Daniel Mayer

Poznámka k volbě prostoru v theorii elektromagnetického pole

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 5 (1955), No. 4, 228--230

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126853`

POZNÁMKA K VOLBĚ PROSTORU V THEORII ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

DANIEL MAYER, Plzeň

Všimneme si, jak se jeví různé měrové soustavy v nejběžněji v elektrodynamice používaných prostorech: v trojrozměrném prostoru a ve čtyřrozměrném prostoru Minkowského. Porovnáním obou prostorů, provedeným se zřetelem na geometrický charakter pole, totiž vyplyne, že čtyřrozměrný prostor Minkowského připouští nejen obecnější formulaci základních zákonů, než obvyklý prostor trojrozměrný, ale jeví se i mnohem přirozenějším s ohledem na použitou soustavu jednotek.

V trojrozměrném prostoru platí známá soustava Maxwellových rovnic

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathbf{H} - \zeta \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \Pi\zeta\varrho\mathbf{v} \\ div\,\mathbf{D} &= \varrho \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I.} \qquad \left.\begin{aligned} rot\,\mathbf{E} + \eta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ div\,\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{II.} \tag{1}$$

Vzhledem k různému geometrickému charakteru kovariantních vektorů **H**, **E** a kontravariantních vektorů **D**, **B**, zavedeme metriku

$$D^\beta = \varepsilon_0 \sqrt{|g_{\mu\lambda}|}\, g^{\alpha\beta} E_\alpha \qquad B^\beta = \mu_0 \sqrt{|g_{\mu\lambda}|}\, g^{\alpha\beta} H_\alpha, \tag{2}$$

kde $|g_{\mu\lambda}|$ $(\mu\lambda = 1, 2, 3)$ je determinant fundamentálního metrického tensoru $g_{\mu\lambda}$ a $g^{\mu\varepsilon}$ je tensor reciproký k tensoru $g_{\mu\varepsilon}$ (platí $g^{\mu\lambda}.\ g_{\lambda\varepsilon} = \delta^\mu_\varepsilon$, kde δ je Kroneckerův symbol), ϱ je hustota náboje, **v** je kovariantní vektor rychlosti, a velikost konstant Π, ζ, η, ε_0, $\mu_0$závisí na použité soustavě jednotek. Zavedením skalárního a vektorového potenciálu získáme známé vztahy

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}, \quad \mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}. \tag{3}$$

Lorentzův kovariantní vektor síly je:

$$\mathbf{f} = \varrho(\mathbf{E} + \eta[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]). \tag{4}$$

Z rovnice (1) plyne rovnice kontinuity

$$\varrho \operatorname{div}\mathbf{v} + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5}$$

Z rovnic (1) lze dále odvodit známou vlnovou rovnici, z níž plyne vztah mezi konstantami

$$\eta \zeta \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}\,, \tag{6}$$

který musí tyto konstanty splňovat v každé jednotkové soustavě v trojrozměrném prostoru. V různých soustavách jsou hodnoty konstant podle tab. 1. Měrové soustavy, v nichž $\Pi = 1$, jsou racionalisované.

Tabulka 1

Soustava jednotek	Π	η	ζ	ε_0	μ_0	$\varkappa$
cgses	4π	1	1	1	$1/c^2$	c
cgsem	4π	1	1	$1/c^2$	1	$1/c$
Gaussova	4π	$1/c$	$1/c$	1	1	1
Heavisideova	1	$1/c$	$1/c$	1	1	1
Giorgiho	1	1	1	$\frac{10^7 Am}{4\pi c^2 Vs}$	$\frac{4\pi Vs}{10^7 Am}$	$\frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$

Mnohem přehledněji lze tytéž vztahy vyjádřit ve čtyřrozměrném prostoru Minkowského, kde odpadá též výpočet diferenciálních operátorů, jenž bývá velmi často pracný. Maxwellovy rovnice jsou tu

$$\frac{\partial {}^*F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad \text{I.} \qquad \frac{\partial H^{\gamma\delta}}{\partial x} = \Pi \varrho v^\delta \quad \text{II.}, \tag{7}$$

kde $F_{\alpha\beta}$ a $H^{\gamma\delta}$ jsou známé pseudosymetrické tensory druhého řádu, ${}^*F^{\alpha\beta}$ je t. zv. duální tensor k $F_{\alpha\beta}$.

$${}^*F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} O & E_z & -E_y & jB_x \\ -E_z & O & E_x & jB_y \\ E_y & -E_x & O & jB_z \\ -jB_x & -jB_y & -jB_z & O \end{pmatrix}, \quad H^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} O & H^z & -H^y & -jD^x \\ -H^z & O & H^x & -jD^y \\ H^y & -H^x & O & -jD^z \\ jD^x & jD^y & jD^z & O \end{pmatrix}$$

a v relativistických případech ($v \to c$) obsahuje tensor v^δ příslušnou korekci.

Do vztahu mezi $H^{\gamma\delta}$ a $F_{\alpha\beta}$ zavedeme metriku

$$H^{\gamma\delta} = \varkappa \sqrt{|g_{\mu\lambda}|}\, g^{\gamma\alpha} g^{\delta\beta} F_{\alpha\beta}\,, \tag{8}$$

kde $\varkappa$ je konstanta závislá na měrové soustavě.

Potenciální rovnici lze vyjádřit pomocí čtyřpotenciálu

$$\Box^2 \boldsymbol{\Phi} = - \varrho \mathbf{v} \tag{9}$$

a pro hustotu pondermotorické síly platí

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial t}, \tag{10}$$

kde $T_{\alpha\beta}$ je Maxwellův tensor napětí a $\mathbf{h} = \eta^2 \boldsymbol{\varphi}$ je hustota hybnosti pole, při čemž $\boldsymbol{\varphi}$ je Poyntingův vektor.

Rovnice (7) splňují též rovnici kontinuity

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{11}$$

Vidíme tedy, že základní rovnice elektromagnetického pole jsou v Minkowského prostoru formálně značně jednodušší, zahrnujíce pouze konstantu $\varkappa$, závislou na volbě měrové soustavy, jejíž hodnoty jsou v tab. 1.

Došlo 20. IV. 1955.

LITERATURA

1. Schilt H., Phys. Acta 27 (1955), str. 67. 2. Votruba V., Muzikář Č., Theorie elektromagnetického pole ČSAV, Praha 1955.