Mária Jakubíková

Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 1, 3--8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126804`

Matematický časopis 21 (1971), No. 1

KONVEXE GERICHTETE UNTERGRUPPEN DER RIESZSCHEN GRUPPEN

MÁRIA JAKUBÍKOVÁ, Košice

Das System aller konvexen l-Untergruppen einer Verbandsgruppe bildet bekanntlich einen distributiven Verband (vgl. [5], [4], [6]). Diese Behauptung kann für die Rieszschen Gruppen verallgemeinert werden. Wir beweisen, dass das System aller konvexen gerichteten Untergruppen einer Rieszschen Gruppe ein distributiver Verband ist. Aus diesem Satz folgen als Sonderfälle einige Ergebnisse von L. Fuchs [3] und P. Conrad [2].

Für die halbgeordnete Mengen und halbgeordnete Gruppen benutzen wir die Bezeichnungen nach [1].

Definition 1. *Eine halbgeordnete Gruppe G heisst Rieszsche Gruppe, wenn sie gerichtet ist und die folgende Bedingung (r) erfüllt:*

(r) *Aus $a_i, b_j \in G$, $a_i \leqq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ folgt, dass es ein Element $c \in G$ gibt mit der Eigenschaft $a_i \leqq c \leqq b_j$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$.*

Es ist leicht zu zeigen, dass jede Verbandsgruppe zugleich eine Rieszsche Gruppe ist.

Hilfssatz 2. ([3], Kap. V, Satz 27.) *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *G ist eine Rieszsche Gruppe.*

(b) *G ist gerichtet und aus $a, b_1, \ldots, b_m \in G$,*

$$0 \leqq a \leqq b_1 + \ldots + b_m, \quad 0 \leqq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

folgt, dass es Elemente $a_i \in G$ $(i = 1, \ldots, m)$ gibt, so dass

$$a = a_1 + \ldots + a_m, \quad 0 \leqq a_i \leqq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

gilt.

Es sei G eine Rieszsche Gruppe. Bezeichnen wir mit $\mathscr{G}$ das System aller konvexen Untergruppen von G und $\mathscr{K}$ sei das System aller konvexen gerichteten Untergruppen von G. (Eine Teilmenge $X \subset G$ heisst konvex, wenn jedes Element $g \in G$, das die Beziehung $x_1 \leqq g \leqq x_2$ mit $x_1, x_2 \in X$ erfüllt, auch zu X gehört.) Die Systeme $\mathscr{G}$ und $\mathscr{K}$ sind durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnet.

Hilfssatz 3. *Eine konvexe Untergruppe H einer Verbandsgruppe G ist genau dann gerichtet, wenn sie eine l-Untergruppe von G ist.*

Beweis. Wenn H eine l-Untergruppe von G ist, dann ist G verbandsgeordnet, also ist G gerichtet. Es sei M eine konvexe gerichtete Untergruppe einer Verbandsgruppe $G, h \in H$. Dann gibt es $h_1 \in H$, so dass $0 \leqq h_1, h \leqq h_1$, also (da M konvex ist) $0 \vee h \in H$. Daraus folgt schon, dass H eine l-Untergruppe von G ist.

Es ist bekannt, dass $\mathscr{G}$ ein vollständiger Verband ist. Wenn $\{A_i\} \subset \mathscr{G}$, bezeichnen wir mit $\bigvee (\mathscr{G})\, \{A_i\}$ und $\bigwedge (\mathscr{G})\, \{A_i\}$ die verbandstheoretischen Operationen in $\mathscr{G}$. Es gilt

$$\bigwedge (\mathscr{G})\, \{A_i\} = \cap A_i$$

und $\bigvee (\mathscr{G})\, \{A_i\}$ ist die durch die Menge $\cup A_i$ erzeugte Untergruppe von G.

Hilfssatz 4. *Es sei $\{A_i\} \subset \mathscr{K}$, $x \in \bigvee (\mathscr{G})\, \{A_i\}$, $x > 0$. Dann gibt es Untergruppen $A_1, \ldots, A_n \in \{A_i\}$ und Elemente $a_i \in A_i$, $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so dass $x = a_1 + \ldots + a_n$.*

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es Untergruppen $A_1, \ldots, A_m \in \{A_i\}$ und Elemente $b_j \in A_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ so dass $x = b_1 + \ldots + b_m$. Da die Gruppen A_j gerichtet sind, gibt es Elemente $c_j \in A_j$ mit $0 \leqq c_j$, $b_j \leqq c_j$. Es gilt also $0 < x \leqq c_1 + \ldots + c_m$, und daher nach Hilfssatz 2 $x = a_1 + \ldots + a_m$, $0 \leqq a_j \leqq c_j$. Aus der Konvexität von A_j folgt $a_j \in A_j$. Jetzt genügt es die eventuellen Elemente $a_j = 0$ wegzulassen; aus $x \neq 0$ folgt, dass nicht alle a_j gleich 0 sein können.

Hilfssatz 5. *Es sei $\{A_i\} \subset \mathscr{K}$. Dann gilt $\bigvee (\mathscr{G})\, \{A_i\} \in \mathscr{K}$.*

Beweis. Setzen wir $\bigvee (\mathscr{G})\, \{A_i\} = B$ und es sei $b \in B$, $z \in G$, $0 \leqq z \leqq b$. Nach Hilfssatz 4 gibt es Gruppen $A_1, \ldots, A_n \in \{A_i\}$ und Elemente $a_j \in A_j$, $a_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ so dass $b = a_1 + \ldots + a_n$ gilt. Nach dem Hilfssatz 2 existieren dann Elemente $z_j \in G$, $0 \leqq z_j \leqq a_j$ mit $z = z_1 + \ldots + z_n$. Aus der Konvexität von A_j bekommen wir $z_j \in A_j$, also $z \in B$. Daraus folgt, dass B konvex ist. Es sei $c \in B$, also $c = c_1 + \ldots + c_n, c_j \in A_j \in \{A_i\}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Da A_j gerichtet sind, gibt es Elemente $d_j \in A_j$ mit $0 \leqq d_j$, $c_j \leqq d_j$. Dann haben wir $0 \leqq d = d_1 + \ldots + d_n \in B$, $c \leqq d$ und daher ist B eine gerichtete Gruppe.

Hilfssatz 6. *Es sei $A, B \in \mathscr{K}$. Dann ist $A \cap B \in \mathscr{K}$.*

Beweis. Da A, B konvexe Untergruppen von G sind, ist auch $A \cap B$ eine konvexe Untergruppe von G. Es sei $c \in A \cap B$. Dann gibt es Elemente $a \in A, b \in B$ mit $0 \leqq a, c \leqq a, 0 \leqq b, c \leqq b$. Aus der Definition einer Rieszschen

Gruppe folgt dann, dass es ein Element $d \in G$ gibt, der die Beziehungen $0 \leqq d \leqq a$, $c \leqq d \leqq b$ erfüllt. Daher ist $d \in A \cap B$ und $A \cap B$ ist also eine gerichtete Gruppe.

Bemerkung 6.1. Wenn G eine gerichtete Gruppe ist und A, B gerichtete konvexe Untergruppen von G sind, dann braucht $A \cap B$ im allgemeinen keine gerichtete Menge zu sein. Beispiel: Es sei G die Menge aller Elemente $(x, y, z) \in E \times E \times E$, wobei E die Menge aller reellen Zahlen ist. Wir definieren in G die Operation $+$ komponentenweise. Die Halbordnung in G wird folgendermassen erklärt: wir setzen $(x_1, y_1, z_1) < (x_2, y_2, z_2)$, wenn entweder $x_1 < x_2, y_1 \leqq y_2$, oder $x_1 \leqq x_2, y_1 < y_2$ gilt. Dann ist G eine gerichtete Gruppe. Es sei A (B) die Menge aller $(x, y, z) \in G$ mit $y = 0$ $(x = 0)$. A und B sind konvexe gerichtete Untergruppen von G. Ihr Durchschnitt ist die Menge aller Elemente der Form $(0, 0, z)$ $(z \in E)$; diese Menge ist nicht gerichtet.

Bemerkung 6.2. Wenn G eine Rieszsche Gruppe ist und $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}$, dann braucht die Gruppe $\cap A_i$ nicht gerichtet zu sein, also sie braucht nicht zu $\mathscr{K}$ gehören. Beispiel: Es sei F das System aller auf dem Intervall $X = (\quad \infty, \infty)$ definierten Funktionen, deren jede nur in einer endlichen Anzahl von Punkten $x \in X$ ungleich Null ist. Ferner sei G die Menge aller Paare (f, x) mit $f \in F$, $x \in X$. In der Menge G definieren wir die Operation $+$ konponentenweise. Die Halbordnung in der Menge G erklären wir wie folgt. Es seien (f_1, x_1) und (f_2, x_2) beliebige Elemente von G. Wenn $f_1 = f_2$, $x_1 \neq x_2$, sind die gegebenen Elemente von G unvergleichbar. Falls $f_1 \neq f_2$, dann gibt es $x_3 \in X$ mit der Eigenschaft $f_1(x_3) \neq f_2(x_3)$, $f_1(x) = f_2(x)$ für jedes $x \in X$, $x < x_3$. In diesem Fall setzen wir $(f_1, x_1) < (f_2, x_2)$ genau dann, wenn $f_1(x_3) < < f_2(x_3)$. Man verifiziert leicht, dass G eine Rieszsche Gruppe ist. Es sei $z \in X$. Bezeichnen wir $A_z = \{(f, x) \in G : f(y) = 0$ für jedes $y \in X$, $y \leqq z\}$. A_z ist eine konvexe gerichtete Untergruppe von G und

$$\cap_{z \in X} A_z = \{f_0, x) \in G : f_0(y) = 0 \quad \text{für jedes} \quad y \in X\};$$

diese Menge ist nicht gerichtet.

Satz 7. *Es sei G eine Rieszsche Gruppe. Dann ist $\mathscr{K}$ ein vollständiger Verband. $\mathscr{K}$ ist ein Teilverband von $\mathscr{G}$. Die Operationen der verbandstheoretischen Vereinigung $\vee (\mathscr{G}) \{A_i\}$, $\vee (\mathscr{K}) \{A_i\}$ in den Verbänden $\mathscr{G}$ und $\mathscr{K}$ geben dasselbe Ergebnis für beliebige Teilmenge $\{A_i\} \subset \mathscr{K}$. Die dualen Operationen $\wedge (\mathscr{G}) \{A_i\}$ und $\wedge (\mathscr{K}) \{A_i\}$ brauchen nicht gleich sein, falls $\{A_i\}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathscr{K}$ ist.*

Beweis. Aus $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ folgt nach Hilfssatz 5, dass für beliebiges System von Untergruppen $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}$ die Menge $\vee (\mathscr{G}) \{A_i\}$ zugleich das Supremum des Systems $\{A_i\}$ in der halbgeordneten Menge $\mathscr{K}$ ist, also

$$\vee (\mathscr{G}) \{A_i\} = \vee (\mathscr{K}) \{A_i\}. \tag{1}$$

Da in $\mathscr{K}$ das kleinste Element existiert und jedes System $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}$ das Supremum in $\mathscr{K}$ besitzt, ist $\mathscr{K}$ ein vollständiger Verband. Wenn $A, B \in \mathscr{K}$, so bildet nach Hilfssatz 6 die Gruppe $A \cap B$ das Infimum des Systems $\{A, B\}$ in $\mathscr{K}$ und daher

$$\wedge (\mathscr{G}) \{A, B\} = \wedge (\mathscr{K}) \{A, B\}. \tag{2}$$

Nach (1) und (2) ist $\mathscr{K}$ ein Teilverband von $\mathscr{G}$ und die Operationen $\vee$ $(\mathscr{G})$, $\vee$ $(\mathscr{K})$ geben dasselbe Ergebnis für eine beliebige Teilmenge $\{A_i\} \subset \mathscr{K}$ Das Beispiel aus der Bemerkung 6.2 zeigt, dass die Operationen $\wedge$ $(\mathscr{G})$, $\wedge$ $(\mathscr{K})$ für eine unendliche Teilmenge $\{A_i\} \subset \mathscr{K}$ nicht immer zusammenfallen (in dieser Hinsicht unterscheiden sich also die Rieszschen Gruppen von der Verbandsgruppen; vgl. [4], Abs. 1.4).

Für jedes $A \subset G$ setzen wir $A^+ = \{a \in A : a \geqq 0\}$.

Hilfssatz 8. *Es sei $A, B \in \mathscr{K}$, $A^+ \subset B^+$. Dann gilt $A \subset B$.*

Beweis. Da A eine gerichtete Gruppe ist, lässt sich jedes Element $a \in A$ in der Form $a = a_1 - a_2$ mit $a_1, a_2 \in A^+$ darstellen. Nach der Voraussetzung ist also $A \subset B$.

Der Satz 7 und die schon bewiesenen Hilfssätze ermöglichen uns jetzt für den Beweis der Distributivität des Verbandes $\mathscr{K}$ eine analoge Methode zu benutzen, wie in [4], Satz 1.11 für den Fall der Verbandsgruppen.

Bezeichnen wir mit $\wedge$, $\vee$ die Verbandsoperationen in $\mathscr{K}$.

Satz 9. *Es sei G eine Rieszsche Gruppe. Dann ist der Verband $\mathscr{K}$ distributiv und erfüllt die Identität*

$$A \wedge (\vee A_i) = \vee (A \wedge A_i). \tag{3}$$

Beweis. In jedem vollständigen Verband gilt $\vee (A \wedge A_i) \subset A \wedge (\quad A_i$ Es sei $x \in A \wedge (\vee A_i)$, $x > 0$. Nach dem Satz 7 (diesen Satz benutzen wir mehrmals in diesem Beweis) ist $A \wedge (\vee A_i) = A \cap (\vee A_i)$, und daher $x \in A$, $x \in \vee A_i$. Daraus folgt $x \in \vee (\mathscr{G}) \{A_i\}$ und nach Hilfssatz 4 gibt es Untergruppen $A_1, \ldots, A_n \in \{A_i\}$ und Elemente $a_i \in A_i$, $a_i > 0$ $(j \quad 1, \ldots, n)$, so dass $x = a_1 + \ldots + a_n$. Da $0 < a_j \leqq x$ und die Gruppe A konvex ist, bekommen wir $a_j \in A$, $a_j \in A \cap A_j = A \wedge A_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Das Element x gehört also zu $(A \wedge A_1) \vee \ldots \vee (A \wedge A_n) \subset \vee (A \wedge A_i)$. Durch Benutzung des Hilfssatzes 8 haben wir $A \wedge (\vee A_i) \subset \vee (A \wedge A_i)$. Damit ist (3) bewiesen. Insbesondere ist $A \wedge (A_1 \vee A_2) \quad (A \wedge A_1) \vee (A \wedge A_2)$, also ist $\mathscr{K}$ distributiv (vgl. [1], S. 133).

Bemerkung 9.1. Es sei G eine gerichtete Gruppe, die keine Rieszsche Gruppe ist und $\mathscr{K}$ sei das System aller konvexen gerichteten Untergruppen von G. Das durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnete System $\mathscr{K}$ braucht kein distributiver Verband zu sein. Beispiel: G sei die

Gruppe aus der Bemerkung 6.1; wir definieren jetzt in G eine andere Halbordnung. Die Elemente $g = (x, y, z) \in G$ können als Punkte $P(x, y, z)$ eines dreidimensionalen Raumes (bezüglich eines festen Koordinatensystems) aufgefasst werden. Den positiven Kegel von G definieren wir als die Menge, die aus dem Element 0 und aus allen Elementen $g \in G$, $g \neq 0$ mit folgender Eigenschaft besteht: für den Winkel α zwischen der Halbgerade $0g$ und der positiven z Achse gilt $\alpha \leqq 45$. Es ist leicht zu zeigen (vgl. [3], Kap. II, Satz 4), dass durch diese Vorschrift eine teilweise Ordnung auf der Menge G definiert ist und dass G eine halbgeordnete Gruppe ist. Es sei $\mathscr{A}$ die Menge aller Geraden $A \subset G$ mit der Eigenschaft, dass $(0, 0, 0) \in A$ und der Winkel zwischen A und der z-Achse gleich 45 ist. Jede Menge $A \in \mathscr{A}$ ist eine linear geordnete konvexe Untergruppe von G; A ist archimedisch und daher folgt, dass A ein Atom in der halbgeordneten Menge $\mathscr{K}$ ist. Es sei g ein positives Element von G, das in keiner der Mengen $A \in \mathscr{A}$ enthalten ist. Für jedes $A \in \mathscr{A}$ gibt es $a \in A$ mit $0 < a < g$. Daraus folgt

(4) $$\cup_{A \in \mathscr{A}} A \subset H$$

für jede Untergruppe $H \in \mathscr{K}$, die das Element g enthält. Es seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{A}$, $A_1 \neq A_3$, $A_1 \neq A_2 \neq A_3$. Jedes Element $g \in G$ kann in der Form $g_1 = a_1 + a_2 + a_3$ $(a_i \in A_i, i = 1, 2, 3)$ dargestellt werden. Mit Hilfe von (4) bekommen wir daraus $H = G$. Damit haben wir bewiesen, dass $\mathscr{K} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ gilt, wobei $\mathscr{B}$ $\{\{0\}, G\}$ ist. Also ist $\mathscr{K}$ ein Verband, und $\mathscr{K}$ ist nicht distributiv.

Aus dem Satz 9 folgen als Sonderfälle einige bekannten Sätze über konvexe Untergruppen der halbgeordneten Gruppen. Vor ihrer Formulierung brauchen wir einige Hilfsbegriffe. Eine konvexe l-Untergruppe einer Verbandsgruppe G, die zugleich ein Normalteiler von G ist, heisst ein l-Ideal von G. Eine konvexe gerichtete normale Untergruppe einer halbgeordneten Gruppe G heisst ein o-Ideal von G. Es sei $\mathscr{K}_N$ das System aller o-Ideale von G. Wenn G eine Verbandsgruppe ist, dann ist nach Hilfssatz 3 die Menge $\mathscr{K}_N$ gleich der Menge aller l-Ideale von G. Es sei $\{A_i\}$ ein System von Normalteilern von G. Bekanntlich sind $\vee (\mathscr{G}) \{A_i\}$ und $\wedge (\mathscr{G}) A_i$ Normalteiler von G. Daraus und aus dem Satz 7 folgt, dass für eine Rieszsche Gruppe G die Menge $\mathscr{K}_N$ ein Teilverband des Verbandes $\mathscr{K}$ ist und die Operationen der verbandstheoretischen Vereinigung in den Verbänden $\mathscr{K}_N$ und $\mathscr{K}$ dasselbe Ergebnis für eine beliebige Teilmenge von $\mathscr{K}_N$ geben. Aus dem Satz 9 bekommen wir also die Folgerung:

Satz 9.1. (Vgl. Fuchs [3], Kap. V, Satz 28.) *Es sei G eine Rieszsche Gruppe. Das System $\mathscr{K}_N$ aller o-Ideale von G ist ein vollständiger distributiver Verband, der das unendliche Distributivgesetz* (3) *befriedigt.*

Satz 9.2. (Vgl. Birkhoff [1], Kap. XIV, Satz 10.) *Es sei G eine Verbandsgruppe. Das System $\mathcal{K}_N$ aller l-Ideale von G ist ein vollständiger distributiver Verband, der die Bedingung* (3) *erfüllt.*

Aus dem Satz 9 und Hilfssatz 3 folgt:

Satz 9.3. (Vgl. [5], [6], [4].) *Dass System aller konvexen l-Untergruppen einer Verbandsgruppe ist ein vollständiger distributiver Verband, in dem* (3) *identisch gilt.*

Es sei Λ eine halbgeordnete Menge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei R_λ eine linear geordnete Gruppe, die mit einer Untergruppe der linear geordneten additiven Gruppe aller reellen Zahlen isomorph ist. Für jedes Element $v = (\ldots, v_\lambda, \ldots)_{\lambda \in \Lambda}$ aus dem vollen direkten Produkt der Gruppen R_λ sei $S(v)$ die Menge aller $\lambda \in \Lambda$ mit $v_\lambda \neq 0$. Ferner sei G die Menge aller Elemente v mit der Eigenschaft, dass die halbgeordnete Menge $S(v)$ keine unendliche aufsteigende Kette enthält. In der Menge G definieren wir die Operation $+$ komponentenweise. Ein Element $v \in G$, $v \neq 0$ wird als positiv erklärt, wenn $v_\lambda > 0$ für jedes maximale Element der Menge $S(v)$ ist. Dann ist G eine halbgeordnete Gruppe, die man auch mit $V(\Lambda, R_\lambda)$ bezeichnet (vgl. Conrad [2]). Da G kommutativ ist, ist jede konvexe gerichtete Untergruppe von G ein o-Ideal. $V(\Lambda, R_\lambda)$ ist eine Rieszsche Gruppe ([2], S. 217). Daher und aus dem Satz 9 bekommen wir:

Satz 9.4. (Vgl. Conrad [2], Satz 4.12.) *Das System aller o-Ideale der halbgeordneten Gruppe $V(\Lambda, R_\lambda)$ ist ein vollständiger distributiver Verband, der das unendliche Distributivgesetz* (3) *befriedigt.*

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, Revised edition, New York 1948.

[2] Conrad P., *Representation of partially ordered abelian groups*, Acta Math. *116* (1966), 199–221.

[3] Fuchs L., *Упорядоченные алгебраические системы*, Moskva 1965.

[4] Jakubíková M., *О некоторых подгруппах l-групп*, Mat.—fyz. časop. *12* (1962), 97–107.

[5] Lorenz K., *Über Strukturverbände der Verbandsgruppen*, Acta math. Acad. scient. Hungar. *13* (1962), 55–67.

[6] Šik F., *Estructura y realizationes de grupos reticulados*, Rev. mem. Fac. cienc. *1* (1964), 1–29.

Eingegangen am 9. 9. 1968

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Košice