Bohdan Zelinka

O jednom typu multiplikativních svazů

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 2, 90--98

Matematický časopis 18 (1968), No. 2

O JEDNOM TYPU MULTIPLIKATIVNÍCH SVAZŮ

BOHDAN ZELINKA, Liberec

G. Birkhoff [1] definuje pojem multiplikativního svazu (krátce m-svazu) následujícím způsobem.

Multiplikativní svaz (krátce m-svaz) je svaz s binárním násobením splňujícím

$$a(b \vee c) = ab \vee ac, \quad (a \vee b)c = ac \vee bc.$$

Současně v [1] je vysloven problém č. 92: rozvinout teorii m-svazů, v nichž současně platí i

$$a(b \wedge c) = ab \wedge ac, \quad (a \wedge b)c = ac \wedge bc.$$

Takovýmito svazy se zabýval A. C. Choudhury [2]. Zde uvedeme některé další výsledky této teorie za předpokladu, že násobení v takovémto svazu je asociativní a komutativní. Takovýto m-svaz L je tedy současně komutativní pologrupou. Budeme mu říkat mm-svaz. Nejprve budeme zkoumat cyklické podpologrupy mm-svazu L.

Věta 1. *Je-li A konečná cyklická podpologrupa mm-svazu L vytvořená prvkem a, pak její perioda má délku jedna.*

Důkaz. Předpokládejme, že by pologrupa A byla typu (h, d) (viz [3]), $d \geqq 2$. Prvky periody pologrupy A by byly $a^h, a^{h+1}, \ldots, a^{h+d-1}$.

Utvořme výraz $b = (\bigvee_{i=0}^{d-1} a^{h+i}) (\bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j})$. Platí:

$$b = \bigvee_{i=0}^{d-1} (a^{h+i} \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j}).$$

Upravíme výraz v závorce:

$$a^{h+i} \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j} = \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{2h+i+j} = \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j},$$

poněvadž jde o d navzájem různých prvků periody, tedy o všechny prvky periody. Je tedy:

$$b = \bigvee_{i=0}^{d-1} \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j} = \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j}.$$

Z duality mezi operacemi $\vee$ a $\wedge$ však plyne, že také

$$b = \bigwedge_{j=0}^{d-1} \bigvee_{i=0}^{d-1} a^{h+i} = \bigvee_{i=0}^{d-1} a^{h+i}.$$

Platí tedy:

$$\bigvee_{i=0}^{d-1} a^{h+i} = \bigwedge_{j=0}^{d-1} a^{h+j},$$

tedy spojení všech prvků periody pologrupy A se rovná jejich průseku. To však je možné pouze tehdy, jestliže se všechny tyto prvky sobě rovnají, což je spor s předpokladem, že $d \geqq 2$.

Nyní zavedeme pojem úplného a σ-úplného mm-svazu analogicky [1].

Říkáme, že mm-svaz L je úplný, jestliže každá jeho omezená podmnožina má spojení a průsek, přičemž pro tato spojení a průseky platí distributivní zákon, tedy

$$a \bigvee b_\alpha = \bigvee ab_\alpha, \quad a \bigwedge b_\alpha = \bigwedge ab_\alpha,$$

kde α probíhá nějakou množinu indexů.

Říkáme, že mm-svaz L je σ-úplný, jestliže toto platí pro každou omezenou spočetnou množinu.

Mějme tedy dán σ-úplný mm-svaz L, předpokládejme, že obsahuje nulový prvek svazu 0 a jednotkový prvek svazu I — tedy každá jeho podmnožina je omezená.

Věta 2. *Nechť A je cyklická podpologrupa σ-úplného mm-svazu L vytvořená prvkem a. Pak platí*

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l.$$

Přitom tento prvek je nulovým prvkem vzhledem k násobení pro všechny prvky pologrupy A.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že jak $\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j$, tak $\bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l$ jsou nulové prvky pro všechny prvky pologrupy A vzhledem k násobení. Budiž a^m prvek pologrupy A (m je přirozené číslo). Platí

$$a^m \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j = \bigvee_{i=1}^{\infty} \left(a^m \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j\right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^{m+j} = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=m+i}^{\infty} a^j.$$

Jelikož posloupnost $\{\bigwedge_{j=i} a^j\}_{i=1}^{\infty}$ je neklesající, spojení množiny jejích prvků se nezmění, odstraníme-li konečný počet jejích členů.
Tedy:

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=m+i}^{\infty} a^j = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j,$$

$$a^m \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=m+i}^{\infty} a^j = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=j}^{\infty} a^j$$

a prvek $\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j$ je nulovým prvkem pro všechny mocniny a. Z duality plyne, že rovněž

$$a^m \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l.$$

Utvořme nyní součin:

$$(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j)(\bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l) = \bigwedge_{k=1}^{\infty} [(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j)(\bigvee_{l=k}^{\infty} a^l)] =$$

$$= \bigwedge_{k=1}^{\infty} [\bigvee_{l=k}^{\infty} a^l(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j)] = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} (\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j) = \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j.$$

Použitím duality bychom opět odvodili

$$(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i}^{\infty} a^j)\ (\bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l) = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \bigvee_{l=k}^{\infty} a^l.$$

Tímto je důkaz proveden.

Snadno bychom se také přesvědčili, že platí další věta.

Věta 3. *Prvky* a^i, $\bigvee_{j=i}^{\infty} a^j$, $\bigwedge_{k=i}^{\infty} a^k$ *pro všechna přirozená* i *a prvek* $\bigvee_{i=1}^{\infty} \bigwedge_{j=i} a^j$ *tvoří podpologrupu mm-svazu* L.

Platí také další věta.

Věta 4. *Je-li* A *cyklická podpologrupa* σ*-úplného mm-svazu* L *vytvořená prvkem* a *a platí-li* $a^m \preceq a^{m+n}$ (resp. $a^m \succeq a^{m+n}$) *pro některá přirozená* m, n, *pak podmnožina pologrupy* A *složená z mocnin* a *s exponenty většími nebo rovnými* m *a náležejícími do téže zbytkové třídy modulo* n *je úplně uspořádaná.*

Důkaz. Postupným násobením vztahu $a^m \preceq a^{m+n}$ prvky a^n, a^{2n}, ... dostáváme

$$a^m \preceq a^{m+n} \preceq a^{m+2n} \preceq a^{m+3n} \preceq \ldots \preceq a^{m+in} \preceq \ldots.$$

Násobením tohoto vztahu postupně prvky a, a^2, ..., a^{n-1} dostáváme

$$a^{m+1} \preceq a^{m+n+1} \preceq a^{m+2n+1} \preceq \dots \preceq a^{m+in+1} \preceq \dots$$

$$a^{m+2} \preceq a^{m+n+2} \preceq a^{m+2n+2} \preceq \dots \preceq a^{m+in+2} \preceq \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a^{m+n-1} \preceq a^{m+2n-1} \preceq a^{m+3n-1} \preceq \dots \preceq a^{m+(i+1)n-1} \preceq \dots$$

Exponenty každé z těchto posloupností náleží do téže zbytkové třídy modulo n a jsou větší nebo rovny m. Přitom tyto posloupnosti zřejmě vyčerpávají všechny tyto zbytkové třídy. Označme A_k podmnožinu složenou z prvků a^{m+k+in} pro $i = 1, 2, \dots$ a budiž a_k spojení všech prvků množiny A_k. Určíme součin $a_k a_l$ (je zřejmě $a_{k+in} = a_k$).

$$a_k a_l = \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a^{m+k+in}\right)\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} a^{m+l+jn}\right) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{\infty} \bigvee_{j=1}^{\infty} a^{2m+k+l+(i+j)n} = \bigvee_{i=2}^{\infty} a^{2m+k+l+in} = a_{k+l+m}.$$

Utvořme nyní spojení a průsek všech a_k a znásobme tyto výrazy:

$$\left(\bigvee_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\bigwedge_{l=0}^{\infty} a_l\right) = \bigwedge_{l=0}^{\infty} \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k a_l = \bigwedge_{l=0}^{\infty} \bigvee_{k=0}^{\infty} a_{k+l+m} = \bigwedge_{l=0}^{\infty} \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k = \bigvee_{l=0}^{\infty} a_k.$$

Platí však také:

$$\left(\bigvee_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\bigwedge_{l=0}^{\infty} a_l\right) = \bigvee_{k=0}^{\infty} \bigwedge_{l=0}^{\infty} a_k a_l = \bigvee_{k=0}^{\infty} \bigwedge_{l=0}^{\infty} a_{k+l+m} = \bigvee_{k=0}^{\infty} \bigwedge_{l=0}^{\infty} a_l = \bigwedge_{l=0}^{\infty} a_l.$$

Tedy $\bigwedge_{l=0}^{\infty} a_l = \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k$, proto také všechny a_k jsou si rovny. Analogicky bychom postupovali v případě $a^m \succeq a^{m+n}$.

Všimněme si nyní speciálně prvků 0 a I.

Věta 5. *Nechť L je mm-svaz s nulovým prvkem svazu 0 a jednotkovým prvkem svazu I. Pak platí:*

$$0 \preceq 0^2 \preceq 0^3 \preceq \dots$$

$$I \succeq I^2 \succeq I^3 \succeq \dots$$

Je-li L σ-úplný mm-svaz, pak existují prvky $0^\infty = \bigvee_{i=1}^{\infty} 0^i$, $I^\infty = \bigwedge_{i=1}^{\infty} I^i$. Platí o nich:

$$0^i \preceq 0^\infty \preceq I^\infty \preceq I^i \quad \textit{pro } i = 1, 2, \dots$$

Interval $\langle 0^\infty, I^\infty\rangle$ je ideálem mm-svazu L vzhledem k násobení.

Důkaz. Poněvadž 0 je nejmenším prvkem mm-svazu L, je $0 \preceq 0^2$. Z toho postupným násobením prvky $0, 0^2, 0^3, \ldots$. dostáváme

$$0 \preceq 0^2 \preceq 0^3 \preceq 0^4 \preceq \ldots.$$

Analogicky bychom odvodili

$$I \succeq I^2 \succeq I^3 \succeq I^4 \succeq \ldots.$$

Je-li a libovolný prvek svazu L, platí $0 \preceq a$, z čehož plyne

$$0^k \preceq a0^{k-1} \preceq a^2 0^{k-2} \preceq \ldots. \preceq a^k$$

pro libovolné přirozené k. Analogicky bychom z $a \preceq I$ odvodili $a^k \preceq I^k$. Proto je

$$0^k \preceq I^k.$$

Tedy také

$$0^\infty = \bigvee_{i=1}^{\infty} 0^i \preceq I^k,$$

$$I^\infty = \bigwedge_{i=1}^{\infty} I^k \succeq 0^k$$

pro libovolné přirozené k. Z toho tedy konečně plyne

$$0^\infty = \bigvee_{i=1}^{\infty} 0^i \preceq \bigwedge_{i=1}^{\infty} I^i = I^\infty.$$

Snadno bychom (analogicky důkazům předešlých vět) dokázali, že $0^\infty 0^k = 0^\infty$, $I^\infty I^k = I^\infty$ pro každé k. Budiž nyní $b \in \langle 0^\infty, I^\infty \rangle$, $c \in L$. Máme:

$$bc \succeq 0^\infty c \succeq 0^\infty 0 = 0^\infty,$$

$$bc \preceq I^\infty c \preceq I^\infty I = I^\infty,$$

tedy $bc \in \langle 0^\infty, I^\infty \rangle$.

Věta 6 *Pokud existují v mm-svazu L prvky 0^∞, I^∞, je prvek $o = 0^\infty I^\infty$ nulovým prvkem mm-svazu L vzhledem k násobení a je obsažen v intervalu $\langle 0^\infty, I^\infty \rangle$.*

Důkaz. Máme $0o = 00^\infty I^\infty = 0^\infty I^\infty = o$, $oI = 0^\infty I^\infty I = 0^\infty I^\infty = o$. Je-li nyní a libovolný prvek *mm*-svazu L, platí $0 \preceq a \preceq I$. Z toho vyplývá $o = 0o \preceq ao \preceq Io = o$, to jest $ao = o$. Poněvadž nulový prvek pologrupy náleží do každého ideálu, je $o \in \langle 0^\infty, I^\infty \rangle$.

Dokážeme ještě další větu, která ukazuje souvislost mezi intervaly a podpologrupami.

Věta 7. *Uzavřený interval mm-svazu je podpologrupou právě tehdy, jestliže druhé mocniny krajních prvků do něho náležejí.*

Důkaz. Budiž $\langle p, q\rangle$ interval mm-svazu L. Nutnost podmínky vyplývá přímo z definice podpologrupy. Nechť tedy podmínka platí. Buďtež nyní $a \in \langle p, q\rangle$, $b \in \langle p, q\rangle$. Poněvadž tedy $p \preceq a$, $p \preceq b$, je $p^2 \preceq ap \preceq ab$. Ze vztahů $a \preceq q$, $b \preceq q$ opět vyplývá $ab \preceq aq \preceq q^2$.
Je tedy $ab \in \langle p^2, q^2\rangle \subset \langle p, q\rangle$.

Důsledek. *Uzavřený interval, jehož krajní prvky jsou idempotenty, je podpologrupou mm-svazu L.*

Věta 8. *Je-li interval $\langle p, q\rangle$ podpologrupou mm-svazu L, je jí i každý interval $\langle p^i, q^i\rangle$ pro všechna přirozená i a j.*

Důkaz. Je-li $\langle p, q\rangle$ podpologrupou mm-svazu L, je $p^2 \in \langle p, q\rangle$, $q^2 \in \langle p, q\rangle$, tedy $p \preceq p^2$, $q \succeq q^2$. Z toho dostáváme, že pro $k < l$ je $p^k \preceq p^l$, $q^k \succeq q^l$. Tedy $p^{2i} \succeq p^i$, $q^{2j} \succeq q^j$. Že $p^i \preceq q^j$ a že tedy interval $\langle p^i, q^j\rangle$ vůbec existuje, dokážeme analogicky jako vztah $0^k \preceq I^k$. Tedy $p^{2i} \in \langle p^i, q^j\rangle$, $q^{2j} \in \langle p^i, q^j\rangle$ a tento interval je podle věty 7 podpologrupou.

Analogicky bychom dokázali další větu.

Věta 9. *Interval $\langle p, q\rangle$ je ideálem mm-svazu L vzhledem k násobení právě tehdy, je-li $p0 \succeq p$, $qI \preceq q$.*

Z ní vyplývá opět věta.

Věta 10. *Budiž $\langle p, q\rangle$ ideálem mm-svazu L vzhledem k násobení, Množina A (resp B, resp C) prvků a (resp b, resp. c) z intervalu $\langle p, q\rangle$ takových, že $a0 \neq p$ (resp. $bI \neq q$, resp. současně $c0 \neq p$, $cI \neq q$) je také ideálem mm-svazu L vzhledem k násobení.*

Důkaz. Budiž $a \in A$, $r \in L$. Je zřejmě $a0 > p$, tedy $ar0 \succeq a0 \succeq p$, z toho $ar \in A$. Důkaz pro B je duální. Množina $C = A \cap B$ tedy jako průnik dvou ideálů je ideálem.

Budeme nyní zkoumat mm-svazy, které mají jednotkový prvek vzhledem k násobení.

Věta 11. *Nechť v mm-svazu L existuje jednotkový prvek e vzhledem k násobení. Pak 0 a I jsou idempotenty (pokud existují).*

Důkaz. Protože $0 \preceq e$, je $0^2 \preceq 0e = 0$, tedy $0^2 = 0$. Podobně $I^2 = I$.

V takovémto případě ovšem $0I$ je nulovým prvkem vzhledem k násobení.

Zjistíme nyní vzájemný vztah nulového prvku o a jednotkového prvku e (vzhledem k násobení).

Věta 12. *Existuje-li e a o, platí buď $o = 0$, nebo $o = I$, nebo $e \parallel o$.*

Důkaz. Je-li $e \preceq o$, je $eI \preceq oI$, to jest $I \preceq o$, tedy $o = I$. Je-li $e \succeq o$, je $e0 \succeq o0$, to jest $0 \succeq o$, tedy $o = 0$.

Nyní si všimneme blíže vztahu jednotlivých uzavřených intervalů mm-svazu L. Jsou-li $\langle p, q\rangle$, $\langle r, s\rangle$ dva intervaly, budeme psát:

$$
\begin{array}{ll}
\langle p, q\rangle \,.\, \langle r, s\rangle = \langle pr, qs\rangle, & \\
\langle p, q\rangle \vee \langle r, s\rangle = \langle p \wedge r, q \vee s\rangle, & \\
\langle p, q\rangle \wedge \langle r, s\rangle = \langle p \vee r, q \wedge s\rangle, & \text{pokud } p \vee r \preceq q \wedge s, \\
\langle p, q\rangle \wedge \langle r, s\rangle = \emptyset & \text{v ostatních případech,} \\
\langle p, q\rangle \,.\, \emptyset = \emptyset, & \\
\langle p, q\rangle \vee \emptyset = \langle p, q\rangle, & \\
\langle p, q\rangle \wedge \emptyset = \emptyset, & \\
\emptyset \,.\, \emptyset = \emptyset \vee \emptyset = \emptyset \wedge \emptyset = \emptyset. &
\end{array}
$$

Je zřejmý intuitivní smysl těchto definic. Součin $\langle p, q\rangle \,.\, \langle r, s\rangle$ je nejmenší uzavřený interval obsahující všechny součiny ab, kde $a \in \langle p, q\rangle$, $b \in \langle r, s\rangle$. Spojdní $\langle p, q\rangle \vee \langle r, s\rangle$ je nejmenší uzavřený interval, který obsahuje oba intervaly $\langle p, q\rangle$ a $\langle r, s\rangle$. Průsek $\langle p, q\rangle \wedge \langle r, s\rangle$ je množinový průnik intervalů $\langle p, q\rangle$, $\langle r, s\rangle$. Tentýž smysl mají operace i tehdy, jestliže některý z intervalů je nahrazen prázdnou množinou.

Dokážeme větu.

Věta 13. *Množina $\mathscr{L}$ složená ze všech uzavřených intervalů mm-svazu L a z prázdné množiny je m-svazem (nikoli obecně mm-svazem) vůči výše definovaným operacím* $.\,, \vee, \wedge$. *Největším prvkem m-svazu $\mathscr{L}$ je $\langle 0, I\rangle$ (pokud existuje) nejmenším $\emptyset$, nulovým prvkem vzhledem k násobení opět $\emptyset$, jednotkovým prvkem $\langle e, e\rangle$, pokud existuje e. Násobení v tomto m-svazu je komutativní a asociativní.*

Důkaz. Je zřejmé, že $\mathscr{L}$ splňuje axiomy teorie svazů, je tedy svazem. Mějme nyní tři intervaly $\langle p, q\rangle$, $\langle r, s\rangle$, $\langle t, u\rangle$, které všechny náležejí do $\mathscr{L}$. Máme:

$$
\begin{aligned}
\langle p, q\rangle \,.\, (\langle r, s\rangle \vee \langle t, u\rangle) &= \langle p, q\rangle \,.\, \langle r \wedge t, s \vee u\rangle = \langle pr \wedge pt, qs \vee qu\rangle = \\
&= \langle pr, qs\rangle \vee \langle pt, qu\rangle = \langle p, q\rangle \,.\, \langle r, s\rangle \vee \langle p, q\rangle \,.\, \langle t, u\rangle.
\end{aligned}
$$

Totéž by ovšem platilo, kdybychom některý interval nahradili prázdnou množinou. Tím jsme dokázali, že $\mathscr{L}$ je m-svazem. (Komutativnost a asociativnost násobení je zřejmá.) $\mathscr{L}$ není obecně mm-svazem, neboť existuje-li v $\mathscr{L}$ nulový prvek vzhledem k násobení o a vezmeme-li dva disjunktní intervaly $\langle r, s\rangle$, $\langle t, u\rangle$ v $\mathscr{L}$ a interval $\langle o, o\rangle$, máme

$$
\begin{aligned}
&\langle o, o\rangle \,.\, (\langle r, s\rangle \wedge \langle t, u\rangle) = \langle o, o\rangle \,.\, \emptyset = \emptyset, \\
&\langle o, o\rangle \,.\, \langle r, s\rangle \wedge \langle o, o\rangle \,.\, \langle t, u\rangle = \langle o, o\rangle \wedge \langle o, o\rangle = \langle o, o\rangle \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Podobně jako jsme uvažovali nulový prvek $o = 0^\infty I^\infty$ mm-svazu L, můžeme uvažovat existenci nulového prvku i v libovolném intervalu $\langle p, q\rangle$. Je-li $\langle p, q\rangle$ pologrupou a existují-li prvky $\bigvee_{i=1}^{\infty} p^i$, $\bigwedge_{i=1}^{\infty} q^i$, pak jejich součin leží v $\langle p, q\rangle$ a je nulovým prvkem ke všem prvkům tohoto intervalu. Ovšem i v jiných případech může v intervalu $\langle p, q \rangle$ existovat nulový prvek tohoto intervalu.

Věta 14. *Budiž o_1 idempotent mm-svazu $\mathscr{L}$. Všechny uzavřené intervaly, které obsahují o_1 jako svůj nulový prvek (vzhledem k násobení), tvoří mm-svaz* $\mathrm{L}(o_1)$ *vůči operacím* $.$, $\vee$, $\wedge$ *výše definovaným.*

Důkaz. Buďtež $\langle p, q \rangle$, $\langle r, s \rangle$ dva uzavřené intervaly *mm*-svazu L a nechť oba obsahují o_1 jako svůj nulový prvek. Tento prvek je i nulovým prvkem spojení $\langle p, q \rangle \vee \langle r, s \rangle$, protože

$$o_1(p \vee r) = o_1 p \wedge o_1 r = o_1 \wedge o_1 = o_1,$$

$$o_1(q \vee s) = o_1 q \vee o_1 s = o_1 \vee o_1 = o_1.$$

Průsek $\langle p, q \rangle \wedge \langle r, s \rangle$ je neprázdný, protože obsahuje o_1. Prvek o_1 je zřejmě i nulovým prvkem tohoto průseku. Součin $\langle p, q \rangle . \langle r, s \rangle = \langle pr, qs \rangle$ má opět za nulový prvek o_1, neboť zřejmě

$$o_1 pr = (o_1 p) r = o_1 r = o_1$$

a analogicky $o_1 qs = o_1$. Dále je zřejmě $o_1 \in \langle pq, rs \rangle$. Platnost distributivního zákona pro spojení byla dokázána v důkazu věty 13. Dokážeme ji tedy ještě pro průsek.

$$\langle p, q \rangle . (\langle r, s \rangle \wedge \langle t, u \rangle) = \langle p, q \rangle . \langle r \vee t, s \wedge u \rangle =$$
$$= \langle pr \vee pt, qs \wedge qu \rangle = \langle pr, qs \rangle \wedge \langle pt, qu \rangle = \langle p, q \rangle . \langle r, s \rangle \wedge \langle p, q \rangle .$$
$$. \langle t, u \rangle .$$

Tím je věta dokázána.

Analogicky se dokáže další věta.

Věta 15. *Budiž o_1 idempotent mm-svazu L. Všechny intervaly které obsahují o_1, tvoří mm-svaz vůči operacím* $.$, $\vee$, $\wedge$ *výše definovaným.*

Důkaz. Tato věta se liší od věty 14 pouze tím, že nepředpokládá, že o_1 je nulový prvek zmíněných intervalů. Je však zřejmé, že spojení i průsek dvou intervalů obsahujících o_1 obsahuje také o_1. Z $p \precsim o_1$, $r \precsim o_1$ vyplývá, že $pr \precsim o_1$ a analogicky $qs \succsim o_1$. Platnost distributivního zákona by se ověřila jako ve větách 13 a 14.

Příkladem takovéhoto mm-svazu může být množina všech uzavřených intervalů přirozeně uspořádané pologrupy kladných reálných čísel, které obsahují číslo 1. Přirozeně uspořádaná pologrupa kladných reálných čísel je ovšem sama *mm*-svazem.

Poznámka. V důkazech vět 5 až 12 jsme místo distributivních zákonů používali slabšího předpokladu, že z $a \precsim b$ plyne $ac \precsim bc$ pro libovolné prvky a, b, c.

LITERATURA

[1] Birkhoff G., *Lattice Theory*, New York 1948.
[2] Choudhury A. C., *The doubly distributive m-lattice*, Bull. Calcutta Math. Soc. *49* (1957), 71—74.
[3] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.

Došlo 26. 7. 1965.

Katedra matematiky
Vysoké školy strojní a textilní,
Liberec

ON A TYPE OF MULTIPLICATIVE LATTICES

Bohdan Zelinka

Summary

In this article *mm*-lattices are investigated. An *mm*-lattice is by definition a lattice with a binary multiplication which is commutative and associative and for which two distributive laws $a(b \vee c) = ab \vee ac$, $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ hold (for arbitrary a, b, c). The paper proves some theorems on cyclic subsemigroups of an *mm*-lattice, some theorems on its unit and zero elements with respect to the multiplication and with respect to the lattice operations and the lattice of closed intervals of an *mm*-lattice is investigated. Studying the properties of *mm*-lattices was suggested by G. Birkhoff.