Karel Šindelář

Poznámka k pytagorejským trojúhelníkom

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 2, 144--147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126763

Matematický časopis 18 (1968), No. 2

POZNÁMKA K PYTAGOREJSKÝM TROJUHOLNÍKOM

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

Pytagorejským trojuholníkom sa nazýva, ako je známe (napríklad z prác [1], [2]), trojica prirodzených čísel (a, b, c), medzi ktorými platí vzťah

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

takže dĺžky nimi vyjadrené môžu byť stranami pravouhlého trojuholníka. Čísla a, b budeme nazývať odvesnami a číslo c preponou pytagorejského trojuholníka (a, b, c). Pritom trojice (a, b, c) a (b, a, c) vyjadrujúce zhodné trojuholníky považujeme za rovné.

Budeme sa opierať o známu vetu (napr. [3], str. 42):

Veta 1. *Všetky riešenia rovnice* (1) *sú dané vzorcami*

$$a = 2xyk, \qquad b = (x^2 - y^2) \, . \, k, \qquad c = (x^2 + y^2) \, . \, k, \tag{2}$$

kde x, y, k sú prirodzené čísla a platí $x > y$.

Poznamenajme k tomu, že pytagorejský trojuholník môže vzniknúť aj vtedy, keď vo vzorcoch (2) čísla x, y nie sú prirodzené, môžu to byť napr. druhé odmocniny z prirodzených čísel, ktorých súčin je číslo prirodzené (napríklad $x = \sqrt{12}$, $y = \sqrt{3}$, teda $xy = 6$, $k = 1$; potom je $a = 12$, $b = 9$, $c = 15$). Ak pripustíme za x, y aj takéto čísla, dostaneme všetky možné pytagorejské trojuholníky už vtedy, keď je $k = 1$.

Za účelom zjednodušenia formulácie výsledkov definujeme pre každé prirodzené číslo n pytagorejskú funkciu $\varepsilon(n)$ takto: ak n je nepárne, potom $\varepsilon(n)$ znamená počet všetkých rôznych prirodzených deliteľov čísla n^2 menších ako n; ak n je párne, potom $\varepsilon(n)$ znamená počet všetkých rôznych prirodzených deliteľov čísla $(\frac{1}{2}n)^2$ menších ako $\frac{1}{2}n$. Hodnoty funkcie $\varepsilon(n)$ pre $n \leqq 25$ sú uvedené v tabuľke 1.

Tab. 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\varepsilon(n)$	0	0	1	1	1	1	1	2	2	1	1	4	1	1	4	3	1	2	1	4	4	1	1	7	2

Teraz už môžeme vysloviť vetu, ktorá predstavuje hlavný výsledok nášho článku:

Veta 2. *Nech n je prirodzené číslo. Existuje práve $\varepsilon(n)$ pytagorejských trojuholníkov, ktorých jednou odvesnou je n. Ak n je párne číslo, sú to trojuholníky o stranách*

$$(3)\qquad a = n, \quad b = \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{2}n\right)^2 - h, \quad c = \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{2}n\right)^2 + h,$$

kde h je prirodzené číslo, ktoré je deliteľom čísla $(\frac{1}{2}n)^2$, a platí $h < \frac{1}{2}n$. Ak n je nepárne, sú to trojuholníky o stranách

$$(4)\qquad a = n, \quad b = \frac{n^2 - h^2}{2h}, \quad c = \frac{n^2 + h^2}{2h},$$

kde prirodzené číslo h je deliteľom n^2 a menšie ako n.

Dôkaz. Ľahko sa možno presvedčiť, že pri predpísanej voľbe h sú čísla a, b, c celé a tvoria pytagorejský trojuholník. Podobne ľahko vidno, že pri pevnom n rôznym hodnotám h zodpovedajú rôzne pytagorejské trojuholníky, teda predošlé vzorce (3) alebo (4) dávajú ku každému prirodzenému číslu n práve $\varepsilon(n)$ pytagorejských trojuholníkov. Treba ešte dokázať, že sme takto dostali všetky pytagorejské trojuholníky, ktoré majú jednu odvesnu rovnú n.

Zoberme ľubovoľný pytagorejský trojuholník, ktorý má jednu odvesnu rovnú n. Podľa vety 1 jeho strany možno zapísať v tvare

$$(5)\qquad 2xyk, \quad (x^2 - y^2)\,k, \quad (x^2 + y^2)\,k, \quad \text{kde} \quad x > y.$$

Budeme rozlišovať dva prípady:

a) Nech $n = 2xyk$. Ak v prípade párneho n volíme $h = y^2k$ a v prípade nepárneho n volíme $h = 2y^2k$, dostaneme zo vzorcov (3) a (4) strany trojuholníka (5). Zrejme h v obidvoch prípadoch vyhovuje požiadavkám.

b) Nech $n = (x^2 - y^2)\,k$. Ak n je párne číslo, zvolíme $h = \frac{1}{2}(x - y)^2 k$. Číslo h je prirodzené, menšie ako $\frac{1}{2}n$ a je deliteľom čísla $(\frac{1}{2}n)^2$. Ľahko sa možno presvedčiť, že po dosadení h do vzorcov (3) dostaneme pytagorejský trojuholník (5). Ak n je nepárne číslo, zvolíme $h = (x - y)^2 k$. Číslo h je prirodzené, menšie ako n a je deliteľom čísla n^2. I v tomto prípade dostaneme po dosadení do vzorcov (4) pytagorejský trojuholník. Tým je dôkaz ukončený.

Z predošlej vety ľahko plynie nasledujúci známy výsledok (uvedený napríklad v [3]):

Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ existuje pytagorejský trojuholník, ktorého jednou odvesnou je n.

To vyplýva z vety 2, keďže pre $n \geqq 3$ je zrejme $\varepsilon(n) \geqq 1$.

Všetky pytagorejské trojuholníky (a, b, c) obsahujúce odvesnu $n \leqq 25$ sú uvedené v tabuľke 2.

Tab. 2.

n	h	a	b	c	n	h	a	b	c	n	h	a	b	c
1		nejestvujú			13	1	13	84	85	21	1	21	220	221
2		nejestvujú			14	1	14	48	50		3	21	72	75
3	1	3	4	5	15	1	15	112	113		7	21	28	35
4	1	4	3	5		3	15	36	39		9	21	20	29
5	1	5	12	13		5	15	20	25	22	1	22	120	122
6	1	6	8	10		9	15	8	17	23	1	23	264	265
7	1	7	24	25	16	1	16	63	65	24	1	24	143	145
8	1	8	15	17		2	16	30	34		2	24	70	74
	2	8	6	10		4	16	12	20		3	24	45	51
9	1	9	40	41	17	1	17	144	145		4	24	32	40
	3	9	12	15	18	1	18	80	82		6	24	18	30
10	1	10	24	26		3	18	24	30		8	24	10	26
11	1	11	60	61	19	1	19	180	181		9	24	7	25
12	1	12	35	37	20	1	20	99	101	25	1	25	312	313
	2	12	16	20		2	20	48	52		5	25	60	65
	3	12	9	15		4	20	21	29	.	.	.	.	.
	4	12	5	13		5	20	15	25					

LITERATÚRA

[1] Lietzmann W., *Der Pythagoreische Lehrsatz*, Leipzig 1951.
[2] Sierpiński W., *Trojkąty pitagorejskie*, Warszawa 1954.
[3] Sierpiński W., *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.

Došlo 25. 5. 1966.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy
Vysokej školy dopravnej,
Žilina

A NOTE ON PYTHAGOREAN TRIANGLES

Karel Šindelář

Summary

In the paper the following problem is being solved:

For a given leg $a = n$ (where n is a natural number) of a right triangle all Pythagorean triangles are to be found, i. e. all triples of natural numbers (a, b, c) which satisfy the equation

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

First of all the following function $\varepsilon(n)$ for every natural number n is defined: If n is odd, $\varepsilon(n)$ is the number of all natural numbers h which divide n^2 and are less than n $(h < n)$. If n is even, $\varepsilon(n)$ is the number of all natural numbers h which divide $(\frac{1}{2}n)^2$ and are less than $\frac{1}{2}n$ $(h < \frac{1}{2}n)$.

The main result is the following theorem:

Let n be a natural number. Then there are just $\varepsilon(n)$ Pythagorean triangles with one leg equal to n; namely if n is odd, they are

$$a = n,\ b = \frac{n^2 - h^2}{2h}, \qquad c = \frac{n^2 + h^2}{2h},$$

where h is any natural number less than n which divides n^2; whereas if n is even, the triangles are

$$a = n,\ b = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} n\right)^2 - h, \quad c = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} n\right)^2 + h,$$

where h is any natural number less than $\frac{1}{2}n$ which divides $(\frac{1}{2}n)^2$.