reálne číslo, čítame pomocou kružidla (stred kružnice je na stupnici $a$) $p - p_0 = 1{,}44$ a $q - q_0 = 1{,}04$.

Príklad 2. Ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo, pre dané $a - a_0 = 2$, $b = 8$, $b_0 = +10$ pomocou kružidla (stred kružnice je na stupnici $b$) čítame $p - p_0 = 1{,}56$ a $q - q_0 = 0{,}65$.

Pomocou zobrazovacích rovníc (3.7) a (3.9) bol zostrojený nomogram (obr. 2), ako pre $\gamma$ reálne, tak aj pre $\gamma$ rýdzo imaginárne číslo, ktoré sme volili $\gamma = 1$, $\gamma = \mathrm{i}$ a $A = 30$.

Príklad 3. Ak $\gamma$ je reálne číslo pre dané $a = 12$, $b - b_0 = 2$, $a_0 = 10$ (stred kružnice je na stupnici $a$) čítame $p - p_0 = 1{,}56$ a $q - q_0 = 0{,}68$.

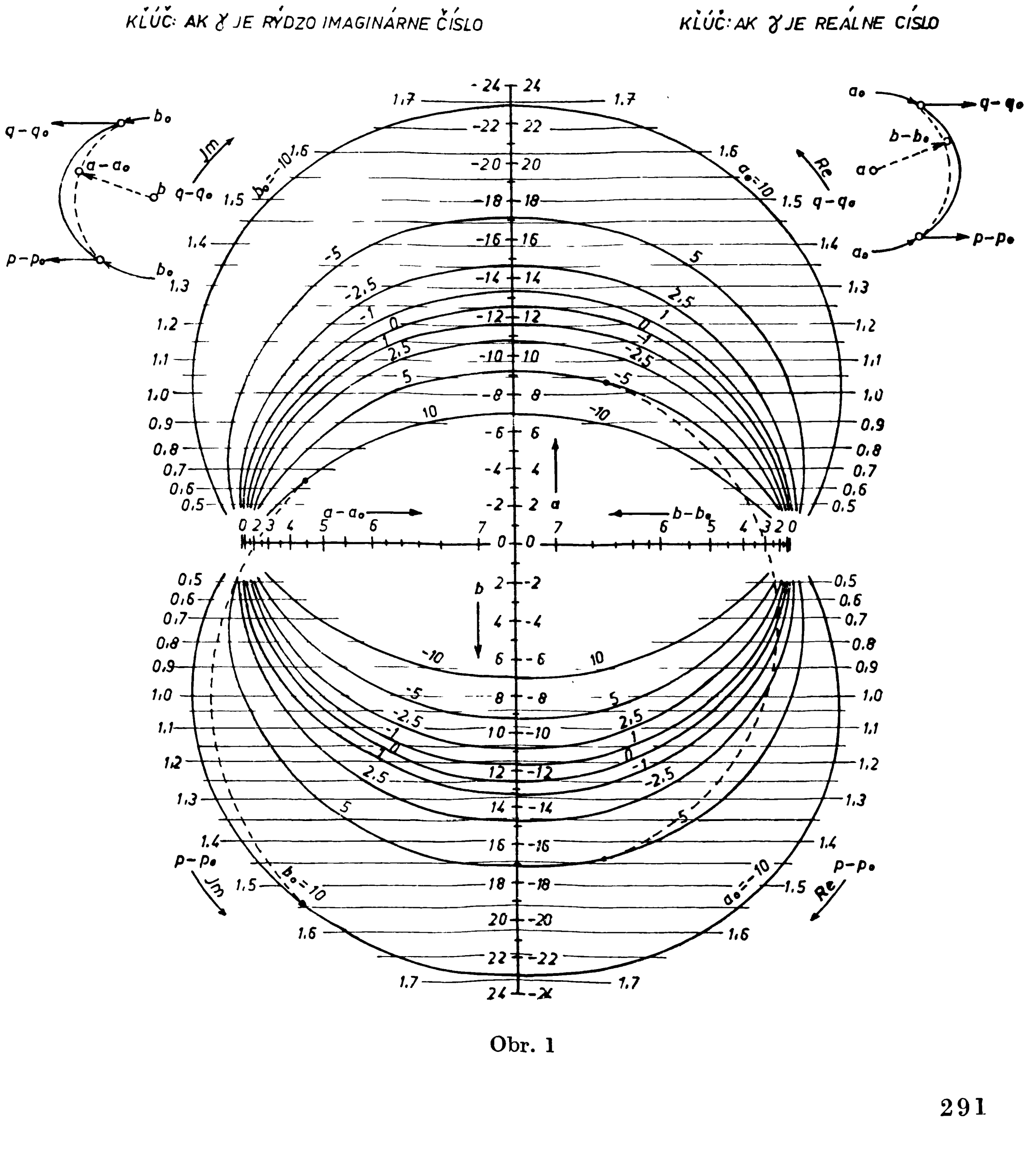
Príklad 4. Ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo pre dané $a - a_0 = 2$, $b = 6$,

$b_0 = 5$ (stred kružnice je na stupnici $b$) čítame $p - p_0 = 0{,}8$ a $q - q_0 =$ $= 1{,}28$.

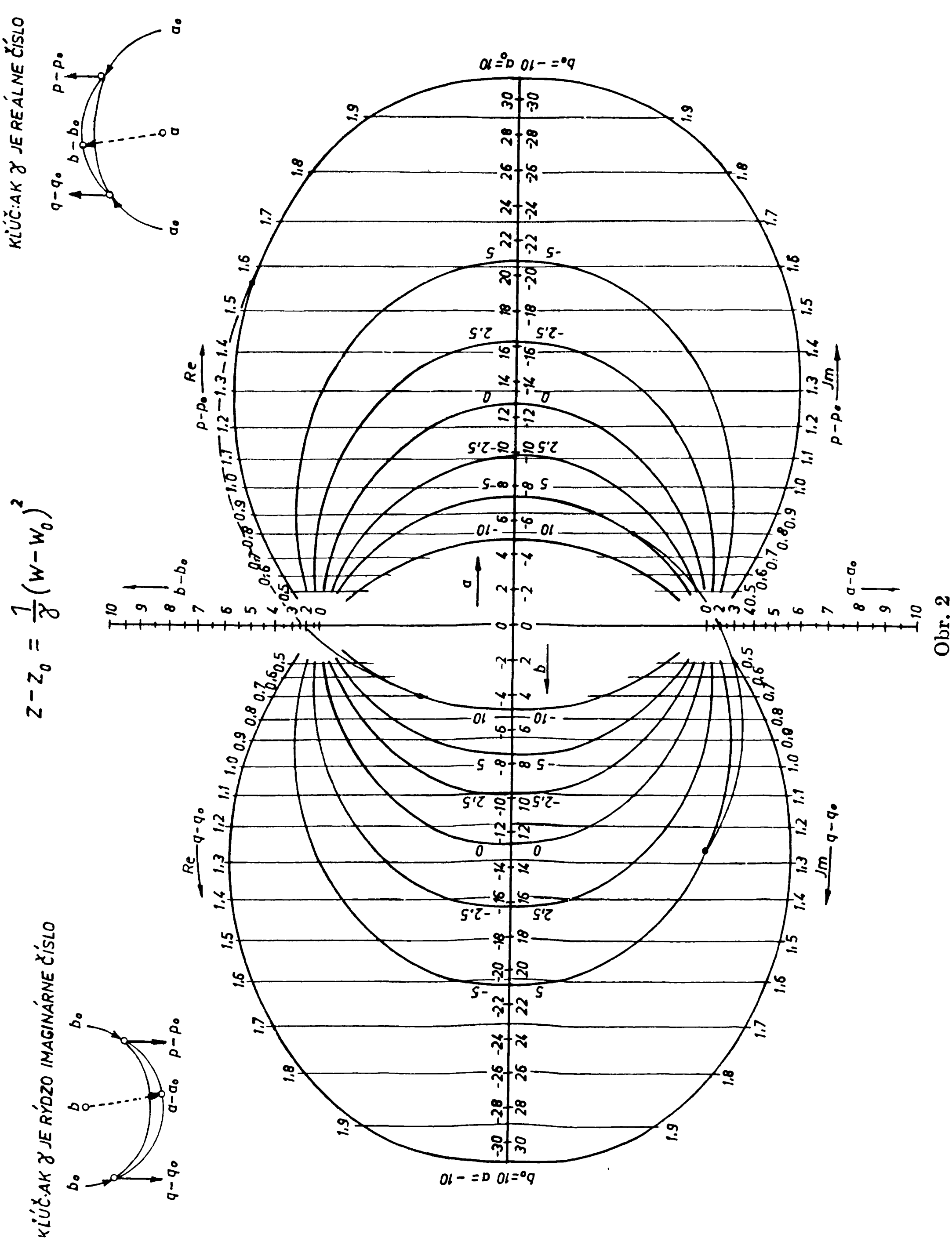
II. Uvažujme normálny tvar (1.2).

a) Nech stred kružnice je na stupnici $z_1$ ($\equiv a$). Porovnaním rovníc (1.6)

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}(w - w_0)^2$$




Obr. 1



$Z - Z_0 = \frac{1}{\gamma}(W - W_0)^2$
KĽÚČ: AK γ JE REÁLNE ČÍSLO
KĽÚČ: AK γ JE RÝDZO IMAGINÁRNE ČÍSLO
Re
Jm
$p - p_0$
$q - q_0$
$a - a_0$
$b - b_0$
$b_0 = -10$ $a_0 = 10$
$b_0 = 10$ $a = -10$


Obr. 2

s kanonickým tvarom (2.14) bude

$$X(a) = (a - a_0)^2, \quad Y(b) = (b - b_0)^2, \tag{3.11}$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = -\operatorname{ctg}^2 p, \quad \frac{T(q)}{K(q)} = \operatorname{th}^2 q,$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = \frac{\cos^2 p}{\gamma^2}, \quad \frac{R(q)}{K(q)} = -\frac{\operatorname{sh}^2 q}{\gamma^2}.$$

Použitím rovníc (2.15) dostávame zobrazovacie rovnice pre normálny tvar (1.2), ak $\gamma$ je reálne číslo, ktoré sú

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{(a - a_0)^2}{2}, \tag{3.12}$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - (b - b_0)^2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A + \frac{\cos^2 p}{\gamma^2} - \operatorname{ctg}^4 p}, \quad \eta_3 = \operatorname{ctg}^2 p,$$

$$\xi_4 = \sqrt{A - \frac{\operatorname{sh}^2 q}{\gamma^2} - \operatorname{th}^4 q}, \quad \eta_4 = -\operatorname{th}^2 q.$$

V prípade, že $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo úpravou kanonického tvaru (1.7) a porovnaním s tvarom (2.14) je

$$X(a) = (b - b_0)^2 \quad Y(b) = (a - a_0)^2, \tag{3.13}$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = -\operatorname{ctg}^2 p, \quad \frac{T(q)}{K(q)} = \operatorname{th}^2 q,$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = -\frac{\cos^2 p}{\gamma^2}, \quad \frac{R(q)}{K(q)} = \frac{\operatorname{sh}^2 q}{\gamma^2}.$$

Použitím rovníc (2.15) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad, že $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo, ktoré sú

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{(b - b_0)^2}{2}, \tag{3.14}$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - (a - a_0)^2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A + \left(-\frac{\cos^2 p}{\gamma^2} - \operatorname{ctg}^4 p\right)}, \quad \eta_3 = \operatorname{ctg}^2 p,$$

$$\xi_4 = \sqrt{A + \frac{\operatorname{sh}^2 q}{\gamma^2} - \operatorname{th}^4 q}, \qquad \eta_4 = -\operatorname{th}^2 q.$$

b) Nech stred kružnice je na stupnici $z_2$ ($\equiv b$). Pre $\gamma$ reálne číslo bude

(3.15)
$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{A + (a - a_0)^2},$$

$$\xi_2 = \frac{(b - b_0)^2}{\gamma^2}, \qquad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = -\operatorname{tg}^2 p, \qquad \eta_3 = \sqrt{A - \left(-\frac{\sin^2 p}{\gamma^2} + \operatorname{tg}^4 p\right)},$$

$$\xi_4 = \operatorname{cth}^2 q, \qquad \eta_4 = \sqrt{A - \left(-\frac{\operatorname{ch}^2 q}{\gamma^2} + \operatorname{cth}^4 q\right)},$$

pre $\gamma$ rýdzo imaginárne

(3.16)
$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{A + (b - b_0)^2},$$

$$\xi_2 = \frac{(a - a_0)^2}{2}, \qquad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = -\operatorname{tg}^2 p, \qquad \eta_3 = \sqrt{A - \left(\frac{\sin^2 p}{\gamma^2} + \operatorname{tg}^4 p\right)},$$

$$\xi_4 = \operatorname{cth}^2 q, \qquad \eta_4 = \sqrt{A - \left(\frac{\operatorname{ch}^2 q}{\gamma^2} + \operatorname{cth}^4 q\right)},$$

**III.** Nakoniec uvažujme normálny tvar (1.3).

**a)** Stred kružnice voľme na stupnici $z_1$ ($\equiv a$). Úpravou kanonického tvaru (1.8) pre $\gamma$ reálne číslo

(3.17)
$$X(a) = e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}, \qquad Y(b) = \cos 2B,$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, \qquad \frac{T(q)}{K(q)} = \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0},$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = \cos 2P, \qquad \frac{R(q)}{K(q)} = -\operatorname{ch} 2Q.$$

Dosadením (3.17) do rovníc (2.15) dostávame zobrazovacie rovnice

$$(3.18)\qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \frac{e^{-2\mathrm{Re}\gamma z}}{2},$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - \cos 2B}, \qquad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A + \cos 2P - \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)^2}, \qquad \eta_3 = \frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0},$$

$$\xi_4 = \sqrt{A - \mathrm{ch}\, 2Q - \left(\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)^2}, \qquad \eta_4 = -\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}.$$

Obdobne pre kanonický tvar (1.9), ak $\gamma$ je rýdzo imaginárne číslo

$$(3.19)\qquad X(a) = -e^{2\mathrm{Re}\gamma z}, \qquad Y(b) = \cos 2B,$$

$$\frac{S(p)}{G(p)} = -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}, \qquad \frac{T(q)}{K(q)} = \frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0},$$

$$\frac{H(p)}{G(p)} = -\cos 2P, \qquad \frac{R(q)}{K(q)} = \mathrm{ch}\, 2Q,$$

na základe čoho dostávame zobrazovacie rovnice

$$(3.20)\qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \frac{e^{-2\mathrm{Re}\gamma z}}{2},$$

$$\xi_2 = \sqrt{A - \cos 2B}, \qquad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \sqrt{A - \cos 2P - \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)^2}, \qquad \eta_3 = \frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0},$$

$$\xi_4 = \sqrt{A + \mathrm{ch}\, 2Q - \left(\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)^2}, \qquad \eta_4 = -\frac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}.$$

**b)** Ak stred kružnice volíme na stupnici $z_2$ ($\equiv b$), pre $\gamma$ reálne dostaneme zobrazovacie rovnice

$$(3.21)\qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \sqrt{A + \cos 2B},$$

$$\xi_2 = \frac{e^{-2\mathrm{Re}\gamma z}}{2}, \qquad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}, \qquad \eta_3 = \sqrt{A - \cos 2P - \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\mathrm{Re}\gamma z_0}\right)^2},$$

$$\xi_4 = \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, \qquad \eta_4 = \sqrt{A + \operatorname{ch}^2 2Q - \left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)^2},$$

a pre $\gamma$ rýdzo imaginárne

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{A + \cos 2B}, \tag{3.22}$$

$$\xi_2 = -\frac{e^{2\operatorname{Re}\gamma z}}{2}, \quad \eta_2 = 0,$$

$$\xi_3 = -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, \qquad \eta_3 = \sqrt{A + \cos 2P - \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)^2},$$

$$\xi_4 = \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, \qquad \eta_4 = \sqrt{A - \operatorname{ch} 2Q + \left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)^2}.$$

Pomocou odvodených zobrazovacích rovníc (3.12), (3.14), (3.15), (3.16), (3.18), (3.20), (3.21) a (3.22) analogickým spôsobom ako v prípade I. sa ľahko dajú zostrojiť nomogramy pre normálne tvary (1.2) a (1.3). Výhoda týchto nomogramov s kruhovým indexom je tá, že (2.6) je obecný tvar pre nomogramy s kruhovým indexom ktorý je špeciálnym tvarom, rovnice 10-ho nomografického rádu. Teda z toho vyplýva, že pomocou nomogramov s kruhovým indexom je možné riešiť aj také rovnice, ktoré nie je možné riešiť pomocou spojnicových nomogramov. Pri tom poznamenávame, že rovnica (2.6) neobsahuje všetky tvary rovníc, ktoré sa dajú riešiť pomocou nomogramu s kruhovým indexom. Na druhej strane ich nevýhoda je tá, že sa použitím kružidla nomogramy poškodzujú a taktiež, že kruhový index udáva v niektorých častiach nomogramu veľmi nepresný priesečík s danou izopletou. Tieto ťažkosti je možné odstrániť úpravou Gersevanovho nomogramu na nomogram s priesvitkou, kde namiesto stupnice sa použijú binárne stupnice. Táto problematika tvorí samostatný celok a vyžaduje aj osobitné pojednanie, ktoré v krátkom čase mienim spracovať.

## LITERATÚRA


[1] Вильнер И. А., *О номографировании систем уравнений и аналитических функций*, Прикл. мат. и мех. *4*, в. 2 (1940), 105—116.

[2] Вильнер И. А., *Номограммы систем уравнений и аналитических функций*, ДАН *58* (1947), 729—732.

[3] Viľner I. A., *Analytical functions of a complex variable of the first nomographic class and their nomograms*, DAN *53* (1946), 187—190.

[4] Вильнер И. А., *Номографирование аналитических функций*, ДАН *63* (1948), 99—102.

[5] Вильнер И. А., *Приведение номографируемой аналитической зависимости к нормальной форме*, ДАН *69* (1949), 3—6.

[6] Вильнер И. А., *Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса*, Мат. сб. *27* (*69*) (1950), 3—46.

[7] Вильнер И. А., *Номографирование систем уравнений и аналитический функций*, Номографический сборник (1951) 125—242.

[8] Вильнер И. А., *Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография*, Сборник статей ВЗПИ, № 21, (1958) 98—118.

[9] Вильнер И. А., *О номографической апроксимации элиптических функций и номограммы в комплексных проективных плоскостях*, Сборник вычислительная математика АН СССР, № 7, (1961), 3—74.

[10] Вильнер И. А., *Бесквадратурная номография и номографирование в комлексных проективных плоскостях*, Труды I . всесоюзного мат. съезда, Ленинград, (1964), 186—194.

[11] Вильнер И. А., Галайда П., *Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и их автоморфные преобразования*, Mat.—fyz. časop. *14* (1964), 6—43.

[12] Вильнер И. А., Галайда П., *Основания анналагматической номографии*, Acta F. R. N. Univ. Comen. *15* (1967), 1—29.

[13] Galajda P., *Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej*, Aplikace matematiky *2* (1964), 131—148.

[14] Galajda P., *Nomogram pre funkcie prvej nomografickej triedy v obore komplexnej premennej*, Acta F. R. N. Univ. Comen., 2-Mathematica *9* (1964), 83—93.

[15] Galajda P., *Transformácie nomogramov analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu*, Aplikace matematiky *6* (1965), 489—503.

[16] Galajda P., *Nomogramy s rovnobežnými a kolmými indexami analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu*, Aplikace matematiky *11* (1966), 45—62.

Došlo 8. 9. 1965.

*Katedra matematiky Strojníckej fakulty*
*Vysokej školy technickej,*
*Košice*

## ЦИРКУЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Павел Галайда

Резюме

В статье опираясь на работы И. А. Вильнера и автора занимаемся применением канонических представлений для нормальных форм (1.1), (1.2) и (1.3) к построению циркульных номограмм Н. М. Герсеванова систем уравнений

$$S(p)X(a) + S(p)Y(b) + H(p) = 0,$$

$$T(q)X(a) + K(q)Y(b) + R(q) = 0.$$

Выводим формулы и уравнения, на основании которых можно строить номограммы. Для нормальной формы (1.1) на основании уравнений (3.2), (3.5) (черт. 1) и (3.7), (3.9) (черт. 2) построены номограммы. Для нормальных форм (1.2) и (1.3) при помощи выведеных формул (3.12), (3.14), (3.15), (3.16), (3.18), (3.19), (3.20) и (3.21) строятся номограммы аналогично. Эти уравнения определяют четырехшкальную номограмму из равноудаленных точек. Центр разрешающей окружности берется на шкале $a$, точка, через которую проходит окружность, — на шкале $b$, и в пересечении этой окружности со шкалами $p$ и $q$ читаем ответы.

Наряду с этими номограммами строятся и другие номограммы, где шкалы $a$ и $b$ меняются ролями.