Pavel Galajda

Единственность анаморфозы функций в невырожденном случае

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 2, 106--114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126825

Matematický časopis 23 (1973), No. 2

ЕДИНСТВЕННОСТЬ АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА, Кошице

В настоящей работе мы используем результаты и обозначения статьи [1] и докажем единственность анаморфозы невырожденных функций с точностью до коллинеации всего пространства.

Сначала рассмотрим форму записи вектора шкал z_1, z_2, которая применима для выражения условий их прямолинейности и для выражения бинарной и тернарной симметрии.

Вводя векторы $\bar{\alpha}$, мы можем согласно (3.1), (3.2), (3.3) или согласно (3.10)*) записать

(1) $$\underset{(i)}{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \underset{(i)}{\alpha_1} \\ \underset{(i)}{\alpha_2} \\ \underset{(i)}{\alpha_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \underset{(j)}{A_{31}} \\ \underset{(j)}{A_{32}} \\ \underset{(j)}{A_{33}} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ j = 2, 1$$

(2) $$\underset{3}{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \underset{3}{\alpha_1} \\ \underset{3}{\alpha_2} \\ \underset{3}{\alpha_3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \underset{3}{A_{12}} \\ \underset{3}{A_{13}} \\ \underset{3}{A_{14}} \end{pmatrix},$$

где определители $\underset{(i)}{A}$ даны левыми частями равенств (2.5) и (2.6)**). Определитель $\underset{3}{A}$ дан левой частью равенства (2.1).

В случае функции F, заданной в билинейной форме (9.8), все проекции вектора (2) согласно (9.14) имеют общим множителем определитель матрицы

*) Здесь, как и всюду в дальнейшем ссылки следует понимать на работу [1].

**) Для упрощения записи мы ниже опускаем в матрицах и определителях $\underset{3}{A}^{z_3}$ верхний значок z_3 и снизу «3», т. е. пишем просто A.

$$(3) \qquad \|\mathbf{C}\| = \left\| \begin{matrix} \xi_{1^1 2^1} & h_{1^1 2^1} & \nu_{1^1 2^1} \\ \xi_{1^2 2^2} & h_{1^2 2^2} & \nu_{1^2 2^2} \\ \xi_{1^3 2^3} & h_{1^3 2^3} & \nu_{1^3 2^3} \end{matrix} \right\|$$

Таким образом, мы можем вектор $\underset{3}{\bar{\alpha}}$ в случае (9.8) записать так (см. (2)).

$$(4) \qquad \underset{3}{\bar{\alpha}} = |\mathbf{C}| \left\{ \begin{matrix} \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_3 & \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_3 & \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_3 & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^1} & \psi_3 & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^1} & \delta_3 & \delta_{3^3} \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} & \varphi_3 \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} & \psi_3 \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} & \delta_3 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\} = |\mathbf{C}|\, \underset{3}{\bar{\tilde{\alpha}}},$$

причем в случае, если данная зависимость (9.8) вырожденная, т. е. вида (9.5), то δ_{3^1}, δ_{3^2}, δ_{3^3} — произвольные постоянные, а δ_3 равно нулю. Возьмем (см. (9.9), (9.10), (9.11)) матрицу

$$(5) \qquad \|\mathbf{A}\| \equiv \left\| \begin{matrix} \varphi_{3^1} & \varphi_{3^2} & \varphi_{3^3} \\ \psi_{3^1} & \psi_{3^2} & \psi_{3^3} \\ \delta_{3^1} & \delta_{3^2} & \delta_{3^3} \end{matrix} \right\|$$

и условимся ее определитель обозначать через $\mathbf{A}$. Тогда в силу (1), (9.12), (9.13) имеем, что (матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\underset{(1)}{\mathbf{A}}$, $\underset{(2)}{\mathbf{A}}$, $\underset{(1)}{\tilde{\mathbf{A}}}$, $\underset{(2)}{\tilde{\mathbf{A}}}$ и соотношения между ними для общей зависимости вида (9.8), т. е. при произвольной функции δ_3 (что предполагается и здесь) введены были равенствами (9.9), (9.10), (9.11) при матричном толковании этих равенств):

$$(6) \qquad \underset{1}{\bar{\alpha}} \equiv \begin{pmatrix} \underset{(2)}{\tilde{A}_{31}} A_{11} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{32}} A_{21} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{33}} A_{31} \\ \underset{(2)}{\tilde{A}_{31}} A_{12} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{32}} A_{22} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{33}} A_{32} \\ \underset{(2)}{\tilde{A}_{31}} A_{13} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{32}} A_{23} + \underset{(2)}{\tilde{A}_{33}} A_{33} \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} \underset{(2)}{\tilde{A}_{31}} \\ \underset{(2)}{\tilde{A}_{32}} \\ \underset{(2)}{\tilde{A}_{33}} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\, \|\mathbf{A}\|^{-1} \underset{1}{\bar{\tilde{\alpha}}}$$

$$(7)\qquad \bar{\underset{2}{\alpha}} = \begin{pmatrix} \underset{(1)}{\tilde{A}_{31}} A_{11} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{32}} A_{21} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{33}} A_{31} \\ \underset{(1)}{\tilde{A}_{31}} A_{12} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{32}} A_{22} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{33}} A_{32} \\ \underset{(1)}{\tilde{A}_{31}} A_{13} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{32}} A_{23} + \underset{(1)}{\tilde{A}_{33}} A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} \underset{(1)}{\tilde{A}_{31}} \\ \underset{(1)}{\tilde{A}_{32}} \\ \underset{(1)}{\tilde{A}_{33}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\ |\mathbf{A}|^{-1} \bar{\bar{\underset{2}{\alpha}}},$$

где через $\underset{1}{\tilde{\alpha}}$, $\underset{2}{\tilde{\alpha}}$ мы обозначили векторы, проекции которых выписаны столбцами в равенствах (6), (7).

Итак, в силу (1), (6), (7) имеем

$$(8)\qquad \underset{1}{\bar{\alpha}} = A\ \|A\|^{-1} \underset{1}{\tilde{\alpha}}, \quad \underset{2}{\bar{\alpha}} = A\ \|A\|^{-1} \underset{2}{\tilde{\alpha}}.$$

Такая форма записи вектора шкал удобна для выражения условий их прямолинейности. Вместо того, чтобы выражать условия прямолинейности шкалы z_1 (z_2) по вектору $\underset{1}{\bar{\alpha}}(\underset{2}{\bar{\alpha}})$, мы можем сделать это с помощью более простого вектора $\underset{1}{\bar{\bar{\alpha}}}(\underset{2}{\bar{\bar{\alpha}}})$.

Получаем соответственно условия определяемости шкал z_1 и z_2

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \underset{(2)}{\tilde{A}_{31}} & \underset{(2)}{\tilde{A}_{32}} & \underset{(2)}{\tilde{A}_{33}} \\ \underset{(2)}{(\tilde{A}_{31})_{z_1}} & \underset{(2)}{(\tilde{A}_{32})_{z_1}} & \underset{(2)}{(\tilde{A}_{33})_{z_1}} \\ \underset{(2)}{(\tilde{A}_{31})_{z_1^2}} & \underset{(2)}{(\tilde{A}_{32})_{z_1^2}} & \underset{(2)}{(\tilde{A}_{33})_{z_1^2}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \underset{(1)}{\tilde{A}_{31}} & \underset{(1)}{\tilde{A}_{32}} & \underset{(1)}{\tilde{A}_{33}} \\ \underset{(1)}{(\tilde{A}_{31})_{z_2}} & \underset{(1)}{(\tilde{A}_{32})_{z_2}} & \underset{(1)}{(\tilde{A}_{33})_{z_2}} \\ \underset{(1)}{(\tilde{A}_{31})_{z_2^2}} & \underset{(1)}{(\tilde{A}_{32})_{z_2^2}} & \underset{(1)}{(\tilde{A}_{33})_{z_2^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Другое применение этих формул — это простое сравнительно выражение условий бинарной и тернарной симметрии. Так бинарная симметрия обеспечена, если

$$(10)\qquad \frac{\underset{(1)}{\tilde{A}_{31}}}{\underset{(2)}{\tilde{A}_{31}}} = \frac{\underset{(1)}{\tilde{A}_{32}}}{\underset{(2)}{\tilde{A}_{32}}} = \frac{\underset{(1)}{\tilde{A}_{33}}}{\underset{(2)}{\tilde{A}_{33}}}.$$

Используя выражение вектора $\underset{3}{\bar{\alpha}}$, из (14) и т. д., легко напишем условия тернарной симметрии.

Прежде, чем решать наш основной вопрос о единственности анаморфозы невырожденной функции (9.8), напомним хорошо известное из теории билинейных форм (рассматриваемых как скалярное произведение двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$) свойство

$$A\bar{x} \,.\, \bar{y} = \bar{x} \,.\, A'\bar{y} \,, \tag{11}$$

где A — аффинор, а A' — ему сопряженный. Заметим, что билинейная форма данного ранга (длины) неоднозначна, т. е. векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ допускают линейное преобразование

$$\bar{x}' = P\bar{x}, \quad \bar{y}' = Q\bar{y} \tag{12}$$

$$\bar{x}'\bar{y}' = P\bar{x} \,.\, Q\bar{y} = \bar{x} \,.\, P'Q\bar{y} \,, \tag{13}$$

если

$$P'Q = 1, \quad Q = P'^{-1}, \tag{14}$$

т. е.

$$\bar{x}\bar{y} = P\bar{x} \,.\, P'^{-1}\bar{y} = P'^{-1}\bar{x} \,.\, P\bar{y} \,, \tag{15}$$

где P — произвольный аффинор.

Решение проблемы анаморфозы функций заключалось в невырожденном случае в представлении функции F в виде билинейной формы (1.1). Теперь мы можем переписать (1.1) в более общем виде

$$F = P'^{-1}\underset{3}{\bar{a}} \,.\, P\bar{b} \,. \tag{16}$$

Докажем теперь следующие теоремы

Теорема 1. *Если существует представление* (1.2), *где направления вектор — функций* $\bar{a}'$ *зависят только от* z_i ($i = 1, 2$), *то будет вектор — функция* $P\bar{b}$ *допускать при любот* P *представление вида* (1.2)

$$P\bar{b} = [\underset{1}{\bar{a}'}\underset{2}{a'}] \,. \tag{17}$$

Для доказательства этой теоремы используем некоторые изложенные детерминантные тождества и следующую лемму.

Лемма. *Для* N — *мерного линейного евклидова пространства имеет место векторное тождество:*

$$[A\underset{1}{\bar{\alpha}}A\underset{2}{\bar{\alpha}} \ldots A\underset{N-1}{\bar{\alpha}}] = |A|\, A'^{-1}[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}} \ldots \underset{N-1}{\bar{\alpha}}] \,. \tag{18}$$

где A — невырождающийся аффинор N — мерного пространства, $\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}, \ldots, \underset{N-1}{\bar{\alpha}}$ — векторы N — мерного пространства, $|A|$ — определитель аффинора A, и A'^{-1} есть обратно сопряженный аффинор к аффинору A.

Тождество (18) важно и в пользовании слева направо, и справа — налево [2].

Доказательство этого небезинтересного соотношения (18) вытекает из теоремы разложения квадратной матрицы в произведение эрмитовой с неотрицательными собственными значениями D и унитарной матрицы U (в любом порядке). Соответственно этому каждую вещественную квадратную матрицу A можно в желаемом порядке сомножителей представить в виде произведения однозначно определяемой в каждом из двух возможных порядков следования сомножителей симметрической матрицы с неотрицательными собственными значениями и ортогональной вещественной матрицы. Докажем (18) при $N = 3$.

Полагая

$$A'^{-1} = B, \quad A = B'^{-1}, \quad |A| = \frac{1}{|B|}, \tag{19}$$

получим

$$B[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}} \ldots \underset{N-1}{\bar{\alpha}}] = \frac{1}{|B|}[B'^{-1}\underset{1}{\bar{\alpha}}B'^{-1}\underset{2}{\bar{\alpha}} \ldots B'^{-1}\underset{N-1}{\bar{\alpha}}], \tag{20}$$

где B — невырождающийся N — мерный аффинор в N — мерном евклидовом пространстве.

Нам здесь понадобятся равносильные тождества (18), (20) в частном случае $N = 3$ (в общем виде оно требуется в теории N — мерной анаморфозы), когда тождества (18) и (20), имеющие вид

$$[A\underset{1}{\bar{\alpha}}A\underset{2}{\bar{\alpha}}] = |A|\, A'^{-1}[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}], \tag{21}$$

$$B[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}] = \frac{1}{|B|}[B'^{-1}\underset{1}{\bar{\alpha}}B'^{-1}\underset{2}{\bar{\alpha}}], \tag{22}$$

можно проверить прямым вычислением обеих частей, скажем, равнества (21), в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Но проще, разумеется, воспользоваться упомянутой теоремой разложения, взяв в качестве ортонормированного репера полную систему единичных собственных векторов симметричного аффинора D.

Тогда, если

$$(23) \qquad \underset{1}{\bar{\alpha}} = \underset{1}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{i}} + \underset{1}{\alpha_2}\bar{\boldsymbol{j}} + \underset{1}{\alpha_3}\bar{\boldsymbol{k}}, \qquad \underset{2}{\bar{\alpha}} = \underset{2}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{i}} + \underset{2}{\alpha_2}\bar{\boldsymbol{j}} + \underset{2}{\alpha_3}\bar{\boldsymbol{k}},$$

и собственные значения A, соответствующие собственным векторам $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{k}}$ суть λ, μ, ν, то, полагая

$$(24) \qquad A = U \,.\, D,$$

в силу свойства собственной или несобственной ортогональной матрицы U получим, что

$$(25) \qquad [UD\underset{1}{\bar{\alpha}}\; UD\underset{2}{\bar{\alpha}}] = \pm U[D\underset{1}{\bar{\alpha}}\; D\underset{2}{\bar{\alpha}}] =$$

$$= \pm U[\lambda\underset{1}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{i}} + \mu\underset{1}{\alpha_2}\bar{\boldsymbol{j}} + \nu\underset{1}{\alpha_3}\bar{\boldsymbol{k}} \quad \lambda\underset{2}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{i}} + \mu\underset{2}{\alpha_2}\bar{\boldsymbol{j}} + \nu\underset{2}{\alpha_3}\bar{\boldsymbol{k}}] =$$

$$= \pm U \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{i}} & \bar{\boldsymbol{j}} & \bar{\boldsymbol{k}} \\ \lambda\underset{1}{\alpha_1} & \mu\underset{1}{\alpha_2} & \nu\underset{1}{\alpha_3} \\ \lambda\underset{2}{\alpha_1} & \mu\underset{2}{\alpha_2} & \nu\underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} = \pm U \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} \\ \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} \\ \lambda\nu \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_2} \\ \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_2} \end{vmatrix} \\ \lambda\mu \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\},$$

где плюс, минус относится к собственному и несобственному ортогональным преобразованиям U. Справа в (21) будем иметь

$$(26) \qquad |A|\, A'^{-1}[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}] = \pm\lambda\mu\nu(UD)'^{-1}[\underset{1}{\alpha}\underset{2}{\alpha}] = \pm\lambda\mu\nu(D'U')^{-1}[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}] =$$

$$= \lambda\mu\nu U'^{-1}D'^{-1}[\underset{1}{\bar{\alpha}}\underset{2}{\bar{\alpha}}] = \pm\lambda\mu\nu U'^{-1} \begin{Vmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\nu} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{i}} & \bar{\boldsymbol{j}} & \bar{\boldsymbol{k}} \\ \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm U'^{-1}\begin{Vmatrix} \mu\nu\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} \\ \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} \\ \\ \lambda\nu\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_1} \\ \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_1} \end{vmatrix} \\ \\ \lambda\mu\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \pm U'^{-1}\begin{Vmatrix} \lambda\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} \\ \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} \\ \\ \mu\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_1} \\ \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_1} \end{vmatrix} \\ \\ \nu\begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} \end{vmatrix} \end{Vmatrix},$$

где плюс, минус опять — таки относится к собственному и несобственному ортогональным преобразованиям.

Вспомнив теперь определение собственного и несобственного ортогональных преобразований как удовлетворяющих аффинорному уравнению

$$U = U'^{-1} \tag{27}$$

мы убеждаемся в тождестве левой и правой частей равенства (21), а значит, и (22). На этом мы полностью закончили доказательство нашей леммы в случае $N = 3$ и вещественного евклидова пространства. Она, очевидно, справедлива и в N — мерном комплексном пространстве.

Доказательство теоремы 1

Применим теперь доказанное тождество (22) к левой части равенства (17), чтобы найти $\underset{1}{\bar a}'$ и $\underset{2}{\bar a}'$ и их связь с $\underset{1}{\bar a}$ и $\underset{2}{\bar a}$ из равенства (1.2), по предположению удовлетворяющегося.

Получим

$$P\bar b = P[\underset{1}{\bar a}\underset{2}{\bar a}] = \frac{1}{|P|}\,[P'^{-1}\underset{1}{\bar a}P'^{-1}\underset{2}{a}]\,. \tag{28}$$

Итак, поскольку множители, не влияющие на направления векторов, роли не играют, то можно принять, что

$$\underset{1}{a}' = P'^{-1}\underset{1}{a}\,, \quad \underset{2}{\bar a}' = P'^{-1}\underset{2}{a}\,. \tag{29}$$

т. е., если задача (1.2) разрешима, то и задача (17) разрешима.

Теорема 2. *Пусть существует представление функции в виде билинейной формы* (1.1). *Тогда проблема анаморфозы функций в невырожденном случае имеет единственное решение с точностью до коллинеации всего пространства.*

В силу (16) и (28), получаем

$$F = \frac{1}{|P|}\,(P'^{-1}\underset{3}{\bar{a}}[P'^{-1}\underset{1}{a}P'^{-1}\underset{2}{\bar{a}}]) \tag{30}$$

или

$$F = \sigma(P'^{-1}\underset{1}{\bar{a}}P'^{-1}\underset{2}{\bar{a}}P'^{-1}\underset{3}{\bar{a}}). \tag{31}$$

Итак, наряду с полученным в § 2 работы [1] представлением Массо

$$F = (\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}\underset{3}{\bar{a}}) \tag{32}$$

существует еще представление (31) при произвольной матрице P. Полагая

$$P'^{-1} = \Pi \equiv \|a_{\alpha\beta}\|, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{33}$$

где Π — произвольная невырождающаяся матрица, как и P, получим, что

$$F = \sigma(\Pi\underset{1}{\bar{a}}\Pi\underset{2}{\bar{a}}\Pi\underset{3}{\bar{a}}) \tag{34}$$

Но в этом смешанном произведении

$$\Pi\underset{i}{\bar{a}} = \Pi\begin{pmatrix} \underset{i}{a_1} \\ \underset{i}{a_2} \\ \underset{i}{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\underset{i}{a_1} + a_{12}\underset{i}{a_2} + a_{13}\underset{i}{a_3} \\ a_{21}\underset{i}{a_1} + a_{22}\underset{i}{a_2} + a_{23}\underset{i}{a_3} \\ a_{31}\underset{i}{a_1} + a_{32}\underset{i}{a_2} + a_{33}\underset{i}{a_3} \end{pmatrix} \tag{35}$$

означает проективное преобразование всего пространства однородных координат точек шкал z_i ($i = 1, 2, 3$), даваемых проекциями векторов $\underset{1}{\bar{a}}, \underset{2}{\bar{a}}, \underset{3}{\bar{a}}$.

Преобразуя правую часть (34), согласно (21), (11), (32), получим последовательно

$$F = \sigma([\Pi\underset{1}{\bar{a}}\Pi\underset{2}{\bar{a}}]\Pi\underset{3}{\bar{a}}) = \sigma|\Pi|\,(\Pi'^{-1}[\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}]\Pi\underset{3}{\bar{a}}) = \tag{36}$$

$$= \sigma|\Pi|\,(\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}\underset{3}{\bar{a}}) = \sigma|\Pi|F\,.$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{1}{|\Pi|}. \tag{37}$$

Тем самым (см. (1.29)) доказано, что проблема анаморфозы функций в невырожденном случае имеет единственное решение с точностью до коллинеации всего пространства.

Замечание 1. Что касается вырожденного случая (9.5), то поскольку при каждом выборе допустимой функции ν_{12} и функции δ_3 с помощью ее определения (9.17) мы превращаем случай вырождения в обычный, для каждого выбранного допустимого ν_{12} уже анаморфоза однозначна с точностью до коллинеации всего пространства, т. к. выбор произвольных постоянных δ_{3^1}, δ_{3^2}, δ_{3^3} и функции δ_3 влияет лишь проективным преобразованием номограммы, как это видно из формул (3.34), (3.35), (3.36), если в них положить $\delta_3 = 0$. Это особенно видно на частных случаях (9.65) и (9.73)—(9.75), если составить определитель Массо из координат x_j^i $(i, j = 1,2\ , 3)$.

Замечание 2. Что касается анаморфизирующегося множителя, то найдено его общее выражение в (3.13).

ЛИТЕРАТУРА

[1] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурная номография. Алгебраическая номография и проблема анаморфозы функций в двухмерной плоскости при $n = 6$ переменных I, II, Mat. časop. *17*, 1967, 169—205, 266—281.

[2] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурная номография и номографирование в комплексных проективных плоскостях. Труды четвертого Всесоюзного Математического Съезда изд. «Наука», Ленинград (1964), 186—194.

Поступило 4. 1. 1970.

Katedra matematiky
a výpočtovej techniky
Elektrotechnickej fakulty
Vysokej školy technickej
Košice