Ernest Jucovič; Hansjoachim Walther

Über längste Kreise in flächenregulären Polyedergraphen

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 2, 164--169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126827

Matematický časopis 23 (1973), No. 2

ÜBER LÄNGSTE KREISE IN FLÄCHENREGULÄREN POLYEDERGRAPHEN

ERNEST JUCOVIČ, Košice—HANSJOACHIM WALTHER, Ilmenau

Wir betrachten im vorliegenden Aufsatz nur planare Graphen, also solche, die sich ohne Kantenüberschneidung in der Ebene zeichnen lassen. Insbesondere werden wir uns mit *Polyedergraphen* befassen, also planaren, dreifach zusammenhängenden Graphen; dabei heißt ein Graph k-fach *zusammenhängend*, wenn er nach Entfernen von $m < k$ beliebigen Knotenpunkten und den mit ihnen inzidenten Kanten noch zusammenhängend ist. Ein Kreis eines Graphen G sei eine Kantenfolge

$$K = (X_1, X_2), (X_2, X_3), \dots. (X_{n-1}, X_n), (X_n, X_1)$$

mit Kanten aus G, wobei für $i \neq j$ auch $X_i \neq X_j$ gilt. Die Länge eines Kreises ist die Anzahl der in ihm enthaltenen Kanten bezw. Knotenpunkten.

Im weiteren bezeichnen wir mit $q(G)$ die Länge eines längsten Kreises von G. Es sei $q_i(n)$ das Minimum aller $q(G)$, wenn G die Menge aller der Polyedergraphen mit n Knotenpunkten durchläuft, deren Elementarflächen sämtlich i-Ecke sind, also von Kreisen mit Länge i berandet werden. Aus der Euler'schen Polyederformel

$$e + f = k + 2 \text{ (Knoten + Flächen = Kanten + 2)} \tag{1}$$

folgt, daß es sinnvoll ist, $q_i(n)$ nur für $i = 3, 4, 5$ zu untersuchen.

J. W. Moon und L. Moser [2] bewiesen, daß

$$q_3(n) < C_1 n^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \tag{2}$$

gilt.

Wir werden zeigen, daß auch

$$q_4(n) < C_2 n^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \tag{3}$$

und

$$(4) \qquad q_5(n) < C_3 n^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$$

gilt, wobei C_1, C_2, C_3 Konstanten sind.

In [1] wurde das gegenüber (3) schwächere Resultat

$$q_4(n) \leqslant \frac{2}{3}\, n + \frac{19}{3}$$

bewiesen.

Da wir uns im weiteren auf die von J. W. Moon und L. Moser angegebene Konstruktion stützen, wollen wir diese zunächst angeben:

M_1 sei der Tetraedergraph (Fig. 1).

M_i entstehe aus M_{i-1}, indem gemäß Fig. 2 jedes Elementardreieck durch ein Tetraeder ersetzt wird.

Zunächst berechnen wir die Anzahl $f(M_i)$ der Elementarflächen von M_i: Da beim Übergang von M_{i-1} zu M_i aus jedem der Elementardreiecke drei neue entstehen, gilt

$$(5) \qquad f(M_i) = 3 \,.\, f(M_{i-1}) = \ldots = 3^{i-1} \,.\, f(M_1) = 4 \,.\, 3^{i-1}\,.$$

Für die Anzahl $n(M_i)$ der Knotenpunkte von M_i folgt aus (1), (5) und $3f = 2k$

$$(6) \qquad n(M_i) = 2 \,.\, 3^{i-1} + 2\,.$$

Nun berechnen wir die Länge $q(M_i)$ eines längsten Kreises von M_i: Wir nennen einen Knotenpunkt X von M_i als von j-ter Stufe ($j \leqslant i$), falls X ein Knotenpunkt von M_j aber nicht von M_{j-1} ist. Da ein Knotenpunkt i-ter Stufe von M_i nur mit Knotenpunkten niederer Stufe verbunden ist, liegen in einem längsten Kreis von M_i höchstens so viele Knotenpunkte i-ter Stufe wie in M_{i-1} Knotenpunkte in einem längsten Kreis liegen. Somit erhalten wir

$$(7) \qquad q(M_i) \leqq 2 \,.\, q(M_{i-1}) \leqq \ldots \leqq 2^{i-1} \,.\, q(M_1) \leqq 4 \,.\, 2^{i-1}\,.$$

Setzt man beim Übergang von M_{i-1} zu M_i die Knotenpunkte nacheinander und nicht auf einmal in die Elementarflächen ein, so erhält man ersichtlich eine Graphenfolge $\{M'_n\}$ mit der Eigenschaft, daß es zu jeder natürlichen Zahl $n \geqslant 4$ einen Graphen M'_n mit genau n Knotenpunkten gibt, für die dann aus den Beziehungen (6) und (7) die Richtigkeit von (2) folgt.

Wenden wir uns nun der Konstruktion von Polyedergraphen zu, deren sämtliche Elementarflächen Vierecke sind, und die eine Abschätzung (3) gestatten:

Sei M'_n gemäß obiger Konstruktion gegeben, wobei $P_1, \ldots, P_n$ die Knotenpunkte und $F_1, \ldots, F_{2(n-2)}$ die Elementarflächen von M'_n seien. Wir konstruieren einen Polyedergraphen $J(M'_n)$, dessen sämtliche Elementarflächen Vierecke sind, wie folgt: Die Knotenpunkte von $J(M'_n)$ seien $P_1 \dots P_n$, $F_1, \dots, F_{2(n-2)}$, und wir verbinden P_i und F_j in $J(M'_n)$ genau dann, wenn P_i in M'_n auf dem Berandungskreis von F_j liegt, weitere Kanten werden nicht eingeführt (Fig. 3 zeigt einen $J(M'_8)$; $J(G)$ wird manchmal „*radial Graph*" des Graphen G genannt, vgl. Ore [3; S. 45]). Da in $J(M'_n)$ die F_j nur zu Knotenpunkten P_i benachbart sind, liegen in einem längsten Kreis von $J(M'_n)$ höchstens so viele Knotenpunkte F_j als in ihm Knotenpunkte P_i liegen. Man überzeugt sich aber unschwer davon, daß in einem längsten Kreis von $J(M'_n)$

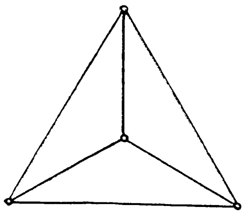

Fig. 1

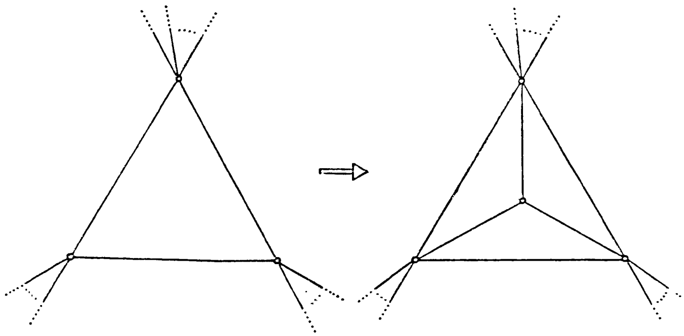

Fig. 2

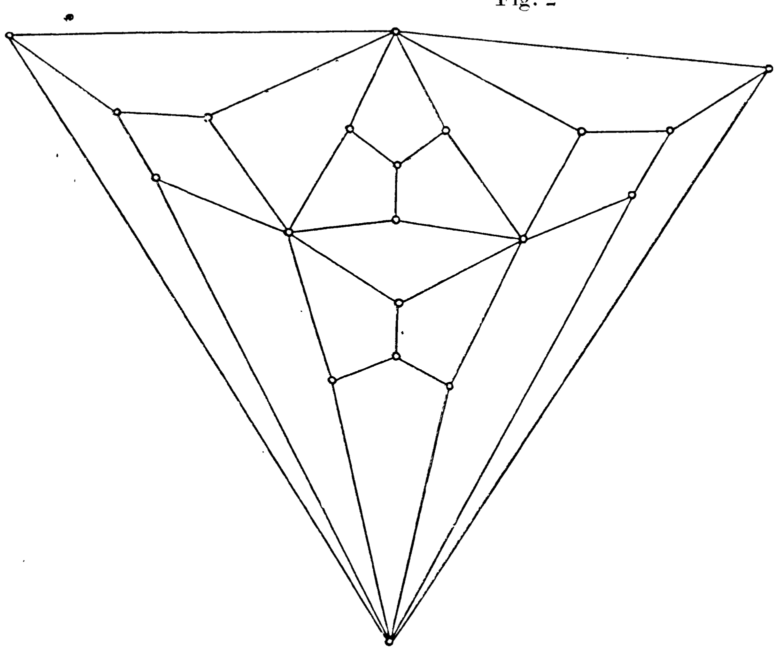

Fig. 3

höchstens so viele Knotenpunkte P_i liegen, wie Knotenpunkte in einem längsten Kreis von M_n' liegen.

Mittels der Beziehungen (6, 7) erhält man die Abschätzung (3).

Nun ist noch ein kleiner Mangel zu beheben, da für die Knotenpunktanzahl N von $J(M_n')$ die Beziehung

$$N = n + 2(n - 2) \equiv 2 \text{ (modulo 3)}$$

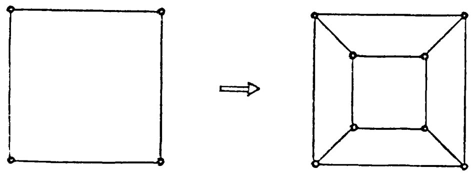

Fig. 4

gilt, es also nicht zu jeder natürlichen Zahl $N \geqq 8$ einen Graphen $J(M_n')$ mit genau N Knotenpunkten gibt. Diesem geringfügigen Mangel kann dadurch abgeholfen werden, daß man ein bzw. zwei elementare Vierecke von $J(M_m')$ gemäß Fig. 4 durch einen „Würfelgraphen" ersetzt.

Kommen wir nun zur Konstruktion von Polyedergraphen, deren sämtliche Elementarflächen Fünfecke sind, und die eine Abschätzung (4) erlauben:

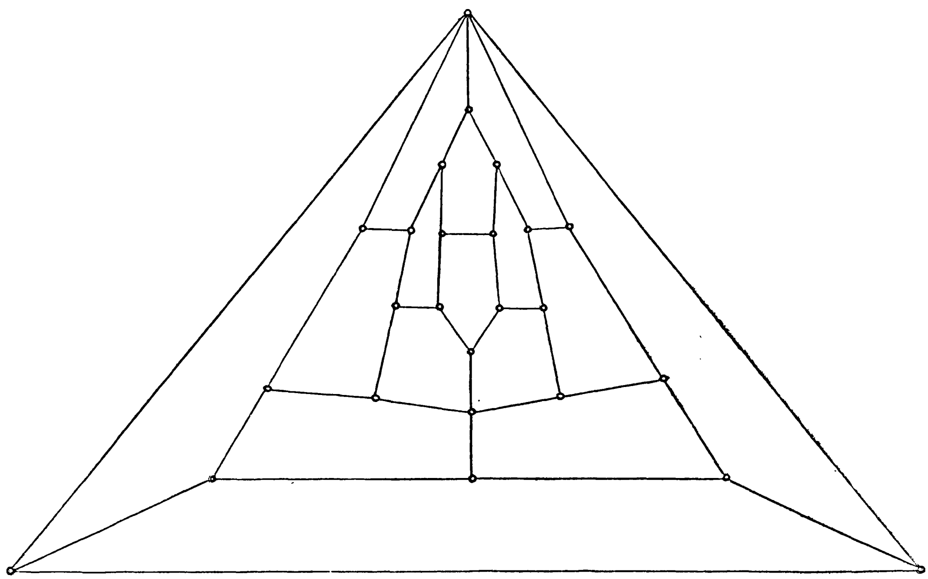

Fig. 5

Zunächst zeigen wir, daß für die Anzahl e der Knotenpunkte solcher Polyedergraphen die Beziehung

(8) $$e \equiv 2 \text{ (modulo 3)}$$

gilt;
denn es gilt (1) und

(9) $$5f = 2k,$$

da alle Elementarflächen Fünfecke sind,
sowie

(10) $$f \equiv 0 \text{ (modulo 2)},$$

da die Anzahl der Elementarflächen mit ungerader Länge des Berandungskreises stets gerade ist.

Aus diesen drei Beziehungen aber ergibt sich unmittelbar die Behauptung (8).

Bei der Konstruktion gehen wir wieder von den Graphen M'_n aus. Der Graph F_n entstehe aus M'_n, indem jedes Elementardreieck (d. h. jede Elementarfläche) durch einen Graphen der Fig. 5 ersetzt wird.

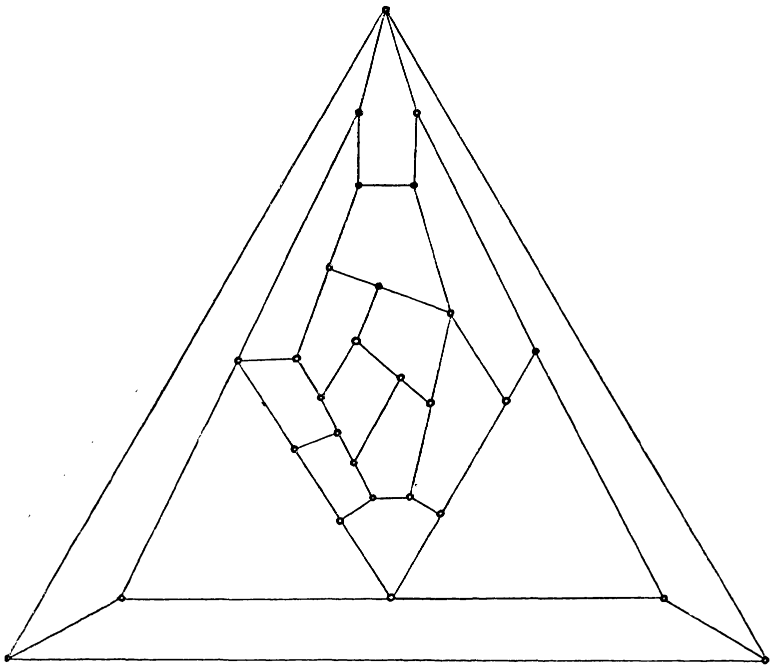

Fig. 6

Ersichtlich sind in F_n alle Elementarflächen Fünfecke, da jede Elementarfläche des Graphen von Fig. 5 mit Ausnahme einer (welche gerade ein Dreieck ist) ein Fünfeck ist.

Zunächst berechnen wir die Knotenpunktanzahl $n(F_n)$ des Polyedergraphen F_n:

Da M_n' gemäß obiger Konstruktion n Knotenpunkte und $2(n-2)$ Elementarflächen besitzt, gilt

$$n(F_n) = n + 22 \,.\, 2(n-2) = 45n - 88\,, \tag{11}$$

denn alle Knotenpunkte von M_n' sind auch welche von F_n, aber es entstehen auch aus jeder Elementarfläche von M_n' genau 22 neue Knotenpunkte.

Mit ähnlichen Überlegungen wie bei den vorigen Konstruktionen sieht man nun, daß in einem längsten Kreis von F_n nur dann Knotenpunkte aus Graphen der Figur 5 liegen, sofern in dem ihm entsprechenden längsten Kreis von M_n' mindestens zwei Knotenpunkte des Elementardreiecks liegen, in das der Graph der Fig. 5 eingesetzt wurde. Eine Abschätzung (4) ergibt sich ähnlich den früheren Überlegungen.

Auch bei dieser Konstruktion tritt zunächst noch der Mangel auf, daß es nicht zu jeder natürlichen Zahl N mit $N \equiv 2$ (modulo 3) einen Graphen F_N mit genau N Knotenpunkten gibt, der eine Abschätzung (4) erlaubt. Diesem Mangel kann dadurch abgeholfen werden, daß man nicht in alle Elementarflächen von M_n' Graphen der Figur 5 einsetzt, sondern in einige auch solche der Fig. 6, welche ja pro Elementarfläche 25 neue Knotenpunkte erbringen. Aus geeigneter Kombination dieser beiden Graphen beim Einsetzen kann man für genügend großes N mit $N \equiv 2$ (modulo 3) auch einen Graphen F_N' mit genau N Knotenpunkten angeben, dessen Elementarflächen sämtlich Fünfecke sind, und für die eine Abschätzung (4) gilt.

Damit haben wir die eingangs gestellten Aufgaben gelöst.

LITERATUR

[1] JUCOVIČ, E.: Poznámka o cestách v štvoruholníkových polyédrických grafoch. Časop. pěstov. mat. *93* (1968), 69–72.

[2] MOON, J. W., MOSER, L.: Simple paths on polyhedra. Pacif. J. Math. *13* (1963), 629–631.

[3] ORE, O.: The four-color problem. Academic Press, New York, 1967.

Eingegangen am 27. 12. 1971

Prírodovedecká fakulta UPJŠ
Košice
ČSSR

Technische Hochschule
63 Ilmenau
DDR