Tibor Katriňák

Pseudokomplementäre Halbverbände

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 2, 121--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126765

Matematický časopis 18 (1968), No. 2

PSEUDOKOMPLEMENTÄRE HALBVERBÄNDE

TIBOR KATRIŇÁK, Bratislava

In dieser Arbeit zeigen wir, daß man viele der die distributiven und pseudokomplementären Verbände betreffenden Begriffe und Behauptungen auf $\cup$-Halbverbände übertragen kann.

1. DISTRIBUTIVE $\cup$-HALBVERBÄNDE

Definition 1. *Eine nichtleere Menge S heißt ein $\cup$-Halbverband (weiter einfachheitshalber nur Halbverband), wenn in S eine assoziative, kommutative und idempotente binäre Operation $\cup$ erklärt ist.*

In jedem Halbverband läßt sich auf natürliche Weise mit Hilfe der $\cup$-Operation eine Ordnungsrelation definieren: $a \leqslant b$ genau dann, wenn $a \cup b = b$. Bezüglich dieser Ordnungsrelation bedeutet $a \cup b$ das Supremum von Elementen a, b. Wenn es bezüglich dieser Ordnungsrelation auch das Infimum von Elementen a, b gibt, werden wir dieses Element mit $a \cap b$ bezeichnen.

Definition 2. *Eine Teilmenge J eines Halbverbandes S heißt ein Ideal, wenn $a \cup b \in J$ mit $a, b \in J$ äquivalent ist.*

Es bezeichne $I_0(S)$ die teilweise geordnete Menge (bezüglich der mengentheoretischen Inklusion) aller Ideale eines Halbverbandes S. $I_0(S)$ bildet einen vollständigen Verband. Wenn $\{J_\alpha;\ \alpha \in A\}$ ein System von Idealen eines Halbverbandes S ist, dann $J = \bigvee (J_\alpha;\ \alpha \in A) = \{x \in S;\ x \leqslant y_{\alpha_1} \cup \ldots \cup y_{\alpha_n}$, wobei $y_{\alpha_i} \in J_{\alpha_i}$ für irgendeine $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A\}$(1). Diese Operation in der Menge $I_0(S)$ werden wir „verbandstheoretische Vereinigung" von Idealen nennen. Ähnlich, $\bigwedge(J_\alpha;\ \alpha \in A) = \bigcap (J_\alpha;\ \alpha \in A)$(2). Die letzte Operation in der Menge $I_0(S)$ werden wir „Durchschnitt" nennen.

Es bezeichne $I(S)$ die Menge aller nichtleeren Ideale eines Halbverbandes S.

(1) „$\bigvee$" bzw. „$\bigwedge$" wird eine Supremums- bzw. Infimumsoperation bezeichnen.

(2) „$\bigcup$" bzw. „$\bigcap$" wird eine mengentheoretische Vereinigungs- bzw. Durchschnittsoperation bezeichnen.

$I(S)$ ist ein Teilverband des $I_0(S)$ genau dann, wenn S eine nach unten gerichtete Menge ist, d. h. für jedes Elementenpaar $x, y \in S$ gibt es ein Element $z \in S$ so, daß $z \leqslant x$, $z \leqslant y$. Dann ist der Durchschnitt von endlich vielen Idealen aus $I(S)$ und verbandstheoretische Vereinigung von Idealen aus $I(S)$ wieder ein Ideal aus $I(S)$. Ein wichtiger Fall eines nach unten gerichteten Halbverbandes ist ein Halbverband mit dem kleinsten Element.

Existiert für die beliebige nichtleere Teilmenge eines Verbandes L das Supremum, so nennen wir L einen $\bigvee$-vollständigen Verband.

Definition 3. (siehe [7]). *Sei L ein $\bigvee$-vollständiger Verband. Ein Element $x \in L$ heißt kompakt, wenn aus $x \leqslant \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A)$ für eine endliche Teilmenge A' von A $x \leqslant \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A')$ folgt. L heißt kompakt erzeugt, wenn jedes Element eine Vereinigung (endlich oder unendlich vieler) kompakter Elemente ist.*

Für $I_0(S)$ aus [7] bekommen wir

1.1. *S sei ein Halbverband und $I_0(S)$ der Verband aller Ideale des S. Dann ist $J \in I_0(S)$ ein kompaktes Element genau dann, wenn J ein Hauptideal ist, oder $J = \emptyset$ (3), (4).*

1.2. (siehe [7, Satz 1]). *Ein nichtleerer Verband L ist mit dem Verband aller Ideale $I_0(S)$ eines Halbverbandes S genau dann isomorph, wenn*

(1) *L vollständig und*

(2) *L kompakt erzeugt ist.*

Ähnlich kann man analoge Behauptungen für $I(S)$ beweisen.

1.3. *Sei $I(S)$ der Verband aller nichtleeren Ideale eines nach unten gerichteten Halbverbandes S. $J \in I(S)$ ist ein kompaktes Element genau dann, wenn J ein Hauptideal ist.*

1.4. *Ein nichtleerer Verband L ist isomorph mit dem Verband aller nichtleeren Ideale $I(S)$ eines nach unten gerichteten Halbverbandes S genau dann, wenn*

(1) *L $\bigvee$-vollständig und*

(2) *L kompakt erzeugt ist.*

Definition 4. *Ein Halbverband S heißt distributiv, wenn aus $t, x, y \in S$, $t \leqslant x \cup y$, $t \nleqslant x$, $t \nleqslant y$ folgt, daß in S solche Elemente $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$ existieren, daß $x_1 \cup y_1 = t$.*

1.5. *In einem Halbverband S sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *S ist distributiv und nach unten gerichtet;*

---

(3) Für $a \in S$ ist die Teilmenge $\{x \in S;\ x \leqslant a\}$ ein Ideal. Dieses nennt man das Hauptideal und bezeichnet $(a]$. Ähnlich, $[a) = \{x \in S;\ x \geqslant a\}$.

(4) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

(2) *aus* t, x, $y \in S$ *und* $t \leqslant x \cup y$ *folgt, daß in* S *solche Elemente* $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$ *existieren, daß* $t = x_1 \cup y_1$.

Beweis. Aus (1) folgt (2). Seien t, x, $y \in S$, $t \leqslant x \cup y$. Wenn $t \leqslant x$, dann existiert ein Element $z \in S$ so, daß $z \leqslant t$ und $z \leqslant y$. Daraus folgt $t = t \cup z$. Ähnlich erledigt man den Fall $t \leqslant y$. Für $t \nleqslant x$, $t \nleqslant y$ folgt (2) unmittelbar aus (1).

Aus (2) folgt (1). Offenbar $x \leqslant x \cup y$ $(x, y \in S)$. Dann existieren die Elemente $x_1, y_1 \in S$ so, daß $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$ und $x = x_1 \cup y_1$. Daraus folgt $y_1 \leqslant x$ und S ist nach unten gerichtet. Die Distributivität von S folgt unmittelbar von (2).

1.6. *Sei* S *ein Halbverband. Der Verband* $I_0(S)$ *ist distributiv genau dann, wenn* S *distributiv ist.*

Beweis. Notwendige Bedingung. Sei $I_0(S)$ ein distributiver Verband. Seien $t \leqslant x \cup y$, $t \nleqslant x$, $t \nleqslant y$. Dann $(t] = (t] \cap (x \cup y] = \{(t] \cap (x]\} \cup \cup \{(t] \cap (y]\}$. Wäre $(t] \cap (x] = \emptyset$ bzw. $(t] \cap (y] = \emptyset$, dann $(t] = (t] \cap (y]$, bzw. $(t] = (t] \cap (x]$ und daher $t \leqslant y$, bzw. $t \leqslant x$, was zum Widerspruch führt. Also $(t] \cap (x] \neq \emptyset$ und $(t] \cap (y] \neq \emptyset$. Dann kann man schon solche Elemente $x_1 \in (t] \cap (x]$, $y_1 \in (t] \cap (y]$ finden, daß $t = x_1 \cup y_1$ und $x \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$.

Hinreichende Bedingung. Seien $J_1, J_2, J_3 \in I_0(S)$. Offenbar $J_1 \cap (J_2 \cup J_3) \supset \supset (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$. Daher folgt aus $\emptyset = J_1 \cap (J_2 \cup J_3)$ auch $\emptyset = = (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$. Weiter genügt es $\emptyset \neq J_1 \cap (J_2 \cup J_3)$ vorauszusetzen. Sei $t \in J_1 \cap (J_2 \cup J_3)$. Dann $t \in J_1$, $t \in J_2 \cup J_3$. Es gibt Elemente $x \in J_2$, $y \in J_3$ so, daß $t \leqslant x \cup y$. Dann ist entweder $t \leqslant x$, bzw. $t \leqslant y$ oder $t \nleqslant y$, $t \nleqslant x$. Im ersten Falle ist $t \in J_2$, bzw. $t \in J_3$ und daraus $t \in (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$ Im zweiten Falle existieren der Annahme nach solche Elemente $x_1, y_1 \in S$, daß $t = x_1 \cup y_1$ und $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$. Offenbar $x_1 \leqslant t$, $y_1 \leqslant t$ und $x_1 \in J_1 \cap J_2$, $y_1 \in J_1 \cap J_3$. Daher $t \in (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$ und $J_1 \cap (J_2 \cup J_3) = (J_1 \cap J_2) \cup \cup (J_1 \cap J_3)$.

Aus 1.6 folgt unmittelbar

1.7. *Sei* S *ein nach unten gerichteter Halbverband. Der Idealenverband* $I(S)$ *ist genau dann distributiv, wenn* S *distributiv ist.*

Definition 5. *Ein* $\bigvee$*-vollständiger Verband* L *heißt* $\bigvee$*-distributiv, wenn für jede Teilmenge* $\{x_\alpha;\ \alpha \in A\} \subset L$ *und jedes Element* $x \in L$

$$x \cap \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A) = \bigvee(x \cap x_\alpha;\ \alpha \in A)$$

gilt.

1.8. *Jeder distributive und kompakt erzeugte Verband ist* $\bigvee$*-distributiv.*

Beweis. Seien $x \in L$, $\{x_\alpha;\ \alpha \in A\} \subset L$. Offenbar $x \cap \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A) \geqslant \bigvee(x \cap x_\alpha;\ \alpha \in A)$. Betrachten wir ein kompaktes Element $c \in L$, wobei $c \leqslant x \cap \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A)$ ist. Dann $c \leqslant x$, $c \leqslant \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A)$. Daher für eine endliche Teilmenge $A' \subset A$ $c \leqslant \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A')$ und $c \leqslant x \cap \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A') = \bigvee(x \cap x_\alpha;\ \alpha \in A') \leqslant$

$\leqslant \bigvee(x \cap x_\alpha;\ \alpha \in A)$. Weil L einen kompakt erzeugten Verband darstellt, gilt $x \cap \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A) \leqslant \bigvee(x \cap x_\alpha;\ \alpha \in A)$ und daraus folgt schon die $\bigvee$-Distributivität von L.

Satz 1. *Sei L ein distributiver und kompakt erzeugter Verband. Wenn $a \cup b$, $a \cap b$ $(a, b \in L)$ kompakte Elemente sind, dann sind die Elemente a, b kompakt.*

Beweis. Es genügt sich nur auf den Fall $a \ngeqslant b$, $b \ngeqslant a$ zu beschränken. Sei $a = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A)$, $b = \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B)$, wobei x_α, y_β kompakte Elemente sind. Nach 1.8 ist $a \cap b = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A) \cap \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B) = \bigvee(x_\alpha \cap y_\beta;\ \alpha \in A,\ \beta \in B)$. Sei ferner $x_\alpha \cap y_\beta = \bigvee(z_{\alpha\beta\gamma};\ \gamma \in C_{\alpha\beta})$, wobei $z_{\alpha\beta\gamma}$ kompakte Elemente sind. Dann $a \cap b = \bigvee(\bigvee(z_{\alpha\beta\gamma};\ \gamma \in C_{\alpha\beta});\ \alpha \in A, \beta \in B)$. Der Annahme nach ist $a \cap b$ ein kompaktes Element und daraus folgt die Existenz endlicher Teilmengen $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, wobei $A_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $B_1 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ und endlicher Teilmengen $C'_{\alpha_i\beta_j} \subset C_{\alpha_i\beta_j}$ so, daß $a \cap b = \bigvee(z_{\alpha_i\beta_j\gamma};\ \gamma \in C'_{\alpha_i\beta_j\gamma},\ i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\})$. Betrachten wir die Elemente $a_1 = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A_1)$, $b_1 = \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B_1)$. Daraus folgt $a \cap b \geqslant a_1 \cap b_1 = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A_1) \cap \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B_1) = \bigvee(x_\alpha \cap y_\beta;\ \alpha \in A_1,\ \beta \in B_1) = \bigvee(x_{\alpha_i} \cap y_{\beta_j};\ i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}) \geqslant \bigvee(z_{\alpha_i\beta_j\gamma}; \gamma \in C_{\alpha_i\beta_j}, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}) = a \cap b$. Weiter $a \cup b = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A) \cup \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B)$. Weil $a \cup b$ ein kompaktes Element ist und $a \neq a \cup b \neq b$, existieren nichtleere endliche Teilmengen $A_2 \subset A$, $B_2 \subset B$ so, daß $a \cup b = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A_2) \cup \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B_2)$. Setzen wir $A_3 = A_1 \bigcup A_2$, $B_3 = B_1 \bigcup B_2$. A_3, B_3 sind auch endliche Mengen. Sei $a_2 = \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A_3)$, $b_2 = \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B_3)$. Offenbar gilt $a \geqslant a_2 \geqslant a_1$, $b \geqslant b_2 \geqslant b_1$ und $a_2 \cap b_2 = a \cap b$, weil $a_1 \cap b_1 = a \cap b$. Weiter $a \cup b \geqslant a_2 \cup b_2 \geqslant \bigvee(x_\alpha;\ \alpha \in A_2) \cup \bigvee(y_\beta;\ \beta \in B_2) = a \cup b$. Aus den letzten Beziehungen sieht man, daß

$$(*) \qquad \begin{aligned} a \cup b &\geqslant a \cup b_2 \geqslant a_2 \cup b_2 \geqslant a \cup b \\ a \cup b &\geqslant a_2 \cup b \geqslant a_2 \cup b_2 \geqslant a \cup b \end{aligned}$$

$$(**) \qquad \begin{aligned} a \cap b &= a_1 \cap b_1 \leqslant a \cap b_2 \leqslant a \cap b \\ a \cap b &= a_1 \cap b_1 \leqslant a_2 \cap b \leqslant a \cap b \end{aligned}$$

Es ist bekannt, daß das relative Komplement in einem distributiven Verband eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt $a_2 = a$, $b_2 = b$. Weil die endlichen Vereinigungen kompakter Elemente immer kompakte Elemente sind, sind die Elemente a, b kompakt.

Aus den Behauptungen 1, 1.3, 1.4 und 1.7 folgt

1.9. *Sei S ein distributiver nach unten gerichteter Halbverband. Wenn die verbandstheoretische Vereinigung und der Durchschnitt von Idealen J_1, J_2 des Halbverbandes S Hauptideale sind, dann sind auch J_1, J_2 Hauptideale.*

Die Behauptung 1.9 ist eine Verallgemeinerung der bekannten Behauptung von Idealen in distributiven Verbänden [5, Hilfsatz II]. Mit Hilfe des Satzes 1, 1.1, 1.2 und 1.4 kann man die analoge Behauptung zur 1.9 für distributive Halbverbände beweisen. Den Satz 1 kann man auch bei dem Kongruenzenverband $\Theta(L)$ eines Verbandes L verwenden. Es ist bekannt, daß in $\Theta(L)$ die Kongruenzrelationen der Art $\bigvee(\Theta_{a_i, b_i}; i \in \{1, \ldots, n\})$ alle kompakten Elemente sind, wobei $\Theta_{a,b}$ die kleinste Kongruenzrelation $\Theta \in \Theta(L)$ die die Bedingung $a \equiv b(\Theta)$ befriedigt, bedeutet.

Definition 6. *Ein Ideal P eines Halbverbandes heißt Primideal, wenn man für die Ideale $J_1, J_2, \emptyset \neq J_1 \cap J_2 \subset P$ für irgendein $i \in \{1, 2\}$ $J_i \subset P$ impliziert.*

Definition 7. *Eine Teilmenge D eines Halbverbandes S heißt duales Ideal, wenn es*

(1) *für je zwei Elemente $x, y \in D$ ein Element $z \in D$ gibt, daß $z \leqslant x, z \leqslant y$ und*
(2) *aus $x \geqslant y, y \in D$ $x \in D$ folgt.*

1.10. *Sei P ein Ideal eines nach unten gerichteten Verbandes. P ist ein Primideal genau dann, wenn $S - P$ [5] ein duales Ideal des Halbverbandes S ist.*

Beweis. Sei P ein Primideal. Seien $x, y \in S - P$. Dann gilt offenbar $(x] \cap \cap (y] \neq \emptyset$ und $(x] \cap (y] \not\subset P$. Es existiert ein solches Element $z \in (x] \cap (y]$, daß $z \notin P$. Offenbar $z \leqslant x, y$. Also $S - P$ ist ein duales Ideal. Setzen wir jetzt voraus, daß $S - P$ ein duales Ideal des Halbverbandes S ist. Seien J_1, J_2 Ideale des Halbverbandes S und $J_1 \not\subset P$, $J_2 \not\subset P$. Dann existieren $x \in J_1$, $y \in J_2$ derart, daß $x, y \notin P$. Also $x, y \in S - P$. Daher ist die Existenz eines Elementes $z \in S$ verbürgt, so daß $z \leqslant x, y$ und $z \in S - P$. Also $z \in J_1 \cap J_2$ und $J_1 \cap J_2 \not\subset P$.

Die folgende Behauptung bietet eine Verallgemeinerung des bekannten Stone — Satzes von distributiven Verbänden.

Satz 2. *Sei J ein Ideal, D ein duales Ideal eines distributiven und nach unten gerichteten Halbverbandes S. Sei $J \bigcap D \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge sämtlicher das Ideal J enthaltender und mit dem dualen Ideal D disjunkter Ideale ein maximales Element M. Das Ideal M ist ein Primideal.*

Beweis. Sei $\mathscr{M}_J$ die teilweise geordnete Menge aller Ideale des Halbverbandes S, welche J enthalten und mit D disjunkt sind. Offenbar $\mathscr{M}_J \neq \emptyset$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathscr{M}_J$ ein maximales Element M (eine mengentheoretische Vereinigung einer Idealenkette von $\mathscr{M}_J$ ist wieder ein Ideal aus $\mathscr{M}_J$). Wir zeigen, daß $S - M$ ein duales Ideal ist. Seien $x, y \in S - M$ und $(x] \cap (y] \subset M$. Da M ein maximales Element von $\mathscr{M}_J$ ist, dann $M \cup (x] \neq \neq M \neq M \cup (y]$ und $\{M \cup (x]\} \bigcap D \neq \emptyset$, $\{M \cup (y]\} \bigcap D \neq \emptyset$. Es existieren Elemente $x_1 \in \{M \cup (x]\} \bigcap D$, $y_1 \in \{M \cup (y]\} \bigcap D$. Weiter existiert ein Element $z \in D$ so, daß $z \leqslant x_1, y_1$, weil D der Annahme nach ein duales Ideal

[5] $S - P$ bezeichnet die mengentheoretische Differenz

ist. Dann $z \in \{(M \cup (x]) \cap (M \cup (y])\} \bigcap D$. Aus 1.6 ($S$ ist distributiv) folgt $\{M \cup (x]\} \cap \{M \cup (y]\} = M \cup \{(x] \cap (y]\} = M$. Daher $\{(M \cup (x]) \cap (M \cup \cup (y])\} \bigcap D = \emptyset$, was ein Widerspruch ist.

Unter dem minimalen Primideal (maximalen dualen Ideal) werden wir weiter ein minimales Element (maximales Element) der teilweise geordneten Menge sämtlicher nichtleeren Primideale (nichtleeren und von S verschiedenen dualen Ideale) des Halbverbandes S verstehen.

1.11. *Sei S ein distributiver Halbverband mit dem kleinsten Element 0. Ein Ideal $P \neq S$ ist ein minimales Primideal des Halbverbandes S genau dann, wenn $S - P$ ein maximales duales Ideal des Halbverbandes S ist.*

Beweis. Notwendige Bedingung. Nach 1.10 ist $S - P$ ein duales Ideal. Wäre $S - P$ nicht ein maximales duales Ideal, dann existiert ein duales Ideal D so, daß $S - P \subset D \neq S$, $S - P \neq D$. Offenbar $(0] \bigcap D = \emptyset$. Nach Satz 2 existiert ein Primideal P' des Halbverbandes S derart, daß $P' \bigcap D = \emptyset$. Daraus sieht man $P' \subset P$ und $P' \neq P$. Das führt zum Widerspruch und $S - P$ ist ein maximales duales Ideal.

Hinreichende Bedingung. Sei $S - P$ ein maximales duales Ideal. Nach 1.10 ist P ein Primideal. Wenn $P' \neq \emptyset$ Primideal des Halbverbandes S ist, und $P' \subset P$, dann $S - P' \subset S - P$. $S - P'$ ist nach 1.10 ein duales Ideal. Der Annahme nach ist aber $S - P' = S - P$. Daraus folgt $P' = P$. Also ist P ein minimales Primideal.

1.12. *Sei S ein distibutiver Halbverband mit dem kleinsten Element 0. Zu jedem Primideal $\emptyset \neq P \neq S$ existiert dann ein minimales Primideal Q so, daß $Q \subset P$.*

Beweis. Sei $\emptyset \neq P \neq S$ ein Primideal. Gemäß 1.10 ist $S - P \neq \emptyset$ ein duales Ideal. Sei $\mathscr{D}$ die Menge sämtlicher dualer Ideale D des Halbverbandes S mit der Eigenschaft: $D \neq S$, $D \subset S - P$. Offenbar $\mathscr{D} \neq \emptyset$. $\mathscr{D}$ ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion teilweise geordnet. Der Annahme nach gehört 0 in kein duales Ideal von $\mathscr{D}$. Die mengentheoretische Vereinigung einer Kette von dualen Idealen aus $\mathscr{D}$ ist wieder ein duales Ideal aus $\mathscr{D}$. Aus dem Lemma von Zorn sieht man, daß $\mathscr{D}$ ein maximales Element D enthält. Wir zeigen, daß $Q = S - D$ das gesuchte Ideal ist. Offenbar $D \neq S$. Dann $D \bigcap (0] = \emptyset$. Dem Satz 2 nach existiert ein solches Primideal Q', daß $Q' \bigcap D = \emptyset$. Nach 1.10 ist $S - Q'$ ein duales Ideal und $S - Q' \subset D$. Weil D ein maximales Element in $\mathscr{D}$ ist, folgt $S - Q' = D$. Dann (nach 1.11) ist $Q' = Q = S - D \subset P$ ein minimales Primideal des Halbverbandes S.

Wenn S ein nach unten gerichteter Halbverband ist, dann stellt die Abbildung $x \to (x]$ $(x \in S)$ einen Isomorphismus (bezüglich der Ordnungsrelation) von S in den Verband $I(S)$ aller nichtleeren Ideale des Halbverbandes S dar.

$L(S)$ wird den kleinsten alle Hauptideale umfassenden Teilverband des Verbandes $I(S)$ bezeichnen.

1.13. *Sei S ein nach unten gerichteter Halbverband. S ist distributiv genau dann, wenn $L(S)$ ein distributiver Verband ist. Wenn S distributiv ist, kann man jedes Element $a \in L(S)$ in der Form*

(1) $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ $(a_1, \ldots, a_n \in L(S))$, *wobei für jedes* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *Elemente* $x_{i1}, \ldots, x_{il_i} \in S$ *existieren, so daß* $a_i = (x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$, *schreiben.*

Beweis. Sei S ein distributiver Halbverband. Nach 1.7 ist $I(S)$ ein distributiver Verband und daraus folgt unmittelbar auch die Distributivität des Verbandes $L(S)$. Vorerst beweisen wir den letzten Teil der Behauptung. Jedes Ideal der Art (1) gehört in $L(S)$. Man kann sich leicht überzeugen, daß Ideale der Art (1) einen Teilverband vom $I(S)$ bilden und daß man jedes Hauptideal $(x]$ in der Form (1) schreiben kann. Daraus ergibt sich, daß $L(S)$ von Elementen der Art (1) zusammengesetzt wird. Sei jetzt $L(S)$ ein distributiver Verband. Wir beweisen, daß $I(S)$ distributiv ist. Nehmen wir an, daß $J_1, J_2, J_3 \in L(S)$. Offenbar $J_1 \cap (J_2 \cup J_3) \supset (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$. Sei $t \in J_1 \cap$ $\cap (J_2 \cup J_3)$. Dann $t \in J_1$ und es existieren solche Elemente $x \in J_2$, $y \in J_3$, daß $t \leqslant x \cup y$. Offenbar $(t] = (t] \cap (x \cup y] = (t] \cap \{(x] \cup (y]\} \in L(S)$. Der Annahme nach ist $(t] = \{(t] \cap (x]\} \cup \{(t] \cap (y]\} \subset (J_1 \cap J_2) \cup (J_1 \cap J_3)$. Aus 1.7 folgt dann die Distributivität von S.

2. PSEUDOKOMPLEMENTÄRE HALBVERBÄNDE

Definition 8. *Sei S eine teilweise geordnete Menge, $a, b \in S$. Ein Element $a_* b \in S$ heißt relativer Pseudokomplement von dem Element a bezüglich des Elementes b, wenn für je zwei Elemente $x, y \in S$ gilt:*

$$(y \leqslant a, y \leqslant x \Rightarrow y \leqslant b) \Leftrightarrow x \leqslant a_* b \tag{2}$$ [6]

Eine teilweise geordnete Menge S heißt relativ pseudokomplementär, wenn für je zwei $a, b \in S$ das Element $a_* b \in S$ existiert. Wenn die teilweise geordnete Menge S das kleinste Element 0 besitzt und für jedes $a \in S$ das Element $a_* 0 \in S$ existiert, dann werden wir S eine pseudokomplementäre, teilweise geordnete Menge nennen, das Element $a_* 0$ mit a^* bezeichnen und ein Pseudokomplement von a nennen.

Man kann leicht einsehen, daß $a_* b$ eindeutig bestimmt ist. Wenn die Menge S aus der Definition 8 einen Halbverband darstellt, dann werden wir über einen relativ pseudokomplementären bzw. pseudokomplementären Halbverband

[6] „$\Rightarrow$" bzw. „$\Leftrightarrow$" bezeichnet die Implikation bzw. die logische Äquivalenz.

sprechen. Im Falle, daß S einen Verband darstellt, ist die Definition 8 mit der Definition des relativ pseudokomplementären bzw. des pseudokomplementären Verbandes äquivalent [1, IX, §12].

Ohne Schwierigheit kann man beweisen, daß für eine pseudokomplementäre teilweise geordnete Menge S folgendes gilt:

(3) $a \leqslant b \Rightarrow a^* \geqslant b^*$,
$a \leqslant a^{**}$,
$a^* = a^{***}$.

Aus (3) folgt, daß $0^* = I$ das größte Element von S ist.

Frink [3] untersuchte folgende $\cap$-Halbverbände:

Sei P eine Menge auf der eine binäre Relation $\cap$ erklärt ist, ein Element $0 \in P$ existiert und für jedes $a \in P$ gibt es ein Element $a^* \in P$ mit folgenden Eigenschaften:

(4) $a \cap b = b \cap a$ *für alle* $a, b \in P$,
(5) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ *für alle* $a, b, c \in P$,
(6) $a \cap a = a$ *für alle* $a \in P$ *und*
(7) $a \cap b = 0 \Leftrightarrow a \cap b^* = a$ *für alle* $a, b \in P$.

Aus (4) — (6) sieht man, daß P eine teilweise geordnete Menge ist, wobei $a \leqslant b \Leftrightarrow a \cap b = a$ und $a \cap b$ ist das Infimum der Elemente $a, b \in P$ bezüglich dieser Ordnungsrelation. Man kann zeigen (siehe[3]), daß (7) mit

(7a) $a \cap b = 0 \Leftrightarrow a \leqslant b^*$ für alle $a, b \in P$

äquivalent ist.

Aus (4) — (7a) folgt, daß P eigentlich ein pseudokomplementärer $\cap$-Halbverband im Sinne der Definition 8 ist.

Definition 9. *Sei S eine pseudokomplementäre teilweise geordnete Menge. Ein Element $a \in S$ heißt abgeschlossen, wenn $a = a^{**}$. $B(S)$ bezeichnet die Menge sämtlicher abgeschlossener Elemente von S.*

Aus (3) und Definition 9 folgt

2.1. *Sei S eine pseudokomplementäre teilweise geordnete Menge. Ein Element $a \in S$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ein Element $x \in S$ existiert, daß $x^* = a$.*

Ferner gilt

2.2. (Frink). *Sei P ein pseudokomplementärer $\cap$-Halbverband. Dann bildet die Menge sämtlicher abgeschlossener Elemente $B(P)$ einen Booleschen Verband, wobei für je zwei $a, b \in B(P)$ $a \leqslant b$ in $B(P)$ genau dann gilt, wenn auch $a \leqslant b$ in S gilt. Weiter stimmt $a \cap b$ in $B(P)$ mit dem $a \cap b$ in S überein, $\grave{a} = a^*$ ($\grave{a}$ bezeichnet das Komplement von a in $B(P)$) und die Vereinigungsoperation in $B(P)$ ist wie folgt gegeben: $a \vee b = (a^* \cap b^*)^*$.*

Beweis siehe in [3, Satz 1]. Eine ähnliche Behauptung beweisen wir für unsere pseudokomplementären Halbverbände.

Satz 3. *Sei S ein pseudokomplementärer Halbverband. Dann bildet die Menge sämtlicher abgeschlossener Elemente $B(S)$ einen Booleschen Verband, wobei $a \leqslant b$ in $B(S)$ $(a, b \in B(S))$ genau dann, wenn $a \leqslant b$ in S. Wenn $a, b \in B(S)$, dann existiert das Element $a \cap b$ in S und $a \cap b \in B(S)$. Für $a \in B(S)$ ist auch $a^* \in B(S)$ und a^* ist das Komplement von a in $B(S)$. Die Vereinigungsoperation in $B(S)$ ist wie folgt erklärt: $a \vee b = (a \cup b)^{**}$.*

Vorerst beweisen wir einen Hilfsatz

2.3. *Sei S ein pseudokomplementärer Halbverband.*

a) *Sei $\{x_\alpha; \alpha \in A\} \subset S$. Wenn die Elemente $\bigvee (x_\alpha; \alpha \in A)$, $\bigvee (x_\alpha^{**}; \alpha \in A)$ in S existieren, dann existiert im Halbverband S das Element $\bigwedge(x_\alpha^*; \alpha \in A)$, welches in die Menge $B(S)$ gehört und $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* = \bigwedge(x_\alpha^*; \alpha \in A)$.*

b) *Wenn $a, b \in B(S)$, dann existiert das Element $a \cap b$ in S und $a \cap b \in B(S)$.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß Elemente $\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A)$, $\bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A)$ in S existieren. Nach 2.1 ist $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \in B(S)$. Weil $\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A) \geqslant x_\alpha$ für alle $\alpha \in A$, dann ist nach (3) $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \leqslant x_\alpha^*$ für alle $\alpha \in A$. Sei $t \in S$ und $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \leqslant t \leqslant x_\alpha^*$ für alle $\alpha \in A$. Dann ist nach (3) $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^{**} \geqq \geqslant t^* \geqslant x_\alpha^{**}$ für alle $\alpha \in A$. Aus der letzten Beziehung folgt $t^* \geqslant \bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A)$. Wenn $z \in B(S)$ und $z \geqslant \bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A)$, dann ist nach (3) $z^{**} = z \geqslant \geqslant (\bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A))^{**}$. Weil $t^* \in B(S)$, darum $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^{**} \geqslant t^* \geqslant (\bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A))^{**}$. Aus (3) sieht man, daß für alle $\alpha \in A$ $x_\alpha \leqslant x_\alpha^{**}$ ist. Daraus ergibt sich, daß $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^{**} \leqslant (\bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A))^{**}$. Also $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^{**} = = t^* = \bigvee(x_\alpha^{**}; \alpha \in A))^{**}$. Aus $t \leqslant t^{**}$ und $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A)(^* = t^{**}$ sieht man, daß $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* = t = t^{**}$. Damit wurde bewiesen, daß $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^*$ ein maximales Element von S für alle $\alpha \in A$ unten allen Elementen x_α^* liegt. Wenn $p \in S$ und $p \leqslant x_\alpha^*$ für alle $\alpha \in A$, dann $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \leqslant p \cup (\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \leqslant x_\alpha^*$ für alle $\alpha \in A$. Aus der Maximalität des Elementes $(\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^*$ folgt $p \leqslant (\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^*$. Also existiert das Element $\bigwedge(x_\alpha^*; \alpha \in A)$ in S und $\bigwedge(x_\alpha^*; \alpha \in A) = (\bigvee(x_\alpha; \alpha \in A))^* \in B(S)$.

Der zweite Teil der Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus der Tatsache $a \cap b = a^{**} \cap b^{**} = (a^* \cup b^*)^*$.

Beweis des Satzes 3. Betrachten wir die teilweise geordnete Menge $B(S)$ ($a \leqslant b$ in $B(S)$ genau dann, wenn $a \leqslant b$ in S). Zuerst zeigen wir, daß $B(S)$ bezüglich dieser Ordnungsrelation einen Verband darstellt. Nach 2.3 für a, $b \in B(S)$ existiert $a \cap b$ in S und $a \cap b \in B(S)$. Also das Infimum von je zwei Elementen aus $B(S)$ existiert in $B(S)$. Seien $a, b, t \in B(S)$, $a, b \leqslant t$. Dann ist auch $a \cup b \leqslant t$. Selbstverständlich auch $(a \cup b)^{**} \leqslant t^{**} = t$. Weil $(a \cup b)^{**} \in \in B(S)$ und $(a \cup b) \leqslant (a \cup b)^{**}$, ist das Supremum $a \vee b = (a \cup b)^{**}$ für a

$b \in B(S)$. Offenbar $0, I \in B(S)$ $(I = 0^*)$. Wir zeigen, daß $B(S)$ ein pseudokomplementärer $\cap$-Halbverband im Sinne der Definition von Frink ist. Es ist nur die Bedingung (7) für $B(S)$ zu beweisen. Sei $a, b \in B(S)$. Wenn $a \cap b = 0$, dann folgt aus 2.3, daß das Infimum von den Elementen a, b in S gleich dem Element 0 ist, d. h. aus $a \geqslant t$, $b \geqslant t$ folgt $t = 0$. Der Definition 8 gemäß ist dann $a \leqslant b^*$, davon $a \cap b^* = a$. Wenn $a \cap b^* = a$, dann $a \leqslant b^*$ und aus der Definition 8 sieht man, daß $a \cap b = 0$ in S. Nach 2.3 ist auch $a \cap b = 0$ in $B(S)$. Also $B(S)$ erfüllt auch die Bedingung (7). Nach 2.2 ist $\bar{B} = B(B(S))$ ein Boolescher Verband bezüglich der Operationen $a \mathbin{\vee\!\!\!\vee} b = (a^* \cap b^*)^*$, $a \cap b$ $(a, b \in \bar{B})$. Offenbar ist die Operation $\cap$ in $\bar{B}$ mit der Operation $\cap$ in $B(S)$ übereinstimmend (siehe 2.2) und $\bar{B} = B(S)$. Aus 2.3 folgt $a \mathbin{\vee\!\!\!\vee} b = (a^* \cap \cap b^*)^* = (a \cup b)^{**} = a \vee b$. Also ist auch die Operation $\mathbin{\vee\!\!\!\vee}$ mit der Operation $\vee$ identisch. Weil $\bar{B} = B(S)$, bekommen wir aus 2.2, daß $B(S)$ einen Booleschen Verband bildet. Daß $a^* \in B(S)$ das Komplement von a in $B(S)$ bildet, folgt auch aus 2.2.

Aus 2.3 folgt unmittelbar

2.4. *Sei S ein pseudokomplementärer Halbverband. Seien $x_1, \ldots, x_n \in S$. Dann $(\bigvee(x_i; i \in \{1, \ldots, n\}))^* = \bigwedge(x_i^*; i \in \{1, \ldots, n\})$.*

Jetzt verallgemeinern wir den bekannten Satz von Glivenko [1, IX, Satz 16] auf die Halbverbände, analogerweise, wie es Frink [3, Satz 2] für $\cap$-Halbverbände durchgeführt hat.

Satz 4. *Die Abbildung $\varphi: a \to a^{**}$ des pseudokomplementären Halbverbandes S auf den Booleschen Verband $B(S)$ ist eine auf S erklärte Hüllenoperation, wobei $\varphi(a \cup b) = (\varphi(a) \cup \varphi(b))^{**}$, $\varphi(a^*) = [\varphi(a)]^*$, $\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$ (wenn $a \cap b$ in S existiert) und $0^{**} = 0$. Wenn S ein vollständiger Verband ist, dann ist $B(S)$ ein vollständiger Boolescher Verband, wobei das Infimum von Elementen aus $B(S)$ in $B(S)$ mit dem Infimum derselben Elemente in S identisch ist. Wenn S ein Verband ist, dann stellt die Abbildung $a \to a^{**}$ einen Homomorphismus dar. Im distributiven Verband ist $a^{**} = b^{**}$ genau dann, wenn $a \cap d = b \cap d$ für ein dichtes Element gilt, d. h. für ein Element, das die Gleichung $d^{**} = 0^* = I$ befriedigt.*

Bemerkung. Frink hat in [3, S. 511] gezeigt, daß die Formulation des Satzes von Glivenko in [1, IX, Satz 16] nicht korrekt ist. Ein Boolescher Verband von abgeschlossenen Elementen des unvollständigen pseudokomplementären Verbandes muß nicht vollständig sein. Z. B., es sei B ein unvollständiger Boolescher Verband (offenbar ist B distributiv und pseudokomplementär). Dann besteht der Boolesche Verband der abgeschlossenen Elemente von B aus denselben Elementen wie die Menge B und B ist der Annahme nach nicht vollständig.

Beweis des Satzes 4. Es ist aus dem Satz 3 bekannt, daß $a \leqslant b$ in

$B(S)$ $(a, b \in B(S))$ genau dann wenn $a \leqslant b$ in S. Aus (3) sieht man, daß die Abbildung $\varphi : a \to a^{**}$ eine Hüllenoperation auf S ist und $[\varphi(a)]^* = \varphi(a^*)$. Für $a, b \in S$ folgt aus 2.4 $(a \cup b)^{**} = (a^* \cap b^*)^*$. Aus 2.1 bekommen wir $a^*, b^* \in B(S)$ und gemäß 2.4 ist $(a^* \cap b^*)^* = a^{**} \vee b^{**}$, d. h. $\varphi(a \cup b) = [\varphi(a) \cup \cup \varphi(b)]^{**}$. Offenbar $0^{**} = I^* = 0$. Jetzt zeigen wir, daß $\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \cap \varphi(b)$, wenn $a \cap b$ in S existiert. Gemäß 2.3b existiert das Element $a^{**} \cap b^{**}$ in S und gehört in $B(S)$ (wir nehmen an, daß $a \cap b$ in S existiert). Nach (3) ist $a^{**} \cap b^{**} \geqslant a \cap b$ und daraus $(a^{**} \cap b^{**})^* \leqslant (a \cap b)^*$. Aus 2.1 folgt $(a \cap b)^* \in B(S)$. Das Element $y = (a^{**} \cap b^{**}) \cap (a \cap b)^*$ existiert in S (siehe 2.3b). Es ist zu zeigen, daß $y = 0$ ist. Offenbar $y \leqslant a^{**}, b^{**}$. Sei $z \in S$ und $z \leqslant a, z \leqslant y$. Wenn $t \leqslant b, t \leqslant z$, dann ist $t \leqslant a \cap b, y$. Weil $y \leqslant (a \cap b)^*$, dann sieht man aus der Definition 8, daß $t = 0$. Also $b \cap z = 0$ in S d. h. $z \leqslant b^*$. Zugleich $z \leqslant b^{**}$ und $0 \leqslant z \leqslant b^* \cap b^{**} = 0$. Also $a \cap y = 0$ in S. Davon ist $y \leqslant a^*$. Zugleich ist auch $y \leqslant a^{**}$. Aus den letzten Relationen bekommen wir $0 \leqslant y \leqslant a^* \cap a^{**} = 0$. Also $y = 0$ und $(a^{**} \cap b^{**})^* = = (a \cap b)^* \in B(S)$. Daraus folgt $(a \cap b)^{**} = (a^{**} \cap b^{**})^{**} = a^{**} \cap b^{**}$. Aus den bisherigen Ergebnissen ergibt sich, daß die Abbildung $a \to a^{**}$ ein Verbandshomomorphismus ist, wenn S einen Verband darstellt. Es existiere jetzt in S $\bigvee(x_\alpha;\, \alpha \in A)$ für jede Teilmenge $\{x_\alpha;\, \alpha \in A\} \subset S$. Sei $\{y_\gamma;\, \gamma \in C\} \subset \subset B(S)$ (7). Dann gilt nach 2.3 $(\bigvee(y_\gamma^*;\, \gamma \in C))^* = \bigwedge(y_\gamma^{**};\ \gamma \in C) = \bigwedge(y_\gamma;\ \gamma \in C) \in B(S)$. Das Ergebnis der Operation $\bigvee$ in S bzw. in $B(S)$ ($\bigwedge$ verwendet man auf die Elemente von $B(S)$) ist in beiden Fällen übereinstimmend. Weil $B(S)$ auch das größte Element besitzt, muß $B(S)$ ein vollständiger Boolescher Verband sein. Den letzten Teil unserer Behauptung beweist man wie in [1, IX, Satz 16], wenn man $d = (a^* \cup b) \cap (a \cup b^*)$ setzt. Allerdings müssen wir voraussetzen, daß S ein distributiver Verband ist. Man überzeugt sich leicht, daß für den fünfelementigen nichtdistributiven Verband der letzte Teil des Satzes nicht gilt. Im Beispiel 3.4 werden wir einsehen, daß dies nicht einmal für distributive Halbverbände gelten muß.

2.5. *In einem pseudokomplementären Verband S für $x_1, \ldots, x_n \in S$ gilt folgendes*: $(x_1 \cap \ldots \cap x_n)^* = (x_1^* \cup \ldots \cup x_n^*)^{**}$.

Beweis. Mit Hilfe des Satzes 4 beweist man, daß $(x_1 \cap \ldots \cap x_n)^* = = (x_1 \cap \ldots \cap x_n)^{***} = x_1^* \vee \ldots \vee x_n^*$. Mit dem Induktionsverfahren nach n beweisen wir $(x_1^* \cup \ldots \cup x_n^*)^{**} = x_1^* \vee \ldots \vee x_n^*$. Für $n = 2$ ist es trivial. Nehmen wir $(x_1^* \cup \ldots \cup x_{n-1}^*)^{**} = x_1^* \vee \ldots \vee x_{n-1}^*$ an. Dann $(x_1^* \cup \ldots \cup \cup x_n^*)^{**} = [(x_1^* \cup \ldots \cup x_{n-1}^*) \cup x_n^*]^{**} = (x_1^* \cup \ldots \cup x_{n-1}^*)^{**} \vee x_n^* = x_1^* \vee \vee \ldots \vee x_n^*$.

[1, IX, Satz 15] behauptet, daß ein vollständiger Verband genau dann

(7) Im Beweis benutzen wir zwar, daß S ein $\vee$-vollständiger Halbverband ist, aber wie man leicht einsehen kann, ist es damit äquivalent, daß S ein vollständiger Verband ist.

relativ pseudokomplementär ist, wenn L $\bigvee$-distributiv ist. Mit dem gleichen Verfahren kann man dieses Resultat sogar für die $\bigvee$-vollständige Verbände gewinnen. Daraus und aus 1.4 — 1.8 bekommen wir

2.6. *Ein nach unten gerichteter Halbverband S ist genau dann distributiv, wenn der Verband $I(S)$ sämtlicher nichtleerer Ideale des S relativ pseudokomplementär ist.*

2.7. *Sei S ein distibutiver Halbverband mit dem kleinsten Element. Dann ist S pseudokomplementär genau dann, wenn für jedes $x \in S$ $(x]^*$*(8) *ein Hauptide al ist. In diesem Falle ist $(x]^* = (x^*]$.*

Beweis. Wenn S ein distributiver und pseudokomplementärer Halbverband ist, dann ist nach 2.6 $I(S)$ pseudokomplementär. Offenbar $(x^*] \subset (x]^*$. Falls $y \in (x]^*$, dann $(x] \cap (y] = (0]$. Daher folgt $y \leqslant x^*$. Also $(x]^* = (x^*]$. Umgekehrt, wenn für jedes $x \in S$ ein solches $d \in S$ existiert, daß $(x]^* = (d]$, dann $d = x^*$.

2.8. *Sei S ein distributiver nach unten gerichteter Halbverband. Seien $a, b \in S$, $a \nleqslant b$. Es bezeichne $\mathscr{P}_{a,b}$ die Menge sämtlicher b enthaltender und a nichtenthaltender Primideale des Halbverbandes S. Dann gilt:*

(1) *Das relative Pseudokomplement a_*b existiert genau dann, wenn ein solches $c \in S$ existiert, daß $(c] = \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$;*

(2) *Falls a_*b existiert, dann $(a_*b] = \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$.*

Beweis. Es existiere a_*b. Setzen wir $J = (b]$, $D = [a)$. Aus dem Satz 2 sieht man, daß $\mathscr{P}_{a,b} \neq \emptyset$. Nehmen wir $P \in \mathscr{P}_{a,b}$ an. Offenbar $(a] \cap (a_*b] \subset \subset (b] \subset P$. Weil $(a] \not\subset P$, dann $(a_*b] \subset P$. Also $a_*b \in \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$. Wenn $d \in \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$ und $d \nleqslant a_*b$, dann existiert der Definition 8 nach ein solches $y \in S$, daß $y \leqslant a$, $y \leqslant d$ aber $y \nleqslant b$. Dem Satz 2 nach gibt es ein Primideal P so, daß $y \notin P$ und $b \in P$. Offenbar $a, d \notin P$. Daher $P \in \mathscr{P}_{a,b}$. Daraus $d \in P$ und wir bekommen einen Widerspruch. Also $(a_*b] = \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$.

Sei $(c] = \bigwedge(P;\, P \in \mathscr{P}_{a,b})$. Sei $y \leqslant a$, $y \leqslant c$. Falls $y \nleqslant b$, dann gibt es dem Satz 2 nach ein Primideal P so, daß $y \notin P$, $b \in P$. Offenbar $a, c \notin P$. Anderseits aber $P \in \mathscr{P}_{a,b}$, d. h. $c \in P$, was ein Widerspruch ist. Also $y \leqslant b$, was mit der Behauptung $(a] \cap (c] \subset (b]$ äquivalent ist. Sei $(a] \cap (x] \subset (b]$ $(x \in S)$. Offenbar $(x] \subset P$ für alle $P \in \mathscr{P}_{a,b}$, weil $(a] \not\subset P$. Also $x \leqslant c$. Daraus folgt $c = a_*b$.

Satz 5. a) *Sei S ein distributiver und nach unten gerichteter Halbverband. S ist genau dann relativ pseudokompelementär, wenn S*

(1) *das größte Element I enthält und*

(2) *für jede $a \nleqslant b$ $(a, b \in S)$ der Durchschnitt aller b enthaltenden aber a nichtenthaltenden Primideale ein Hauptideal ist.*

---

(8) $(x]^*$ bedeutet das Pseudokomplement in $I(S)$.

b) *Sei S ein distributiver Halbverband mit dem kleinsten Element 0. S ist genau dann pseudokomplementär, wenn für jedes $a > 0$ ($a \in S$) der Durchschnitt aller nichtleeren, das Element a nichtenthaltenden Primideale (minimale Primideale) des Halbverbandes S ein Hauptideal ist.*

Beweis. a) Nehmen wir vorerst an, daß S ein relativ pseudokomplementärer Halbverband ist. Wählen wir $a \leqslant b$ ($a, b \in S$) aus. Dann gilt offenbar $a_*b = I$. Nach 2.8 gilt ferner (2). Umgekehrt, aus (2) und (1) folgt (siehe 2.8) die relative Pseudokomplementarität des S.

b) Der Definition 8 nach ist $a_*0 = a^*$. Es bezeichne $\mathscr{P}_a$ ($\mathscr{M}_a$) für $a \in S$, $a > 0$ die Menge der sämtlichen nichtleeren das Element a nichtenthaltenden Primideale (minimalen Primideale) des Halbverbandes S. Falls $J = (0]$, setzt man $D = [a)$, dann sieht man aus dem Satz 2, daß $\mathscr{P}_a \neq \emptyset$. Für jedes $P \in \mathscr{P}_a$ existiert nach 1.12 ein minimales Primideal $Q \subset P$. Offenbar $Q \in \mathscr{M}_a$. Also $\mathscr{M}_a \neq \emptyset$ und $\bigwedge(P; P \in \mathscr{M}_a) \subset \bigwedge(P; P \in \mathscr{P}_a)$. Weil $\mathscr{M}_a \subset \mathscr{P}_a$, dann $\bigwedge(P; P \in \mathscr{M}_a) = \bigwedge(P; P \in \mathscr{P}_a)$. Aus 2.8 (in 2.8 wird $\mathscr{P}_a$ als $\mathscr{P}_{a,0}$ bezeichnet) bekommen wir schon unsere Behauptung betreffs der minimalen Primideale.

Satz 5 verallgemeinert [6, Satz 1, 2]. Es ist bekannt, [1, IX, Satz 15, Folgerung], daß relativ pseudokomplementäre Verbände distributiv sind. Für relativ pseudokomplementäre Halbverbände muß das nicht gelten. Das folgende Beispiel weist darauf hin.

2.9. Beispiel. Es bezeichne N die Menge der natürlichen Zahlen. Bezeichne mit a', b' irgendwelche zwei verschiedene nicht in N gehörende Elemente. Betrachten wir $I = N \bigcup \{a', b'\}$. Sei $S = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}, \ldots, \{a'\}, \{a', 1\}, \ldots, \{a', 1, \ldots, n\}, \ldots, \{a'\} \bigcup N, I\}$. S bildet bezüglich der mengentheoretischen Vereinigung einen Halbverband (die Ordnung ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion). Setzen wir $a = \{a'\} \bigcup N$, $b = \{b'\} \bigcup N$ und $a_0 = \{a'\}$. Dann $a \leqslant a_0 \cup b = I$. Keine Elemente p, $q \in S$ befriedigen die Bedingungen $p \leqslant a_0$, $q \leqslant b$ und $a = p \cup q$. Dann ist nach 1.5 S kein distributiver Halbverband. Diese Situation veranschaulicht uns Fig. 1, wo die Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit n und die Menge $\{a', 1, \ldots, k\}$ mit a_k bezeichnet wird. Jetzt weisen wir nach, daß S ein relativ pseudokomplementärer Halbverband ist. Offenbar, wenn $x, y \in S$, $x \leqslant y$, dann $x_*y = I$. Weiter werden wir nur die Fälle $x \nleqslant y$ überprüfen. $1_*0 = 2_*0 = \ldots = n_*0 = \ldots = b_*0 = a_0$, $I_*0 = 0$, $a_{0*}0 = b$, $a_{1*}0 = a_{2*}0 = \ldots = a_{n*}0 = \ldots = a_*0 = 0$. Seien $i, j \in N$, $i < j$. Dann $a_{0*}i = a_{1*}i = \ldots = a_{i*}i = b$, $a_{j*}i = a_*i = i = I_*i = i$, $j_*i = = a_i = b_*i$. Ferner $a_{0*}b = a_{1*}b = \ldots = a_{n*}b = \ldots = a_*b = b$, $1_*a_0 = \ldots = = n_*a_0 = \ldots = b_*a_0 = I_*a_0 = a_0$, $a_{1*}a_0 = \ldots = a_{n*}a_0 = \ldots = a_*a_0 = a_0$, $a_{i+1*}a_i = \ldots = a_{i+k*}a_i = \ldots a_*a_i = b_*a_i = I_*a_i = (i + 1)_*a_i = \ldots = = (i + k)_*a_i = \ldots = a_i$, $b_*a = I_*a = a$.

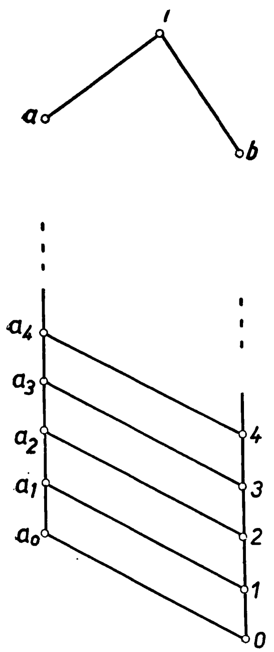

Fig. 1

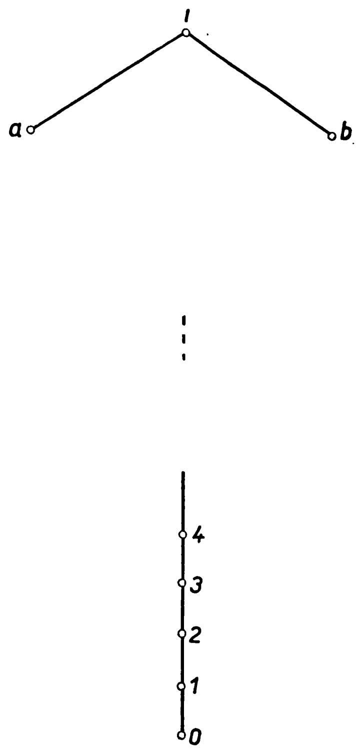

Fig. 2

3. STONESCHE HALBVERBÄNDE

Die nachstehende Definition verallgemeinert den Begriff des Stoneschen Verbandes (siehe [4]).

Definition 10. *Sei S ein distributiver und pseudokomplemetärer Halbverband (Verband). S heißt Stonescher Halbverband (Verband), falls für jedes $a \in S$ $a^* \cup a^{**} = I$ (I bezeichnet das größte Element in S) gilt.*

Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es Stonesche Halbverbände, die keine Verbände sind.

3.1. Beispiel. N bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen, a', b' sind verschiedene in die Menge N nichtgehörende Elemente. Dann sei $I = \{a', b'\} \cup N$. Sei ferner $S = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}, \{a'\} \cup N, \{b'\} \cup N, I\}$. S stellt bezüglich der mengentheoretischen Vereinigung einen Halbverband (die Ordnung ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion) dar. In Fig. 2

wird das Diagram des S dargestellt (a bezeichnet $\{a'\} \cup N$, b bezeichnet $\{b'\} \cup N$ und n bezeichnet $\{1, \ldots, n\}$). Die Überprüfung sämtlicher Fälle bestätigt uns, daß S ein distributiver Halbverband ist. Offenbar, $1^* = 2^* = \ldots = n^* = \ldots = a^* = b^* = I^* = 0$, $0^* = I$. S bildet sogar einen Stoneschen Halbverband. Das Element $a \cap b$ existiert in S nicht und S ist kein Verband.

Die folgende Behauptung verallgemeinert [3, Satz 3].

Satz 6. *Sei S ein distributiver und pseudokomplementärer Halbverband. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) *$a^* \cup a^{**} = I$ für alle $a \in S$;*

(2) *für jede zwei $a, b \in S$ für welche $a \cap b$ in S existiert, gilt $(a \cap b)^* = a^* \cup b^*$;*

(3) *der Boolesche Verband $B(S)$ der abgeschlossenen Elemente bildet einen Teilverband des S.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3). Sei a, $b \in B(S)$ (siehe die Definition 9). Dann existiert nach 2.1 a^*, $b^* \in B(S)$ und nach 2.3 $a^* \cap b^*$ in S. Der Annahme nach ist $a = a^{**}$, $b = b^{**}$. Wir gehen zum Verband $I(S)$ der sämtlichen nichtleeren Ideale des S über. Nach 1.7 ist $I(S)$ distributiv. Dann $(a \cup b] \cap (a^* \cap b^*] = \{(a] \cup (b]\} \cap (a^* \cap b^*] = \{(a] \cap (a^* \cap b^*]\} \cup \{(b] \cap (a^* \cap b^*]\} = \{(a] \cap (a^*] \cap (b^*]\} \cup \{(b] \cap (b^*] \cap (a^*]\} = (0]$. Also $a \cup b \leqslant (a^* \cap b^*)^*$. Zwar $(a \cup b] \cup (a^* \cap b^*] = (a^{**} \cup b^{**}] \cup \{(a^*] \cap (b^*]\} = (a^{**} \cup b^{**} \cup a^*] \cap (a^{**} \cup b^{**} \cup b^*] = (I]$. Daraus $((a^* \cap b^*)^*] \cup (a^* \cap b^*] = (I]$. Weil $I(S)$ distributiv ist, muß $(a \cup b] = ((a^* \cap b^*)^*]$, was zu $a \cup b = (a^* \cap b^*)^*$ führt. Also $a \cup b \in B(S)$ und $(a \cup b)^{**} = a \cup b$. Gemäß Satz 3 ist dann $B(S)$ ein Teilverband des S.

(3) $\Rightarrow$ (2). Es existiere $a \cap b$ in S (a, $b \in S$). Dann sieht man aus dem Satz 4 und der Annahme, daß $(a \cap b)^* = \{(a \cap b)^{**}\}^* = (a^{**} \cap b^{**})^* = a^{***} \vee b^{***} = a^{***} \cup b^{***} = a^* \cup b^*$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Offenbar für alle $a \in S$ existiert $a \cap a^*$ in S und $a \cap a^* = 0$. Dann gilt der Annahme nach $(a \cap a^*)^* = 0^* = I = a^* \cup a^{**}$ für alle $a \in S$.

Vor der Behauptung 1.13 haben wir den Verband $L(S)$ definiert. Das war der kleinste, alle Hauptideale $(x]$ $(x \in S)$ eines nach unten gerichteten Halbverbandes S umfassende Teilverband des Verbandes $I(S)$.

3.2 a) *Sei S ein distributiver und pseudokomplementärer Halbverband. Dann ist $L(S)$ ein Teilverband des pseudokomplementären Verbandes $I(S)$, wobei falls $a \in L(S)$, dann auch $a^* \in L(S)$.*

b) *Sei S ein Halbverband mit dem kleinsten Element 0. S ist ein Stonescher Halbverband genau dann, wenn $L(S)$ ein Stonescher Verband ist.*

Beweis. a) Es ist nur der letzte Teil zu beweisen, d. h. falls $a \in L(S)$, dann auch $a^* \in L(S)$. Aus 2.6 wissen wir, daß $I(S)$ ein pseudokomplementärer Verband ist. Nach 2.7 ist für jedes $x \in S$ $(x^*] = (x]^*$. Sei $a \in L(S)$. Dann nach 1.13 $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ $(a_1, \ldots, a_n \in L(S))$ wobei für jedes $a_i = (x_{i1}] \cap$

$\cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ und $x_{i1}, \ldots, x_{il_i} \in S$. Mit Hilfe von 2.4 bekommen wir $a^* = a_1^* \cap \ldots \cap a_n^*$. Nach 2.5 und 2.7 wieder $a_i^* = \{(x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]\}^* = \{(x_{i1}]^* \cup \ldots \cup (x_{il_i}]^*\}^{**} = \{(x_{i1}^* \cup \ldots \cup x_{il_i}^*]\}^{**} = ((x_{i1}^* \cup \ldots \cup x_{il_i}^*)^{**}]$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Also ist a_i^* ein Hauptideal. Dem Satz 3 nach ist a^* ebenso ein Hauptideal und $a^* \in L(S)$.

b) Sei S ein Stonescher Halbverband. Dann gehört $(0], (I] \in L(S)$, $(0]$ ist das kleinste und $(I]$ das größte Element in $L(S)$. Aus a) folgt, daß $L(S)$ ein distributiver und pseudokomplementärer Verband ist. Sei $a \in L(S)$. Dann $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$, wobei für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = (x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ ist. Wie im vorigen Teil gezeigt wurde, ist $a_i^* = (y_i^*]$, wo $y_i = (x_{i1}^* \cup \ldots \cup x_{il_i}^*)^{**}$ und $a^* = a_1^* \cap \ldots \cap a_n^*$. Dann gilt $a^* = (y_1^*] \cap \ldots \cap (y_n^*]$. Ferner nach 2.5 und 2.7 gilt $a^{**} = \{(y_1^*]^* \cup \ldots \cup (y_n^*]^*\}^{**} = (y_1^{**} \cup \ldots \cup y_n^{**}]^{**}$. Daraus folgt $a^* \cup a^{**} \supset \{(y_1^*] \cap \ldots \cap (y_n^*]\} \cup (y_1^{**} \cup \ldots \cup y_n^{**}] = \{(y_1^*] \cup (z]\} \cap \ldots \cap \{(y_n^*] \cup (z]\}$, wo $z = y_1^{**} \cup \ldots \cup y_n^{**}$. Offenbar $(y_i^*] \cup (z] = (I]$. Also $a^* \cup a^{**} = (I]$ und $L(S)$ bildet einen Stoneschen Verband.

Sei $L(S)$ ein Stonescher Verband. Nach 1.13 ist S ein distributiver Halbverband. $L(S)$ besitzt das größte Element J. Aus 1.13 ergibt sich, daß für jedes $a \in L(S)$ ein solches $x \in S$ existiert, daß $(x] \subset a$. Daraus sieht man, daß J ein Hauptideal ist, d. h. $J = (I]$. Weil $L(S)$ alle Hauptideale enthält, muß I das größte Element in S sein. Wir zeigen noch, daß S ein pseudokomplementärer Halbverband ist. Sei $x \in S$. Dann ist der Annahme nach $(x]^+ \cup (x]^{++} = (I]$, $(x]^+ \cap (x]^{++} = (0]$ ($(x]^+$ bezeichnet das Pseudokomplement in $L(S)$). Nach 1.9 ist $(x]^+ = (c]$, $(x]^{++} = (d]$ $(c, d \in S)$. Weil $(x] \cap (x]^+ = (0]$, dann $(x]^+ \subset (x]^*$. Sei $y \in (x]^*$. Dann gilt $(x] \cap (y] = (0]$. Weil $(y] \in L(S)$, dann $(y] \subset (x]^+$. Also $(x]^+ = (x]^* = (c]$. Nach 2.7 ist dann S ein pseudokomplementärer Halbverband und $(x]^* = (x]^+ = (x^*]$. Aus dieser Voraussetzung sieht man, daß $(x^* \cup x^{**}] = (x^*] \cup (x^{**}] = (x]^* \cup (x]^{**} = (I]$. Also $x^* \cup x^{**} = I$ und S ist ein Stonescher Halbverband.

Unser nächstes Ziel ist die Verallgemeinerung von [4, Satz 1] auf die Halbverbände. Vorerst brauchen wir noch.

Definition 11. *Sei S ein Halbverband. Ein Ideal P des S heißt ein schwaches Primideal in S, falls für beliebige Ideale $J_1, \ldots, J_n$ in S $\emptyset \neq J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset (t] \subset P$ die Existenz eines solchen $i \in \{1, \ldots, n\}$ impliziert wird, daß $J_i \subset P$.*

Man kann leicht einsehen, daß jedes Primideal eines Halbverbandes auch ein schwaches Primideal ist. Sei jetzt S ein Verband, $\emptyset \neq P$ ein schwaches Primideal in S. Sei für $x, y \in S$ auch $x \cap y \in P$. Dann $\emptyset \neq (x] \cap (y] \subset (x \cap y] \subset P$, daraus folgt entweder $x \in P$ oder $y \in P$. Also ist P ein Primideal in S. Aus dieser Erwägung folgt, daß für einen Verband S die Begriffe „Primideal“ und „schwaches Primideal“ identisch sind. Ferner werden wir unter einem minimalen schwachen Primideal eines Halbverbandes S immer ein minimales

Element der teilweise geordneten Menge der nichtleeren schwachen Primideale des S verstehen.

3.3. *Sei S ein Halbverband mit dem kleinsten Element 0. Dann existiert zu jedem schwachen Primideal $\emptyset \neq P \neq S$ ein minimales schwaches Primideal Q in S so, daß $P \subset Q$.*

Beweis. $\mathcal{M}$ Bezeichne die teilweise geordnete Menge (bezüglich der mengentheoretischen Inklusion) der sämtlichen nichtleeren in einem schwachen Primideal $\emptyset \neq P$ enthaltenen schwachen Primideale in S. $P \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ ein minimales Element besitzt. Wir benützen das Lemma von Zorn. Sei $\mathcal{C}$ eine Kette aus $\mathcal{M}$. Setzen wir $Q = \bigcap (R; R \in \mathcal{C})$. Q ist offensichtlich ein nichtleeres Ideal des S. Sei ferner $\emptyset \neq J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset \subset (t] \subset Q$ $(J_1, \ldots, J_n \in I(S))$. Nehmen wir an, daß für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $J_i \not\subset Q$ ist. Dann gibt es ein $R_i \in \mathcal{C}$ derart, daß $J_i \not\subset R_i$. Endlich existiert ein $R \in \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft: $R \subset \bigcap (R_i; i \in \{1, \ldots, n\})$. Offenbar $J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset (t] \subset R$. Daraus sieht man, weil R ein schwaches Primideal ist, daß ein solches $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, daß $J_i \subset R$ ist und das ist ein Widerspruch.

Satz 7. *Sei S ein pseudokomplementärer und distributiver Halbverband. S ist ein Stonescher Halbverband genau dann, wenn er folgende Bedingung erfüllt:*

(GSs) *Die verbandstheoretische Vereinigung von je zwei verschiedenen minimalen schwachen Primidealen des Halbverbandes S ist gleich dem Halbverband S.*

Beweis. Sei S zuerst ein distributiver Halbverband. Es bezeichne $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$ die Teilweise geordnete Menge (bezüglich der mengentheoretischen Inklusion) sämtlicher nichtleerer schwacher Primideale des Halbverbandes S bzw. sämtlicher nichtleerer Primideale des Verbandes $L(S)$. Wir zeigen, daß $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{N}$ isomorph ist. Sei $P \in \mathcal{M}$. Setzen wir $\bar{P} = \{z \in L(S);$ es gibt $x \in P$ so, daß $z \subset (x]\}$. Offenbar ist $\bar{P}$ ein nichtleeres Ideal des $L(S)$. Seien $a, b \in L(S)$, $a \cap b \in \bar{P}$. Wegen 1.13 ist $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$, wobei $a_i = (x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Analogerweise ist $b = b_1 \cup \ldots \cup b_m$, wo $b_j = (y_{j1}] \cap \ldots \cap (y_{jk_j}]$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Nach der Definition von $\bar{P}$ existiert ein $t \in P$ so, daß $a \cap b \subset (t] \in \bar{P}$. Nach 1.13 ist $a \cap b = \bigvee (a_i \cap b_j; i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\})$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist $a_i \cap b_j \subset (t]$. Daher $(x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}] \cap (y_{j1}] \cap \ldots \cap (y_{jk_j}] \subset (t] \subset P$ in S. Der Annahme nach ist P ein schwaches Primideal. Dann existiert entweder ein solches $l \in \{1, \ldots, l_i\}$, daß $(x_{il}] \subset P$ oder ein solches $k \in \{1, \ldots, k_j\}$, daß $(y_{jk}] \subset P$. Also, entweder $x_{il} \in P$ oder $y_{jk} \in P$. Zusammengefaßt, entweder für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $a_i \in \bar{P}$ oder es existiert ein solches $i \in \{1, \ldots, n\}$, daß $a_i \notin \bar{P}$ und daraus folgt für alle $l \in \{1, \ldots, l_i\}$, $(x_{il}] \not\subset P$. Wir haben schon gesehen, daß für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ $a_i \cap b_j \subset (t]$ ist. Daraus folgt $(y_{jk}] \subset P$. Aus

$b_j \subset (y_{jk}]$ sieht man, daß für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ $b_j \in \overline{P}$ ist, und daraus ergibt sich $b \in \overline{P}$. Dann haben wir entweder $a \in \overline{P}$ oder $b \in \overline{P}$. Also ist $\overline{P}$ ein Primideal des Verbandes $L(S)$ und $\overline{P} \in \mathcal{N}$. Falls $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$ und $P_1 \subset P_2$, dann sieht man sofort, daß auch $\overline{P}_1 \subset \overline{P}_2$ ist. Bisher haben wir gezeigt, daß die Abbildung $P \to \overline{P}$ eine isotone Abbildung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ ist. Es sei jetzt $Q \in \mathcal{N}$. Setzen wir $Q' = \{x \in S;\ (x] \in Q\}$. Offenbar ist Q' ein nichtleeres Ideal des S. Wir zeigen, daß Q' ein schwaches Primideal des S ist. Setzen wir das Gegenteil voraus. Seien $J_1, \ldots, J_n$ Ideale des Halbverbandes S und $\emptyset \neq J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset \subset (t] \subset Q'$. Sei ferner für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $J_i \subset Q'$. Dann existieren solche $x_i \in J_i$, daß $x_i \notin Q'$. Offensichtlich $(x_1] \cap \ldots \cap (x_n] \subset (t] \subset Q'$. Daher $(x_1] \cap \cap \ldots \cap (x_n] \in L(S)$ und $(x_1] \cap \ldots \cap (x_n] \in Q$. Weil Q das Primideal des $L(S)$ ist, muß für irgendein $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(x_i] \in Q$ gelten, d. h. $x_i \in Q'$, was zum Widerspruch führt. Also ist Q' ein schwaches Primideal des S. Falls $Q_1 \subset Q_2$ $(Q_1, Q_2 \in \mathcal{N})$, dann $Q'_1 \subset Q'_2$. $Q \to Q'$ ist eine isotone Abbildung von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$. Für $P \in \mathcal{M}$ ist offenbar $P = \overline{P}'$. Wenn $Q \in \mathcal{N}$, dann $Q' \subset Q$. Falls $a \in Q$, dann gilt nach 1.13 $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$, wobei für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i = (x_{i1}] \cap \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ $(x_{i1}, \ldots, x_{il_i} \in S)$. Offenbar ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \in Q$. Weil wir vorausgesetzt haben, daß Q ein Primideal des $L(S)$ ist, sieht man, daß für irgendein $l \in \{1, \ldots, l_i\}$ $(x_{il}] \in Q$ gilt. Bezeichnen wir $x_{il} = y_i$. Dann $a_i \subset (y_i] \in Q$. Aus dem letzten sieht man, daß $a \subset (y_1 \cup \ldots \cup y_n] \in Q$. Also gibt es zu jedem $a \in Q$ ein solches $y = y_1 \cup \ldots \cup y_n \in Q'$, daß $a \subset (y]$. Daraus ergibt sich, daß $\overline{Q}' = Q$. Wir haben damit gezeigt, daß die Abbildung $P \to \overline{P}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{N}$ ist. Die inverse Abbildung hat die Gestalt: $Q \to Q'$. Selbstverständlich, bei dem erwähnten Isomorphismus $P \to \overline{P}$ bildet sich die Menge der minimalen schwachen Primideale des S eineindeutig auf die Menge aller minimalen Primideale des $L(S)$ ab.

Nunmehr können wir auf den Beweis des Satzes übergehen. Sei S ein Stonescher Halbverband. Nach 3.2 ist $L(S)$ ein Stonescher Verband. Nach [4, Satz 1] ist die verbandstheoretische Vereinigung von je zwei verschiedenen minimalen Primidealen des Verbandes $L(S)$ der Verband $L(S)$. Seien P_1, P_2 minimale schwache Primideale des S. Sei $P_1 \neq P_2$. Dann ist auch $\overline{P}_1 \neq \overline{P}_2$ und $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ sind minimale Primideale des $L(S)$. Es gibt derartige Ideale des Halbverbandes S $a \in \overline{P}_1$, $b \in \overline{P}_2$ daß $a \cup b = (I]$ (I ist das größte Element in S). Weil $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ minimale Primideale des $L(S)$ sind, gibt es wegen des oben bewiesenen solche Elemente $x, y \in S$, daß $a \subset (x]$, $b \subset (y]$ und $(x] \in \overline{P}_1$, $(y] \in \overline{P}_2$. Dann ist auch $(x] \cup (y] = (x \cup y] = (I]$, also $x \cup y = I$. Wegen $x \in P_1, y \in P_2$ gilt $P_1 \cup P_2 = = (I] = S$. Der erste Teil des Satzes ist bewiesen.

Seien jetzt $Q_1 \neq Q_2$ minimale Primideale des Verbandes $L(S)$, wo S ein distributiver und pseudokomplementärer Halbverband ist. Es gelte die Bedingung (GSs). Dann sind Q'_1, Q'_2 minimale schwache Primideale des S. Offenbar $Q'_1 \neq Q'_2$. Aus (GSs) folgt die Existenz von $x \in Q'_1$, $y \in Q'_2$ so, daß

$x \cup y = I$. Weil $Q_1 = \overline{Q}_1'$, $Q_2 = \overline{Q}_2'$, dann ist $(x] \in Q_1$, $(y] \in Q_2$ und $Q_1 \cup Q_2 = L(S)$, weil $(x \cup y] = (x] \cup (y] = (I]$. Aus 3.2a sieht man, daß $L(S)$ distributiv und pseudokomplementär ist. Nach [4, Satz 1] ist $L(S)$ ein Stonescher Verband. Nach 3.2b ist dann S ein Stonescher Halbverband.

Als Spezialfall des Satzes 7 bekommen wir diese

Folgerung (Grätzer — Schmidt [4, Satz 1]). *Sei L ein distributiver und pseudokomplementärer Verband. L ist ein Stonescher Verband genau dann, wenn die verbandstheoretische Vereinigung von je zwei verschiedenen minimalen Primidealen des Verbandes L der ganze Verband L ist.*

Definition 12. *Ein Halbverband (Verband) S mit dem kleinsten Element 0 heißt abschnittspseudokomplementär, falls für jedes $a \in S$ der Teilhalbverband (Teilverband) $[0, a]$ ein pseudokomplementärer Halbverband (Verband) ist. Ein distributiver Halbverband (Verband) S heißt verallgemeinerter Stonescher Halbverband (Verband), wenn S abschnittspseudokomplementär ist und für jedes $a \in S$ der Teilhalbverband (Teilverband) $[0, a]$ einen Stoneschen Halbverband (Verband) bildet.*

Man kann sich leicht überzeugen, daß ein pseudokomplementärer Verband auch abschnittspseudokomplementär ist. Es genügt nur für $x \in [0, a]$ zu zeigen, daß $x^+ = x^* \cap a$ ein Pseudokomplement von x in $[0, a]$ ist. Für Halbverbände muß dies nicht gelten. Siehe z. B. 2.9. Der dort untersuchte Halbverband S ist pseudokomplementär, aber im Teilhalbverband $[0, a]$ gibt es kein Pseudokomplement vom Element a. Im nachstehenden Beispiel zeigen wir, daß sogar der distributive pseudokomplementäre Halbverband nicht abschnittspseudokomplementär sein muß.

3.4. Beispiel. N bezeichne die Menge sämtlicher natürlicher Zahlen und nehmen wir an, daß die Elemente $a, b, c \notin N$ und $a \neq b \neq c \neq a$. $\mathscr{A}$ bezeichne die Menge sämtlicher endlicher Teilmengen von $\{a\} \bigcup N$. Ferner bezeichne $\mathscr{B}$ die Menge sämtlicher Mengen der Gestalt: $\{b\} \bigcup M$, wo M eine unendliche Teilmenge der Menge $\{a\} \bigcup N$ mit der endlichen Komplementärmenge von $\{a\} \bigcup N$ ist. Schließlich sei $\mathscr{C} = \{\{a, c\} \bigcup N, \{a, b, c\} \bigcup N\}$. Bezeichnen wir noch $I = \{a, b, c\} \bigcup N$, $A = \{a, b\} \bigcup N$, $B = \{b\} \bigcup N$, $C = \{a, c\} \bigcup N$, $0 = \emptyset$. Betrachten wir $S = \mathscr{A} \bigcup \mathscr{B} \bigcup \mathscr{C}$. S ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion teilweise geordnet. Wir zeigen, daß bezüglich dieser Ordnungsrelation S einen Halbverband bildet, d. h. S ist bezüglich der mengentheoretischen Vereinigung abgeschlossen. Bekanntlich bildet das Teilsystem $\mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$ bezüglich der mengentheoretischen Vereinigung einen Booleschen Verband. Offenbar ist für $x \in S$ $I \cup x = I$. Falls $x \in \mathscr{A}$, dann $C \cup x = C$. Für $x \in \mathscr{B}$ ist $C \cup x = I$. Damit haben wir gezeigt, daß $(S, \cup)$ einen Halbverband bildet. Ferner zeigen wir, daß S auch distributiv ist. Seien $x, y, t \in S$, $t \nleq x \cup y$,

$t \nleqslant x$, $t \nleqslant y$. Daraus folgt, daß die Elemente x, y unvergleichbar sind. Falls $x, y \in \mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$, dann auch t, $x \cup y \in \mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$. Weil $\mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$ einen Booleschen Verband darstellt, kann man $x_1 = t \bigcap x$, $y_1 = t \bigcap y$ in $\mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$ finden, so daß $t = x_1 \cup y_1$. Es bleibt der Fall $x \in \mathscr{C}$ oder $y \in \mathscr{C}$ zu untersuchen. Es genügt sich nur auf den ersten Fall zu beschränken, weil die Operation $\cup$ kommutativ ist. Die Elemente x, y sind unvergleichbar und daraus muß $x = C$, $y \in \mathscr{B}$. Bekanntlich, sind C und die Elemente aus $\mathscr{A}$ vergleichbar. Daher $x \cup y = I$. Weil $t \nleqslant x$, $t \nleqslant y$, so ist entweder $t = I$ oder $t \in \mathscr{B}$. Im ersten Falle wählen wir $x_1 = x$, $y_1 = y$. Im zweiten Falle nehmen wir die Menge $t - y$, weil $t \nleqslant y$, $t \in \mathscr{B}$. Daraus $t - y \in \mathscr{A}$ und $t \bigcap y \in \mathscr{B}$. Setzen wir jetzt $x_1 = t - y$, $y_1 = t \bigcap y$. Dann $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$ und $t = x_1 \cup y_1$. Also ist S ein distributiver Halbverband. Daß S kein Verband bezüglich der eingeführten Ordnungsrelation ist, sieht man daraus, daß das Infimum der Elemente A und C in S nicht existiert, weil die Menge sämtlicher unterer Schranken von A und C aus sämtlichen das Element a enthaltenden endlichen Teimengen der Menge $\{a\} \bigcup N$ besteht und diese besitzt nicht das größte Element.

Jetzt zeigen wir noch, daß S ein pseudokomplementärer Halbverband ist. Für $x \in \mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$ ist $x^* = A - x \in \mathscr{A} \bigcup \mathscr{B}$. Für $x \in \mathscr{C}$ ist $x^* = 0$. Also ist S ein distributiver pseudokomplementärer Halbverband.

Der Teilhalbverband $[0, C]$ ist nicht pseudokomplementär, weil $\{a\}$ das Pseudokomplement nicht besitzt. Also ist S kein abschnittspseudokomple mentärer Halbverband.

Schließlich überzeugen wir uns, daß die letzte Behauptung des Satzes 4 für S ungültig ist, d. *h.* wenn für irgendein $x, y \in S$ $x^{**} = y^{**}$ ist, dann existiert ein dichtes Element $d \in S$ $(d^{**} = I)$ derart, daß $x \cap d = y \cap d$. Nehmen wir A, $C \in S$. Offenbar $A^{**} = C^{**} = I$. Falls $d^{**} = I$ $(d \in S)$, dann $d \in \{A, C, I\}$. Daraus sieht man, daß für kein dichtes Element $d \in S$ die Gleichheit $A \cap d = C \cap d$ erfüllt ist.

Ferner werden wir benutzen

3.5. *Sei L ein distributiver, pseudokomplementärer Verband. Dann gilt für je zwei $a, x \in L$: $(x \cap a)^* \cap a = x^* \cap a$.*

Zum Beweis siehe [6, Hilfsatz 18].

3.6. *Jeder Stonesche Halbverband ist ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband. Ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband mit dem größten Element ist ein Stonescher Halbverband.*

Beweis. Sei S ein Stonescher Halbverband, $a \in S$, $x \in [0, a]$. Dann gilt nach 2.7 $(x^*] = (x]^*$, $(x^{**}] = (x]^{**}$, $(I] = (x^*] \cup (x^{**}]$. Daraus folgt $(a] = (a] \cap (I] = \{(a] \cap (x^*]\} \cup \{(a] \cap (x^{**}]\}$ und zugleich ist $\{(a] \cap (x^*]\} \cap \{(a] \cap (x^{**}]\} = (0]$. Aus 1.9 folgt, daß $(a] \cap (x^*]$, $(a] \cap (x^{**}]$ Hauptideale in S sind. Daher ergibt sich, daß Elemente $a \cap x^*$, $a \cap x^{**}$ in S existieren. Man kann sich leicht überzeugen, daß $a \cap x^*$ das Pseudokomplement von x in $[0, a]$ ist. Jetzt zeigen wir, daß $a \cap x^{**}$ das Pseudokomplement von $a \cap x^*$ in $[0, a]$ ist. Aus 2.7 bekommt man, daß $I(S)$ distributiv und pseudokomplementär ist. Nach 3.5 und 2.7 gilt $((a \cap x^*)^*] \cap (a] = (a \cap x^*]^* \cap (a] = \{(a] \cap (x^*]\}^* \cap (a] = \{(a] \cap (x]^{**}\} = (a \cap x^{**}]$. Dann existiert das Element $(a \cap x^*)^* \cap a$ in S und $(a \cap x^*)^* \cap a = a \cap x^{**}$. Offenbar ist dann $(a \cap x^*) \cup \cup (a \cap x^{**}) = a$. Aus der letzten Beziehung bekommen wir, daß S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband ist. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Definition 12.

3.7. *Sei S ein distributiver Halbverband mit dem kleinsten Element 0. S ist ein abschnittspseudokomplementärer Halbverband genau dann, wenn für je zwei Elemente $a, d \in S$ $(0 < a \leqslant d)$ der Durchschnitt der sämtlichen nichtleeren, das Element $a \in S$ nichtenthaltenden Primideale (minimalen Primideale) und des Ideales $(d]$ ein Hauptideal ist.*

Beweis. $\mathscr{M}_a$ bezeichne das System aller nichleeren Primideale des Halbverbandes S, welche das Element a nicht enthalten. Aus 2.8 sieht man, daß $(a^+] = (d] \cap \bigwedge(P; P \in \mathscr{M}_a)$ wo a^+ den Pseudokomplement von a in $[0, d]$ bezeichnet. Analogerweise, geht man (mit Hilfe von 1.12) im Falle von minimalen Primidealen vor. Den Beweis setzt man jetzt analogerweise wie in [6, Hilfsatz 7] fort.

3.8. *Sei S ein distributiver Halbverband mit dem kleinsten Element 0. S ist ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband genau dann, wenn für jedes $x \in S$ $(x]^* \cup (x]^{**} = S$ gilt.*

Beweis. Sei S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband. Seien $x, d \in S$, $x \leqslant d$. Bezeichne mit x^+ (x^{++}) das Pseudokomplement von x (x^+) in $[0, d]$. Aus der Annahme folgt $x^+ \cup x^{++} = d$. Offenbar $(x^+] = (x]^* \cap (d]$, $(x^{++}] = (x^+]^* \cap (d]$. Dann $(x^{++}] = \{(x]^* \cap (d]\}^* \cap (d]$. Nach 3.5 ist $(x^{++}] = (x]^{**} \cap (d]$. Also $(d] = (x^+] \cup (x^{++}] = \{(x]^* \cap (d]\} \cup \{(x]^{**} \cap (d]\} = \{(x]^* \cup \cup (x]^{**}\} \cap (d]$, weil S distributiv ist. Setzen wir $d = y \cup x$, wo $y \in S$. Offenbar $(x]^* \cup (x]^{**} \subset (d] \subset (y]$. Aus der letzten Beziehung sieht man, daß $(x]^* \cup \cup (x]^{**} = S$.

Seien $x, d \in S$, $x \leqslant d$, $(x]^* \cup (x]^{**} = S$. Aus 1.7 sieht man, daß der Verband $I(S)$ distributiv ist. Dann $(d] = (d] \cap \{(x]^* \cup (x]^{**}\} = \{(d] \cap (x]^*\} \cup \{(d] \cap \cap (x]^{**}\}$. Zugleich gilt $\{(x]^* \cap (d]\} \cap \{(x]^{**} \cap (d]\} = (0]$. Nach 1.9 $(x]^* \cap \cap (d] = (u]$, $(x]^{**} \cap (d] = (v]$ $(u, v \in S)$. Man sieht gleich, daß u das Pseudokomplement von x in $[0, d]$ ist. Bezeichnen wir $u = x^+$. Mit Hilfe 3.5 bekommt man, daß v das Pseudokomplement von x^+ in $[0, d]$ ist. Bezeichnen wir $v = x^{++}$. Dann $x^+ \cup x^{++} = d$. Daraus ergibt sich, daß S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband ist.

4. STONESCHE IDEALENVERBÄNDE

4.1. *Sei S ein Halbverband und $I(S)$ die teilweise geordnete Menge sämtlicher nichtleerer Ideale des Halbverbandes S. Wenn $I(S)$ ein Stonescher Verband ist, dann ist S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband.*

Beweis. $I(S)$ besitzt das kleinste Element. Das ist ein Hauptideal. Daraus folgt, daß auch S ein kleinstes Element besitzt. Aus 1.7 ergibt sich, daß S distributiv ist. Für jedes $x \in S$ gilt offenbar $(x]^* \cup (x]^{**} = S$. Daraus ist nach 3.8 S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband.

Wie wir schon am Anfang der Arbeit erwähnt haben, $I(S)$ bezeichnet die teilweise geordnete Menge der nichtleeren Ideale des Halbverbandes S. Sei $I(S)$ ein Verband (das ist genau dann, wenn S nach unten gerichtet ist). Falls $\mathscr{P}$ ein Ideal des $I(S)$ ist, dann bezeichne $Q_{\mathscr{P}}$ die mengentheoretische Vereinigung der in $\mathscr{P}$ gehörenden Ideale. Man sieht gleich, daß $Q_{\mathscr{P}}$ ein Ideal des S ist.

4.2. *Sei S ein distributiver und pseudokomplementärer Halbverband. Sei $\mathscr{P}$ ein minimales Primideal des $I(S)$. Dann ist $Q_{\mathscr{P}}$ ein minimales schwaches Primideal des Halbverbandes S.*

Beweis. 0 bezeichne das kleinste Element in S. Seien $J_1, \ldots, J_n$ Ideale des S und $\emptyset \neq J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset (t] \subset Q_{\mathscr{P}}$. Dann $(t] \in \mathscr{P}$, was $J_1 \cap \ldots \cap J_n \in \mathscr{P}$ nach sich zieht. Der Annahme nach ist $\mathscr{P}$ ein Primideal des Verbandes $I(S)$. Also existiert ein solches $i \in \{1, \ldots, n\}$, daß $J_i \in \mathscr{P}$. Daraus folgt $J_i \subset Q_{\mathscr{P}}$. Also ist $Q_{\mathscr{P}}$ ein schwaches Primideal des S. Nach 3.3 existiert ein minimales schwaches Primideal $M_{\mathscr{P}}$ des Halbverbandes S derart, daß $M_{\mathscr{P}} \subset Q_{\mathscr{P}}$. Sei $M_{\mathscr{P}} \neq Q_{\mathscr{P}}$. Dann gibt es ein Element $a \in Q_{\mathscr{P}}$ und $a \notin M_{\mathscr{P}}$. Offenbar $(a] \in \mathscr{P}$. Weil $\mathscr{P}$ ein minimales Primideal des Verbandes $I(S)$ ist, dann ist $I(S) - \mathscr{P}$ ein maximales duales Ideal des $I(S)$. Ein Ideal $J \in I(S) - \mathscr{P}$ existiert derart, daß $J \cap (a] = (0]$ (im Gegenteil wäre $I(S) - \mathscr{P}$ kein maximales duales Ideal). Dann nach 2.6 und 2.7 ist $J \subset (a]^* = (a^*]$. Offenbar $(a^*] \in I(S) - \mathscr{P}$, weil $J \in I(S) - \mathscr{P}$. Dann $a^* \notin Q_{\mathscr{P}}$ und daraus $a^* \notin M_{\mathscr{P}}$. Aber $(a] \cap (a^*] = (0] \subset M_{\mathscr{P}}$. $M_{\mathscr{P}}$ ist ein schwaches Primideal des Halbverbandes S und daraus ergibt sich, daß entweder $(a] \subset M_{\mathscr{P}}$ oder $(a^*] \subset M_{\mathscr{P}}$, was zum Widerspruch führt. Also ist $Q_{\mathscr{P}}$ ein minimales schwaches Primideal des S.

Satz 8. *Sei S ein Halbverband mit dem größten Element I. $I(S)$ ist ein Stonescher Verband genau dann, wenn*

(a) *S ein Stonescher Halbverband ist und*

(b) *verschiedenen minimalen Primidealen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{P}'$ des Verbandes $I(S)$ verschiedene Ideale $Q_{\mathscr{P}}$* und *$Q_{\mathscr{P}'}$ des Halbverbandes S entsprechen.*

Bei dem Beweis geht man analogerweise wie in [6, Satz 5] mit Hilfe 4.1, 4.2 und des Satzes vor.

Man kann leicht die folgende Behauptung (siehe [6, Hilfsatz 15]) beweisen

4.3. *Sei S ein Stonescher Halbverband. $I(S)$ ist ein Stonescher Verband genau dann, wenn für jedes $J \in I(S)$ das Ideal J^* Hauptideal ist.*

Satz 9. *Sei S ein Halbverband mit dem größten Element I. $I(S)$ ist ein Stonescher Verband genau dann, wenn*

(1) *S ein Stonescher Halbverband ist und*

(2) *der Boolesche Verband $B(S)$ der abgeschlossenen Elemente aus S vollständig ist* (siehe Satz 3).

Beweis. Notwendige Bedingung beweist man analogerweise wie in [6, Satz 6].

Hinreichende Bedingung. Nach 4.3 ist zu beweisen, daß für jedes $J \in I(S)$ $J^* = (a]$ $(a \in S)$ ist. Setzen wir für $J \in I(S)$ $K = \{z \in S;\ z \leqslant x^* \text{ für alle } x \in J\}$. Offenbar $K \in I(S)$. Auch kann man leicht einsehen, daß $J^* \subset K$. Sei $a \in J \cap K$. Dann ist offenbar $a \leqslant a^*$ und daraus folgt $a = 0$. Daher $K \subset J^*$ und $J^* = K$. Der Annahme nach ist $b = \bigwedge_{B(S)} (x^*;\ x \in J)$ (9) $(b \in B(S))$. Sei $y \in J^*$. Weil $y \leqslant x^*$ für alle $x \in J$, dann ist $y^{**} \leqslant x^{***} = x^*$ für alle $x \in J$ (siehe (3) im Absatz 2). Wegen $y^{**} \in B(S)$ bekommen wir $y^{**} \leqslant b$. Daraus folgt $y \leqslant y^{**}$ und $y \leqslant b$. Also $J^* \subset (b]$. Zugleich ist $b \in J^*$. Aus der letzten Beziehung folgt dann $J^* = (b]$.

Bemerkung. Aus dem Satz 9 bekommt man als Spezialfall [6, Satz 6]. Außerdem sieht man, daß die Bedingung (3) in [6, Satz 6] überflüßig ist.

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948 (Теория структур, Москва 1952).

[2] Birkhoff G., Frink O., *Representations of lattices by sets*, Trans. Amer. Math. Soc. *2* (1948), 299—316.

[3] Frink O., *Pseudo-complements in semi-lattices*, Duke Math. J. *29* (1962), 505—514.

[4] Grätzer G., Schmidt E. T., *On a problem of M. H. Stone*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *8* (1957), 455—460.

[5] Grätzer G., Schmidt E. T., *On ideal theory for lattices*, Acta Sci. Math. (Szeged) *19* (1958), 82—92.

[6] Катриняк Т., *Примечание к структурам Стоуна*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 128—142.

[7] Nachbin L., *On the characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring*, Fund. Math. *36* (1949), 137—142.

Eingegangen am 9. 12. 1966.

Katedra algebry a teórie čísel
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava

(9) $\bigwedge_{B(S)}$ bezeichnet die Infimumsoperation in $B(S)$.