Imrich Abrhan

О множествах нилбпотентных злементов и радикалах прямого произведения полугрупп

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 1, 25--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126758

Matematický časopis 18 (1968), No. 1

О МНОЖЕСТВАХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РАДИКАЛАХ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУГРУПП

ИМРИХ АБРГАН (IMRICH ABRHAN), Братислава

В этой статье исследуется связь между:

а) множествами нильпотентных элементов полугрупп S_1, S_2 (относительно их идеалов J_1, J_2 соответственно) и множеством нильпотентных элементов их прямого произведения $S = S_1 \times S_2$ (относительно идеала $J = J_1 \times J_2$).

б) радикалами полугрупп S_1, S_2 (относительно их идеалов J_1, J_2 соответственно) и радикалами их прямого произведения $S = S_1 \times S_2$ относительно идеала $J = J_1 \times J_2$). Для полноты мы приведем определения тех понятий, которые нам понадобятся в статье и которые не всегда являются повседневными. Остальные понятия, с которыми мы в этой статье встретимся, мы будем применять в их общепринятом значении.

Под идеалом в полугруппе S мы подразумеваем в целой статье двухсторонний идеал полугруппы S.

Пусть S—полугруппа, и J — ее идеал.

Элемент $x \in S$ мы называем нильпотентным относительно J, если существует натуральное число n такое, что $x^n \in J$.

Множество всех нильпотентных элементов в полугруппе S относительно идеала J будем обозначать знаком $N(J)$ (согласно [5]).

Множество [подполугруппу, идеал] M в полугруппе S назовем нильпотентным относительно идеала J, если существует такое натуральное число n, что $M^n \subseteqq J$.

Идеал P полугруппы S назовем простым идеалом, если $S \setminus P$ является m-системой в S (множество $H \subseteqq S$ называем m-системой в S, если для каждых двух элементов a, $b \in H$ существует элемент $x \in S$ такой, что $axb \in H$).

Непустое подмножество M полугруппы S называем сильной подполугруппой полугруппы S, если $ab \in M$ тогда и только тогда, когда $a \in M$ и $b \in M$. Пустое множество мы будем также рассматривать как сильную подполугруппу.

Идеал P полугруппы S назовем вполне простым идеалом, если $S \setminus P$ является сильной подполугруппой в полугруппе S.

Идеал $R(J)$, который является объединением всех нильпотентных идеалов полугруппы S относительно J, назовем радикалом Шварца относительно J.

Обозначим знаком $M(J)$ множество всех элементов $r \in S$ таких, что пересечение с J всякой m-системы в полугруппе S, содержащей r, непусто. Множество $M(J)$ назовем радикалом Маккоя относительно идеала J. Известно (см. напр. [5]), что радикал Маккоя $M(J)$ является пересечением всех простых идеалов в полугруппе S, которые содержат J.

Идеал $L(J)$, который является объединением всех локально нильпотентных идеалов в полугруппе S относительно идеала J (т. е. таких, у которых любая подполугруппа с конечным числом образующих элементов нильпотентна), мы называем радикалом Шеврина относительно идеала J (см. [4]).

Идеал $R^*(J)$, который является объединением всех нильидеалов полугруппы S относительно идеала J (т. е. таких идеалов, все элементы которых нильпотентны относительно J), назовем радикалом Клиффорда относительно J.

Пусть $C(J)$ — множество всех элементов $r \in S$ таких, что каждая сильная подполугруппа, которая содержит элемент r, имеет непустое пересечение с идеалом J. Множество $C(J)$ мы называем вполне простым радикалом относительно идеала J. Известно, что $C(J)$ является пересечением всех вполне простых идеалов в полугруппе S, которые содержат идеал J (см. напр. [5]).

Пусть S_1, S_2 — полугруппы. Множество S всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in S_1$, $y \in S_2$, в котором произведение определено следующим образом:

$$(x, y)\,(x', y') = (xx', yy')$$

для всех $x, x' \in S_1$, $y, y' \in S_2$, мы называем прямым произведением полугрупп S_1 и S_2 и обозначаем его $S_1 \times S_2$, т. е. $S = S_1 \times S_2$.

Пусть $M \subseteqq S_1 \times S_2$. Множество всех элементов $x \in S_1$ $[y \in S_2]$, для которых существует по крайней мере один такой элемент $v \in S_2$ $[u \in S_1]$, что $(x, v) \in M$ $[(u, y) \in M]$, мы называем проекцией множества M в полугруппу S_1 $[S_2]$ и будем ее обозначать M' $[M'']$.

Из этого определения вытекает, что $M \subseteqq M' \times M''$.

Подполугруппу M полугруппы S, которая порождается конечным числом элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$, где k-натуральное число, будем обозначать $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ и будем писать $M = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.

Лемма 1. *Пусть S_1, S_2 — полугруппы. Пусть подполугруппа M полу-*

группы $S = S_1 \times S_2$ *порождается конечным числом элементов*: $M = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k) \rangle$. *Тогда и проекция* $M'[M'']$ *подполугруппы* M *в* $S_1[S_2]$ *порождается с конечным числом элементов и имеет место*

$$M' = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle \; [M'' = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle].$$

Доказательство. Докажем, например, что $M' = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. Пусть x' — любой элемент из M'. Тогда существует элемент $y \in S_2$, для которого $(x', y) \in M$. Поэтому можно написать $(x', y) = (x_1', y_1)(x_2', y_2) \ldots (x_p', y_p)$, причем каждое (x_i', y_i) $(i = 1,2, \ldots, p)$ равняется некоторому из элементов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$. Это означает, что x_i' для $i = 1,2, \ldots, p$ равняется некоторому из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Тогда $x' = x_1 x_2 \ldots x_p \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$, т. е. $M' \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.

Пусть x — любой элемент из $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$, тогда $x = x_1 x_2 \ldots x_s$, где s — натуральное число и любой элемент x_j, $j = 1,2, \ldots, s$ равняется некоторому из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Это означает, что для каждого элемента x_j $(j = 1,2, \ldots, s)$ существует элемент $y_j \in S_2$, для которого $(x_j, y_j) \in M$. Отсюда вытекает $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \ldots (x_s, y_s) \in M$, т. е. $x = x_1 x_2 \ldots x_k \in M'$. Следовательно $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle \subseteq M'$.

Лемма 2. *Пусть для* $i = 1,2$, H_i *является* m*-системой полугруппы* S_i. *Тогда* $H = H_1 \times H_2$ *является* m*-системой полугруппы* $S = S_1 \times S_2$.

Доказательство очевидно.

Теорема 1. *Пусть* S_1, S_2 — *полугруппы. Непустое подмножество* P *полугруппы* $S_1 \times S_2$ *является простым идеалом тогда и только тогда, когда*

$$P = (P_1 \times S_2) \cup (S_1 \times P_2),$$

где $P_1[P_2]$ *является простым идеалом в* $S_1[S_2]$ *или же пустым множеством, причем одновременно не имеет места* $P_1 = P_2 = \varnothing$.

Доказательство. I. Пусть $P_1[P_2]$ — простой идеал в $S_1[S_2]$ или же пустое множество, причем, однако, одновременно не имеет места $P_1 = P_2 = \varnothing$. Очевидны утверждения

(*i*) $P = (P_1 \times S_1) \cup (S_1 \times P_2)$ является идеалом в $S_1 \times S_2$.

(*ii*) $(S_1 \times S_2) \setminus P = (S_1 \times S_2) \setminus [(P_1 \times S_2) \cup (S_1 \times P_2)] = (S_1 \setminus P_1) \times (S_2 \setminus P_2)$.

Равенство (*ii*) имеет место и в том случае, если P_1 или P_2 — пустое множество.

Так как, согласно предположению $P_1[P_2]$ является простым идеалом в $S_1[S_2]$, то $S_1 \setminus P_1[S_2 \setminus P_2]$ является m-системой в полугруппе $S_1[S_2]$. Отсюда и из леммы 1, относительно равенства (*ii*) следует, что $S_1 \times S_2 \setminus P$

является m-системой в $S_1 \times S_2$. Это значит, что P — простой идеал в $S_1 \times S_2$.

II. Пусть P является простым идеалом в полугруппе $S_1 \times S_2$. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из P. Тогда или множество $\{x_1\} \times S_2$, или множество $S_1 \times \{x_2\}$ является подмножеством P. Предположим обратное. Тогда существуют элементы $y_2 \in S_2$, $y_1 \in S_1$, для которых $(x_1, y_2) \bar{\in} P$ и $(y_1, x_2) \bar{\in} P$. Отсюда вытекает, что (x_1, y_2), $(y_1, x_2) \bar{\in} (S_1 \times S_2) \setminus P$. Так как P — простой идеал в $S_1 \times S_2$, то $(S_1 \times S_2) \setminus P$ является m-системой в $S_1 \times S_2$. Поэтому существуют элементы $(z_1', z_2') \in S_1 \times S_2$, $(z_1, z_2) \in S_1 \times S_2$ такие, что $(x_1, y_2)(z_1, z_2)(x_1, y_2) \in (S_1 \times S_2) \setminus P$ и одновременно

(1) $(x_1, y_2)(z_1, z_2)(y_1, x_2)(z_1', z_2')(x_1, y_2)(z_1, z_2)(y_1, x_2) \in (S_1 \times S_2) \setminus P$.

Дальше, имеет место

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)(z_1, z_2)(y_1, x_2)(z_1', z_2')(x_1, y_2)(z_1, z_2)(y_1, x_2) = \\ = (x_1 z_1 y_1 z_1' x_1 z_1 y_1, y_2 z_2 x_2 z_2' y_2 z_2 x_2) = \\ = (x_1 z_1 y_1 z_1', y_2 z_2)(x_1, x_2)(z_1 y_1, z_2' y_2 z_2 x_2) \in P,\end{aligned}$$

так как $(x_1, x_2) \in P$. Однако, это противоречит (1). Это значит, что или $\{x_1\} \times S_2$, или $S_1 \times \{x_2\}$ является подмножеством P. Пусть $P_1 = \{x \mid x \in S_1, \{x\} \times S_2 \subseteq P\}$ и $P_2 = \{y \mid y \in S_2, S_1 \times \{y\} \subseteq P\}$. Из предшествующих рассуждений вытекает, что по крайней мере одно из множеств P_1, P_2 непусто.

Легко доказать, что имеет место

(*iii*) $$P = (P_1 \times S_2) \cup (S_1 \times P_2).$$

В дальнейшем докажем, что $P_1[P_2]$ является или простым идеалом в $S_1[S_2]$, или пустым множеством.

Так как $P_1 \subseteq S_1$ и $P_2 \subseteq S_2$, то имеет место равенство (*ii*).

Возможны два случая: α) $P = S_1 \times S_2$, β) $P \neq S_1 \times S_2$. В случае α) очевидно, что $P_1 = S_1$ и $P_2 = S_2$, так что $P_1[P_2]$ является простым идеалом в полугруппе $S_1[S_2]$. В случае β) в силу равенства (*ii*) имеет место $S_1 \setminus P_1 \neq \neq \varnothing$, $S_2 \setminus P_2 \neq \varnothing$.

Сперва докажем, что $S_1 \setminus P_1$ является m-системой в S_1. Пусть x_1, x_1' любые элементы из $S_1 \setminus P_1$ и x_2 — любой элемент из $S_2 \setminus P$. Тогда (x_1, x_2), $(x_1', x_2) \in (S_1 \setminus P_1) \times (S_2 \setminus P_2) = (S_1 \times S_2) \setminus P$. Так как P является простым идеалом в $S_1 \times S_2$, то $(S_1 \times S_2) \setminus P$ является m — системой в $S_1 \times S_2$. Значит, существует элемент $(z_1, z_2) \in S_1 \times S_2$ такой, что имеет место: $(x_1, x_2)(z_1, z_2)(x_1', x_2) \in (S_1 \setminus P_1) \times (S_2 \setminus P_2)$. Отсюда вытекает, что $x_1 z_1 x_1' \in \in S_1 \setminus P_1$ т. е. $S_1 \setminus P_1$ является m-системой в S_1. Подобным образом можно доказать, что $S_2 \setminus P_2$ является m-системой в S_2.

Теперь мы докажем, что, если $P_1 \neq \varnothing$, то P_1 является идеалом в S_1.

Пусть x_1 — любой элемент из P_1, y — любой элемент из $S_2 \setminus P_2$ и x — любой элемент из S. Тогда $(x_1, y) \in P$, так как $x_1 \in P_1$. Так как $S_2 \setminus P_2$ является m-системой в S_2, то существует элемент $z \in S_2$ такой, что имеет место:

$$yzy \in S_2 \setminus P_2, \quad \text{т. е.} \quad yzy \,\overline{\in}\, P_2. \tag{2}$$

Так как $(x_1, y) \in P$, то имеет место

$$(x_1, y)\,(x, zy) = (x_1x, yzy) \in P, \tag{3}$$
$$(x, yz)\,(x_1, y) = (xx_1, yzy) \in P. \tag{4}$$

Из (2), (3), (4) и (iii) вытекает, что $x_1x \in P$, $xx_1 \in P$, т. е. P_1 — идеал в S_1. Аналогично, если $P_2 \neq \varnothing$, то P_2 — идеал в S_2. Следовательно, предполагая, что $P_1 \neq \varnothing$ $[P_2 \neq \varnothing]$, мы доказали, что $S_1 \setminus P_1$ $[S_2 \setminus P_2]$ является m-системой в $S_1[S_2]$ и $P_1\,[P_2]$ является идеалом в $S_1[S_2]$. Отсюда вытекает, что $P_1[P_2]$ является простым идеалом в $S_1[S_2]$. Таким образом мы закончили доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть S_1, S_2 — полугруппы. Непустое подмножество полугруппы $S_1 \times S_2$ является вполне простым идеалом тогда и только тогда, когда*

$$P = (P_1 \times S_1) \cup (S_1 \times P_2),$$

где $P_1[P_2]$ является или вполне простым идеалом в $S_1[S_2]$, или пустым множеством, причем одновременно не имеет моста $P_1 = P_2 = \varnothing$.

Доказательство теоремы 2 можно провести аналогичным способом, как доказательство теоремы 1. Более того (так как каждый вполне простой идеал очевидно является простым идеалом), остается только доказать, что простые идеалы $P[P_1, P_2]$ в полугруппе $S_1 \times S_2$ $[S_1, S_2]$ являются вполне простыми идеалами в $S_1 \times S_2$ $[S_1, S_2]$. Теорему 3 по существу уже доказал Петрих [3] с той разницей, что вполне простым идеалом он считал и пустое множество, но, однако не всю полугруппу.

Теорема 3. *Пусть J_i $(i = 1{,}2)$ — идеал в полугруппе S_i. Тогда $J_1 \times J_2$ является идеалом в $S_1 \times S_2$ и имеет место*

$$N(J_1 \times J_2) = N(J_1) \times N(J_2), \tag{а}$$
$$R(J_1 \times J_2) = R(J_1) \times R(J_2), \tag{б}$$
$$M(J_1 \times J_2) = M(J_1) \times M(J_2), \tag{в}$$
$$L(J_1 \times J_2) = L(J_1) \times L(J_2), \tag{г}$$
$$R^*(J_1 \times J_2) = R^*(J_1) \times R^*(J_2), \tag{д}$$
$$C(J_1 \times J_2) = C(J_1) \times C(J_2). \tag{е}$$

Доказательство. Непустое множество $J_1 \times J_2$ в полугруппе $S_1 \times S_2$ (относительно операции в $S_1 \times S_2$) является идеалом в $S_1 \times S_2$ (см. [1]).

(а) Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $N(J_1) \times N(J_2)$. Тогда существуют натуральные числа n, m, для которых $x_1^n \in J_1$ и $x_2^m \in J_2$. Тогда $(x_1, x_2)^{n+m} = (x_1^{n+m}, \quad x_2^{n+m}) \in J_1 \times J_2$, т. е. $(x_1, x_2) \in N(J_1 \times J_2)$. Следовательно, $N(J_1) \times N(J_2) \subseteqq N(J_1 \times J_2)$. Очевидно, имеет место также $N(J_1 \times J_2) \subseteqq N(J_1) \times N(J_2)$.

(б) Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $R(J_1) \times R(J_2)$. Тогда существует идеал $I_1 \times I_2$ в полугруппе $S_1 \times S_2$ такой, что $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$, $I_1^{n_1} \subseteqq J_1$ а $I_2^{n_2} \subseteqq J_2$, где n_1, n_2 являются подходящими натуральными числами. Пусть $n = \max \{n_1, n_2\}$ и пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ — n любых элементов из $I_1 \times I_2$. Тогда имеет место $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n) \in J_1 \times J_2$. Значит $(x_1, x_2) \in R(J_1 \times J_2)$ и следовательно, $R(J_1) \times R(J_2) \subseteqq R(J_1 \times J_2)$.

II. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $R(J_1 \times J_2)$. Тогда в полугрупп $S_1 \times S_2$ существует нильпотентный идеал I относительно $J_1 \times J_2$ такой, что $(x_1, x_2) \in I$. Поэтому существует натуральное число n, для которого $I^n \subseteqq J_1 \times J_2$. Обозначим знаком $I'[I'']$ проекцию идеала I в полугруппу $S_1[S_2]$. Относительно определения проекции имеет место $x_1 \in I'$ и $x_2 \in I''$ т. е. $(x_1, x_2) \in I' \times I''$. Согласно известной теореме $I'[I'']$ — идеал в полугруппе $S_1[S_2]$ (см. [2]).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n любых элементов из I'. Тогда существует n элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S_2$ таких, что $(x_1', y_1), (x_2', y_2), \ldots, (x_n', y_n) \in I$. Так как $I^n \subseteqq J_1 \times J_2$, то $(x_1', y_1)(x_2', y_2) \ldots (x_n', y_n) \in J_1 \times J_2$, т. е. $x_1' x_2' \ldots x_n' \in J_1$. Это значит, что идеал I' в полугруппе S_1 является нильпотентным относительно J_1. Отсюда вытекает, что $(x_1, x_2) \in R(J_1) \times R(J_2)$. Значит $R(J_1 \times J_2) \subseteqq R(J_1) \times R(J_2)$.

(в) I. Сперва мы докажем

$$M(J_1 \times J_2) \subseteqq M(J_1) \times M(J_2). \tag{8}$$

Докажем это от противного. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $M(J_1 \times J_2)$. Предполагаем, что $(x_1, x_2) \bar{\in} M(J_1) \times M(J_2)$. Это значит, что $x_1 \bar{\in} M(J_1)$ или $x_2 \bar{\in} M(J_2)$. Пусть, например $x_1 \in M(J_1)$. Тогда существует m-система в полугруппе S_1 (обозначим ее H_1), которая содержит x_1 и $H_1 \cap J_1 = \varnothing$. Согласно лемме 2, $H_1 \times S_2$ является m-системой в $S_1 \times S_2$. Из предшествующих рассуждений следует, что $(x_1, x_2) \in H_1 \times S_2$ и $(H_1 \times S_2) \cap (J_1 \times J_2) = \varnothing$. Это противоречит тому, что $(x_1, x_2) \in M(J_1 \times J_2)$. Подобным образом можно доказать, что $x_2 \in M(J_1)$. Это доказывает, что имеет место (8).

II. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $M(J_1) \times M(J_2)$. Предполагаем, что $(x_1, x_2) \bar{\in} M(J_1 \times J_2)$. Тогда существует простой идеал P в полугруппе $S_1 \times S_2$, который не содержит элемента (x_1, x_2) и $J_1 \times J_2 \subseteqq P$. В силу теоремы 1 имеет место

$$(9) \qquad P = (P_1 \times S_2) \cup (S_1 \times P_2),$$

где $P_1[P_2]$ является или простым идеалом в $S_1[S_2]$, или пустым множеством. Отсюда следует, что $J_1 \subseteqq P_1$ или $J_2 \subseteqq P_2$. Пусть, например, $J_1 \subseteqq P_2$. Так как $(x_1, x_2) \bar{\in} P$, то в силу (9) имеет место $x_1 \bar{\in} P$. Так как P_1 является простым идеалом в S_1, то $S_1 \setminus P_1$ является m-системой в S_1. Так как $J_1 \subseteqq P_1$, то $(S_1 \setminus P_1) \cap J_1 = \varnothing$. Следовательно, существует m-система $S_1 \setminus P_1$, которая содержит элемент x_1 и имеет пустое пересечение с J_1. Поэтому $x_1 \bar{\in} M(J_1)$. Подобным образом мы поступаем и в случае, если $J_2 \subseteqq P_2$ и придем к противоречию с тем, что $x_2 \in M(J_2)$. Следовательно, $(x_1, x_2) \in M(J_1 \times J_2)$. Это значит, что имеет место

$$(10) \qquad M(J_1) \times M(J_2) \subseteqq M(J_1 \times J_2).$$

Из (8) и (10) вытекает утверждение (8).

(г) I. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $L(J_1 \times J_2)$. Тогда существует по крайней мере один локально нильпотентный идеал I в полугруппе $S_1 \times S_2$ относительно идеала $J_1 \times J_2$, который содержит элемент (x_1, x_2). Обозначим знаком $I'[I'']$ проекцию идеала I в полугруппу $S_1[S_2]$. Элемент $x_1 \in I'$ и элемент $x_2 \in I''_2$, т. е. $(x_1, x_2) \in I' \times I''$. Пусть M_1 — любая подполугруппа, порожденная конечным числом элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in I'$, т. е. $M_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle \subseteqq I'$. Тогда существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_k \in S_2$ такие, что $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k) \in I$. Подполугруппа $M = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k) \rangle \subseteqq I$ является нильпотентной относительно $J_1 \times J_2$. Это значит, что существует натуральное число n, для которого $M^n \subseteqq J_1 \times J_2$. Обозначим знаком M' проекцию подполугруппы M в S_1. Согласно лемме 1 имеет место $M' = M_1$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является элементами $M_1 = M'$. Тогда существуют элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S_2$ такие, что $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in M$. Так как $M^n \subseteqq J_1 \times J_2$, то произведение $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n) \in J_1 \times J_2$ $(x_1 x_2 \ldots x_n \in J_1)$. Из предыдущего вытекает, что идеал I' в полугруппе S_1 является локально нильпотентным относительно J_1. Подобным образом можно доказать, что идеал I'' в полугруппе S_2 является локально нильпотентным относительно идеала J_2. Это значит, что $I' \times I'' \subseteqq L(J_1) \times L(J_2)$. Отсюда следует $L(J_1 \times J_2) \subseteq L(J_1) \times L(J_2)$.

II. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $L(J_1) \times L(J_2)$. Тогда существует локально нильпотентный идеал $I_1[I_2]$ в полугруппе $S_1[S_2]$ относительно идеала $J_1[J_2]$ такой, что $x_1 \in I_1$ и $x_2 \in I_2$, т. е. $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. В дальнейшем докажем, что идеал $I_1 \times I_2$ в полугруппе $S_1 \times S_2$ является локально нильпотентным идеалом относительно $J_1 \times J_2$. Пусть M — любая подполугруппа, порожденная конечным числом элементов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$ из $I_1 \times I_2$. Обозначим знаком $M'[M'']$ проекцию полугруппы

M в $S_1[S_2]$. Согласно лемме 1 имеет место $M' = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ и $M'' = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in I_1$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k \in I_2$. Следовтельно, $M'[M'']$ является подполугруппой в $I_1[I_2]$, порожденной конечным числом элементов из $I_1[I_2]$. Тогда существуют натуральные числа n_1, n_2 такие, что $(M')^{n_1} \subseteq J_1$ и $(M'')^{n_2} \subseteq J_2$. Кроме того, подполугруппа M является подмножеством полугруппы $M' \times M''$. Пусть $n = \max\{n_1, n_2\}$. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ являются любыми элементами из $M' \times M''$. Тогда произведение $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n) \in J_1 \times J_2$. Отсюда вытекает, что подполугруппа $M' \times M''$ локально нильпотентна относительно идеала $J_1 \times J_2$. Поэтому идеал $I_1 \times I_2$ является локально нильпотентным относительно $J_1 \times J_2$. Из предшествующих рассуждений следует, что $L(J_1) \times L(J_2) \subseteq L(J_1 \times J_2)$.

(д) I. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $R^*(J_1) \times R^*(J_2)$. Тогда существует нильидеал $I_1[I_2]$ в полугруппе $S_1[S_2]$ относительно идеала $J_1[J_2]$ такой, что $x_1 \in I_1[x_2 \in I_2]$. Покажем, что идеал $I_1 \times I_2$ в полугруппе $S_1 \times S_2$ является нильидеалом относительно $J_1 \times J_2$. Пусть (y_1, y_2) — любой элемент из $I_1 \times I_2$, т. е. $y_1 \in I_1$ и $y_2 \in I_2$. Так как $I_1[I_2]$ является нильидеалом в $S_1[S_2]$ относительно $J_1[J_2]$, то существуют натуральные числа n_1, n_2, для которых $y_1^{n_1} \in J_1$ и $y_2^{n_2} \in J_2$. Тогда имеет место $(y_1, y_2)^{n_1+n_2} = (y_1^{n_1+n_2}, y_2^{n_1+n_2}) \in J_1 \times J_2$. Отсюда следует, что $I_1 \times I_2$ является нильидеалом относительно $J_1 \times J_2$. Из продшествующих рассуждений вытекает $R^*(J_1) \times R^*(J_2) \subseteq R^*(J_1 \times J_2)$.

II. Пусть (x_1, x_2) — любой элемент из $R^*(J_1 \times J_2)$. Тогда существует нильидеал I в $S_1 \times S_2$ относительно идеала $J_1 \times J_2$, который содержит элемент (x_1, x_2). Обозначим знаком $I'[I'']$ проекцию идеала I в полугруппу $S_1[S_2]$. Тогда $x_1 \in I'$ и $x_2 \in I''$, т. е. $(x_1, x_2) \in I' \times I''$. Теперь докажем, что идеал $I'[I'']$ в полугруппе $S_1[S_2]$ является нильидеэлом относительно идеала $J_1[J_2]$. Пусть y_1 — любой элемент из I'; тогда существует элемент $y_2 \in S_2$ такой, что $(y_1, y_2) \in I$. Так как I является нильидеалом в $S_1 \times S_2$ относительно $J_1 \times J_2$, то существует натуральное число n, для которого имеет место $(y_1, y_2)^n = (y_1^n, y_2^n) \in J_1 \times J_2$, т. е. $y_1^n \in J_1$. Подобным образом можно доказать, что идеал I'' является нильидеалом в полугруппе S_2 относительно J_2. Отсюда следует, что $(x_1, x_2) \in I' \times I'' \subseteq R^*(J_1) \times R^*(J_2)$. Это значит, что $R^*(J_1 \times J_2) \subseteq R^*(J_1) \times R^*(J_2)$.

(е) Доказательство утверждения (е) аналогично доказательству утверждения (в) и поэтому мы его не приводим. Заметим только, что вместо m-системы следует взять сильную подполугруппу, а вместо простого идеала — вполне простой идеал, вместо же теоремы 1 — теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ivan J., *O direktnom súčine pologrúp*, Mat.-fyz. časop. *3* (1953), 57—66.

[2] Иван Я., *Простота и минимальные идеалы прямого произведения полугрупп*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963) 114—124.

[3] Petrich M., *Prime ideals of the cartesian product of two semigroups*, Czechosl. Math. J. *12* (*87*) (1962), 150—152.

[4] Шеврин Л. Н., *К общей теории полугрупп*, Мат. сб. *53* (1961), 367—386.

[5] Шулка Р., *О нильпотентных элементах, идеалах и радикалах полугруппы*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 209—222.

Поступило 7. 7. 1966.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava