E. Tamás Schmidt

Zur Charakterisierung der Kongruenzverbände der Verbände

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 1, 3--20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126757`

MATEMATICKÝ ČASOPIS

ROČNÍK 18 1968 ČÍSLO 1

ZUR CHARAKTERISIERUNG DER KONGRUENZVERBÄNDE DER VERBÄNDE

E. TAMÁS SCHMIDT, Halle/Saale (DDR)

§ 1. Einleitung

Die Menge $\Theta(A)$ aller Kongruenzrelationen einer algebraischen Struktur A bildet einen kompakt erzeugten Verband, den Kongruenzverband von A. Wie von G. Grätzer und dem Verfasser [2] gezeigt wurde, gilt auch die Umkehrung dieser Behauptung, und so lassen sich die Kongruenzverbände algebraischer Strukturen als kompakt erzeugte Verbände charakterisieren. Für den Fall, daß A selbst schon ein Verband ist, haben N. Funayama und T. Nakayama [1] eine weitere Eigenschaft des Kongruenzverbandes nachgewiesen; sie zeigten, daß $\Theta(A)$ distributiv ist. Die Vermutung ist, daß diese Bedingungen hinreichend sind, d. h. jeder distributive, kompakt erzeugte Verband dem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph ist.

Zum Beweis dieser Vermutung hat R. P. Dilworth den ersten Schritt gemacht; er hat bewiesen, daß jeder endliche, distributive Verband dem Kongruenzverband eines (endlichen) Verbandes isomorph ist. In [3] haben G. Grätzer und der Verfasser den Satz von Dilworth verallgemeinert und gezeigt, daß jeder distributive Verband in der Form 2^P — wo P eine beliebige teilweise geordnete Menge ist — als Kongruenzverband darstellbar ist. Später, in [5], wurde bewiesen, daß jeder kompakt erzeugte Verband, in welchem $a \cup \bigwedge b_\alpha = \bigwedge (a \cup b_\alpha)$ für jedes kompakte Element a gilt, dem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph ist.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, diese Ergebnisse zu verallgemeinern. Wir werden eine Methode entwickeln, um Verbände als Kongruenzverbände darstellen zu können. Wir werden für Boolesche Algebren einen speziellen Vereinigungshomomorphismus erklären (§ 4) und zeigen, daß bei einem geeigneten Vereinigungshomomorphismus der Idealverband des Bildes einer Booleschen Algebra als Kongruenzverband darstellbar ist. Die nächsten zwei Paragraphen enthalten einige bekannte Ergebnisse.

§ 2. Einige Eigenschaften der Kongruenzverbände

Definition 2.1. *Ein Element a eines vollständigen Verbandes L heißt kompakt, wenn aus $a \leqslant \bigvee (x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ die Existenz einer endlichen Teilmenge Λ' von Λ mit $a \leqslant \bigvee (x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda')$ folgt. Der Verband L heißt ein kompakt erzeugter Verband, wenn L vollständig ist und jedes Element die Vereinigung kompakter Elemente ist.*

Man kann sich leicht überlegen, daß die Vereinigung zweier kompakter Elemente eines kompakt erzeugten Verbandes kompakt ist. Daraus folgt, daß die kompakten Elemente bezüglich der Vereinigung einen Halbverband (unter einem Halbverband verstehen wir einen Vereinigungshalbverband) bilden. Wir nennen diesen Halbverband die *Basis* des kompakt erzeugten Verbandes L und bezeichnen ihn mit $\mathscr{K}(L)$. Die kompakt erzeugten Verbände lassen sich folgendermaßen mit Hilfe ihrer Basis charakterisieren:

Hilfssatz 2.2. *Ein Verband L ist dann und nur dann kompakt erzeugt, wenn L mit dem Idealverband eines ein Nullelement besitzenden Halbverbandes H isomorph ist. Es gilt $H \cong \mathscr{K}(L)$.*

Den Idealverband eines Halbverbandes H werden wir mit $I(H)$ bezeichnen. Es gilt also $I(\mathscr{K}(L)) \cong L$.

Wie wir schon früher erwähnt haben, bilden die Kongruenzverbände der Verbände einen distributiven kompakt erzeugten Verband. Die distributiven kompakt erzeugten Verbände gestatten mit Hilfe der distributiven Halbverbände eine Charakterisierung.

Definition 2.3. *Ein Halbverband H heißt distributiv, wenn aus $c \leqslant a \cup b$ ($a, b, c \in H$) folgt, daß in H solche Elemente $a' \leqslant a$, $b' \leqslant b$ existieren, für welche $a' \cup b' = c$ gilt.*

Hilfssatz 2.4. *Ein kompakt erzeugter Verband L ist dann und nur dann distributiv, wenn die Basis von L ein distributiver Halbverband ist.*

Es sei L ein beliebiger Verband oder Halbverband und I eine Teilmenge von L. Es bezeichne $\Theta\,[I]$ die kleinste Kongruenz Θ (Kongruenzrelation) mit der Eigenschaft, daß alle Elemente der Menge I in derselben Θ-Klasse liegen. $\Theta\,[I]$ heißt die durch I erzeugte Kongruenz. Wenn $I = \{a, b\}$ ist ($a, b \in L$), so bezeichnen wir die erzeugte Kongruenz mit Θ_{ab}. Diese Kongruenz heißt eine minimale Kongruenz.

Die kompakten Elemente des Kongruenzverbandes $\Theta(L)$ sind die Kongruenzen, die sich in der Form $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \Theta_{a_i b_i}$ schreiben lassen.

Hilfssatz 2.5. (Grätzer—Schmidt [4]) *Es sei L ein distributiver Verband* *und es sei I ein Ideal von L. Es gilt $a \equiv b\ (\Theta[I])\ (a, b \in L)$ dann und nur dann, wenn es in I ein v gibt, welches die Gleichung $a \cup v = b \cup v$ befriedigt.*

§ 3. Relativ pseudokomplementäre Halbverbände

Definition 3.1. *Der Halbverband H heißt relativ pseudokomplementär, wenn sich zu jedem Elementepaar $a, b \in H$ ein Element $c \in H$ finden läßt mit der Eigenschaft: $a \cup x \geqslant b$ gilt dann und nur dann, wenn $x \geqslant c$ ist. Das Element c ist das relative Pseudokomplement von a bezüglich b und wird mit $a * b$ bezeichnet.*

Hilfssatz 3.2. *Jeder relativ pseudokomplementäre Halbverband besitzt ein Nullelement und ist distributiv.*

Beweis. Es sei a ein beliebiges Element von H. Dann existiert $a * a$, welches das Nullelement ist. Weiter sei $u \leqslant a \cup b\ (u, a, b \in H)$. Wir definieren die folgenden zwei Elemente: $b_1 = a * (a \cup u)$, $a_1 = b_1 * u$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß $b_1 \leqslant b$, $a_1 \leqslant a$ und $a_1 \cup b_1 = u$ ist. Somit ist aber H distributiv.

Bemerkung. Für einen kompakt erzeugten Verband L ist die Basis $\mathscr{K}(L)$ dann und nur dann ein relativ pseudokomplementärer Halbverband, wenn in L das distributive Gesetz $a \cup \bigwedge_{\alpha} b_\alpha = \bigwedge_{\alpha} (a \cup b_\alpha)$ für alle kompakten Elemente a gilt.

Beweis. Siehe Lemma 3 in [5].

Hilfssatz 3.3. *Es sei H ein relativ pseudokomplementärer Halbverband mit Einselement. Dann bilden diejenigen Elemente aus H die sich in der Form $a^* \quad a * 1$ schreiben lassen — bezüglich der im Halbverband H geltenden Ordnungsrelation — eine Boolesche Algebra B. B ist bezüglich der Vereinigung ein Teilhalbverband von H.*

Beweis. Siehe Lemma 4 in [5].

Ist H ein beliebiger relativ pseudokomplementärer Halbverband, so besitzt jedes Hauptideal $(a]$ die Eigenschaften des Hilfssatzes 3.3. In jedem $(a]$ gibt es also eine Boolesche Algebra, die mit $B(a)$ bezeichnet wird. Es gilt der:

Hilfssatz 3.4. *Es seien x, y, a beliebige Elemente des relativ pseudokomplementären Halbverbandes H. Es existiert ein größtes $x(a) \in B(a)$, so daß $x \geqslant x(a)$. Es gilt $(x \cup y)(a) = x(a) \cup y(a)$. Ist $u = x_1 \cup x_2$ mit $x_i \in B(a_i)$ $(a_i \in H,\ i = 1{,}2)$, so gilt $u = u(a_1) \cup u(a_2)$.*

Beweis. Wir behaupten, daß $x(a) = (x * (a \cup x)) * a$ ist. Es bezeichne y das Element $x * (a \cup x)$. Es gilt $y \leqslant a$, und so $x(a) = y * a \in B(a)$. Aus

$x \cup y \geqslant a$ folgt $x(a) \leqslant x$. Es sei $x(a) \leqslant z \leqslant x$, $z \in B(a)$, so folgt $z * a \leqslant \leqslant x * a \leqslant y$, und daraus folgt $x \cup (z * a) = (x \cup z) \cup (z * a) = x \cup (z \cup \cup (z * a)) = x \cup a$, d. h. $z * a \geqslant y$ und so $z * a = x(a) * a = y$. Daraus ergibt sich: $z = x(a)$.

Wir zeigen, da für beliebige $x, y, a \in H$, $(x \cup y)(a) = x(a) \cup y(a)$ gilt. Es ist $(x \cup y)(a) \leqslant x \cup y$ und so folgt aus der Distributivität von H die Existenz der Elemente $v_1 \leqslant x$, $v_2 \leqslant y$ mit $v_1 \cup v_2 = (x \cup y)(a)$. Es sei $t_1 = = v_2 * (x \cup y)(a)$, $t_2 = t_1 * (x \cup y)(a)$, so gilt: $t_1, t_2 \in B(a), t_1 \cup t_2 = (x \cup \cup y)(a)$. Da $x \geqslant t_1, y \geqslant t_2$ ist, muß $x(a) \geqslant t_1$, $y(a) \geqslant t_2$, sein, d. h. $x(a) \cup \cup y(a) = (x \cup y)(a)$.

Die dritte Behauptung ist wegen $x_i \geqslant u(a_i)$ klar.

Hilfssatz 3.5. *Es sei H ein relativ pseudokomplementärer Verband. Es bezeichne $\bar{B}$ die durch H erzeugte Boolesche Algebra. Zu jedem $x \in B$ existiert ein kleinstes $\bar{x} \in H$ mit $x \leqslant \bar{x}$. Es gilt $\bar{x} \cup \bar{y} = \overline{x \cup y}$.*

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung des Hilfssatzes: Gibt es zu jedem $x \in B$ ein kleinstes $\bar{x} \in H$, mit $x \leqslant \bar{x}$, so muß H relativ pseudokomplementär sein.

§ 4. Distributive Kongruenzen

Es bezeichne L einen Verband. Es soll $L^{\cup}$ diejenige algebraische Struktur bezeichnen, welche dieselben Elemente wie L hat, wobei aber nur die Vereinigung von L als Operation betrachtet wird. $L^{\cup}$ ist ein Halbverband. Eine Kongruenz bzw. ein Homomorphismus von $L^{\cup}$ heißt eine Vereinigungskongruenz ($\cup$ — Kongruenz) bzw. $\cup$-Homomorphismus des Verbandes L. Wenn $\Theta^{\cup}$ eine $\cup$-Kongruenz von L ist, so bezeichnet $L/\Theta^{\cup}$ die Faktorstruktur $L^{\cup}/\Theta^{\cup}$.

Das homomorphe Bild eines distributiven Halbverbandes ist nicht unbedingt distributiv. (Es gilt sogar der Satz, daß jeder Halbverband mit Nullelement zu einem homomorphen Bild eines distributiven Halbverbandes isomorph ist.) Wir werden gewisse Homomorphismen für Halbverbände definieren und werden untersuchen, wann das Bild eines distributiven Halbverbandes wieder distributiv ist.

Im folgenden wird der Begriff der Kongruenz von Halbverbänden etwas eingeengt, wir führen einen neuen Begriff ein:

Definition 4.1. *Die Kongruenz Θ des Halbverbandes H heißt distributiv, wenn aus $x \cup y \leqslant u$, $x \cup y \equiv u\ (\Theta)$ die Existenz gewisser Elemente $x_1, y_1 \in H$ folgt, so daß $x_1 \equiv x(\Theta)$, $y_1 \equiv y(\Theta)$ und $x_1 \cup y_1 \geqslant u$ gilt. Ein Homomorphismus des Halbverbandes heißt distributiv, wenn die induzierte Kongruenz distributiv ist. Ist H ein Verband, so heißt die $\cup$-Kongruenz $\Theta^{\cup}$ distributiv, wenn $\Theta^{\cup}$ auf $H^{\cup}$ distributiv ist.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, daß $x_1 \geqslant x$ und $y_1 \geqslant y$ ist. Es bezeichne:

$$C_x = \{z;\ z \in H;\ z \geqslant x,\ z \equiv x\,(\Theta)\}.$$

Wenn H ein distributiver Halbverband ist; so ist es klar, daß eine Kongruenz Θ von H genau dann distributiv ist, wenn $C_{x \cup y}$ die Vereinigung der Komplexe C_x und C_y ist.

Wir gehen zu Beispielen distributiven $\cup$-Kongruenzen über.

Beispiel 1. Es sei I ein Ideal des distributiven Verbandes L. $\Theta\,[I]$ ist eine distributive $\cup$-Kongruenz. Jede Kongruenz einer Booleschen Algebra ist eine distributive $\cup$-Kongruenz.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Hilfssatz 2.5.

Beispiel 2. Es sei H ein distributiver relativ komplementärer Verband, und es bezeichne P ein duales Primideal von H. Wir betrachten eine beliebige Kongruenz Θ des Verbandes P. Die Kongruenz Θ induziert in H eine Aquivalenz $\Theta^{\cup} : x \equiv y(\Theta^{\cup})$, $x \neq y$ dann und nur dann, wenn $x \equiv y(\Theta)$, $x, y \in P$. Wir bezeichnen $\Theta^{\cup}$ mit $\Theta^{\cup}[P, \Theta]$. Wie man leicht nachprüfen kann, ist $\Theta^{\cup}[P, \Theta]$ eine distributive $\cup$-Kongruenz des Verbandes H.

In den folgenden zwei Hilfssätzen geben wir zwei wichtige Eigenschaften der distributiven Kongruenzen an.

Hilfssatz 4.2. *Es sei Θ eine distributive Kongruenz des distributiven Halbverbandes H. Der Faktorhalbverband H/Θ ist distributiv.*

Beweis. Es sei Θ distributiv. Bezeichnen wir die Θ-Klasse die das Element x enthält, mit $\bar{x}$, so gibt es zu zeigen, daß wenn $\bar{t} \leqslant \bar{x} \cup \bar{y}$ ist, Elemente $\bar{x}_2 \leqslant \bar{x}$, $\bar{y}_2 \leqslant \bar{y}$ mit der Eigenschaft $\bar{x}_2 \cup \bar{y}_2 = \bar{t}$ existieren.

Es sei also $\bar{t} \leqslant \bar{x} \cup \bar{y} = x \cup y$, wo $x,\ y,\ t \in H$ sind. Dann gibt es ein $u \in x \cup y$, so daß $t \leqslant u$ und $x \cup y \leqslant u$ ist. Da $x \cup y \equiv u\,(\Theta)$ gilt und Θ distributiv ist, erhalten wir die Existenz der Elemente x_1, y_1 mit $x \equiv x_1\,(\Theta)$, $y \equiv y_1\,(\Theta)$ und $x_1 \cup y_1 \geqslant u$. H ist aber ein distributiver Halbverband und so folgt aus $t \leqslant u \leqslant x_1 \cup y_1$, daß für geeignete x_2, y_2, $t = x_2 \cup y_2$, $x_2 \leqslant x_1$, $y_2 \leqslant y_1$ ist. Dann gilt auch $\bar{x}_2 \leqslant \bar{x}_1 = \bar{x}$, $\bar{y}_2 \leqslant \bar{y}_1 \leqslant \bar{y} = \bar{y}$ und $\bar{x}_2 \cup \bar{y}_2 = \bar{t}$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 4.3. *Die Vereinigung distributiver Kongruenzen ist selbst distributiv.*

Beweis. Es seien Θ_α distributive Kongruenzen des Halbverbandes H. Es sei $\Theta = \bigvee_\alpha \Theta_\alpha$. Wenn $x \cup y \leqslant u$, $x \cup y \equiv u(\Theta)$ ist, so gibt es eine endliche Kette von Elementen $x \cup y = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \quad \ldots \leqslant u_n \geqslant u$, so daß $u_{i-1} \equiv u_i(\Theta_{\alpha_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Aus der Tatsache, daß Θ_{α_1} distributiv ist, erhält man die Existenz von Elementen x_1, y_1 mit $x \equiv x_1(\Theta_{\alpha_1})$, $y \equiv y_1(\Theta_{\alpha_1})$ und $x_1 \cup y_1 \geqslant u_1$. Wenn x_{i-1}, y_{i-1} schon gefunden sind, so existieren ebenfalls noch Elemente x_i, y_i mit $x_{i-1} \equiv x_i(\Theta_{\alpha_i})$, $y_{i-1} \equiv y_i(\Theta_{\alpha_i})$, $x_i \cup y_i \geqslant u_i$. Es gilt dann offensichtlich $x_n \equiv x\,(\bigvee \Theta_\alpha)$, $y_n \equiv y\,(\bigvee \Theta_\alpha)$ und $x_n \cup y_n \geqslant u$, d. h. $\Theta = \bigvee \Theta_\alpha$ ist eine distributive Kongruenz.

Im folgenden geben wir eine wichtige Charakterisierung der distributiven Kongruenzen. Dazu brauchen wir einen weiteren Begriff.

Definition 4.4. *Es bezeichne I ein Ideal und Θ eine Kongruenz des Halbverbandes H. Die abgeschlossene Hülle des Ideals I nach Θ ist die Gesamtheit aller $x \in H$, zu welchem sich ein $x' \in I$ mit $x' \equiv x \cup x'(\Theta)$ finden läßt. I heißt abgeschlossen, wenn $\bar{I} = I$ ist.*

Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß $\bar{I}$ ein Ideal ist. Offenbar gilt auch $I \subseteq \bar{I}$. Die Abbildung $I \to \bar{I}$ ist eine Hüllenoperation (Abschließungsoperation).

Es gilt der folgende:

Hilfssatz 4.5. *Die Kongruenz Θ des Halbverbandes H ist dann und nur dann distributiv, wenn für je zwei Ideale I und J die Beziehung $\bar{I} \cup \bar{J} - I \cup J$ besteht.*

Beweis. Wir müssen zeigen, wenn Θ distributiv ist, gilt $\bar{I} \cup \bar{J} - I \cup J$. Nach der Definition von $\overline{I \cup J}$ existiert zu jedem $u \in I \cup J$ ein $u' \in I \cup J$ mit $u' \equiv u \cup u'(\Theta)$. Da $u' \in I \cup J$ ist, gibt es Elemente $x \in I$, $y \in J$ mit $x \cup y \geqslant u'$. Wir bezeichnen das Element $x \cup y$ mit u_1'. Dann gilt $u_1' \in I \cup J$, und $u_1' \equiv u \cup u_1'(\Theta)$. Ferner folgt aus der Distributivität der Kongruenz Θ, daß sich Elemente x_1, y_1 so finden lassen, daß $x \equiv x_1(\Theta)$, $y \equiv y_1(\Theta)$ und $x_1 \cup y_1 \geqslant u \cup u_1'$ ist. Berücksichtigt man die Definition 4.4, so ergibt sich, daß $x_1 \in \bar{I}$, $y_1 \in \bar{J}$ gilt, und so erhalten wir wegen $u \leqslant x_1 \cup y_1$, $u \in \bar{I} \cup \bar{J}$. Es gilt also $\bar{I} \cup \bar{J} = \overline{I \cup J}$. Umgekehrt nehmen wir an, daß für zwei beliebige Ideale $\bar{I} \cup \bar{J} = \overline{I \cup J}$ gilt. Es sei $x \cup y \leqslant u$, $x \cup y \equiv u\,(\Theta)$. Dann ist u in $\overline{(x \cup y]} = \overline{(x]} \cup \overline{(y]}$ enthalten, d. h. es gilt $u \leqslant x_1 \cup y_1$, wo $x_1 \in \overline{(x]}$, $y_1 \in \overline{(y]}$, $x \leqslant x_1$, $y \leqslant y_1$ ist. Es gilt dann $x_1 \equiv x\,(\Theta)$, $y_1 \equiv y\,(\Theta)$, d. h. Θ ist distributiv.

Der Durchschnitt von abgeschlossenen Idealen ist wieder abgeschlossen, d. h. die Menge aller abgeschlossenen Ideale des Halbverbandes H bildet einen Verband, den wir mit $\bar{I}(H)$ bezeichnen werden. Wir wollen diesen Verband betrachten. Es gilt der:

Hilfssatz 4.6. *Bezeichnet Θ eine beliebige Kongruenz des Halbverbandes H, so gilt $\bar{I}(H) \cong I(H/\Theta)$.*

Beweis. Nach der Definition der abgeschlossenen Ideale sehen wir sofort ein, daß jede Θ-Klasse, die mit dem abgeschlossenen Ideal $\bar{I}$ ein Element gemeinsam hat, ganz in $\bar{I}$ enthalten ist. Daraus ergibt sich offensichtlich die Behauptung.

Wenn H ein Verband ist, so ist die Faktorstruktur $H/\Theta^{\cup}$, wo $\Theta^{\cup}$ eine $\cup$-Kongruenz ist, im Allgemein kein Verband. Wir definieren spezielle Kongruenzen für Halbverbände, die eine ähnliche Rolle spielen wie die minimalen Kongruenzen. Man kann leicht zeigen das jede Θ-Klasse einer minimalen Kongruenz eines Halbverbandes ein maximales Element besitzt.

Definition 4.7. *Eine Kongruenz Θ eines Halbverbandes heißt eine monomiale Kongruenz, wenn jede Θ-Klasse ein größtes Element besitzt.*

Hilfssatz 4.8. *Wenn $\Theta^{\cup}$ eine monomiale Kongruenz des Verbandes L ist, so ist $L/\Theta^{\cup}$ ein Verband. Ist $\Theta^{\cup}$ distributiv, so ist $L/\Theta^{\cup}$ einem Teilverband von L isomorph.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar, wenn nämlich x bzw. y die größten Elemente der Klassen C_1 bzw. C_2 sind, so ist der Durchschnitt von C_1 und C_2 diejenige Klasse, welche das Element $x \cap y$ enthält.

Die Menge aller größten Elemente der $\Theta^{\cup}$-Klassen bilden einen Verband L', der mit $L/\Theta^{\cup}$ isomorph ist. Es sei $\Theta^{\cup}$ distributiv. Daß L' ein Teilverband ist folgt aus dem Hilfssatz 4.5.

Hilfssatz 4.9. *Es sei $\Theta^{\cup}$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz der verallgemeinerten Booleschen Algebra B. $B/\Theta^{\cup}$ ist ein relativ pseudokomplementärer Verband. Ist L ein relativ pseudokomplementärer Verband, so existiert eine verallg. Boolesche Algebra B und eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz $\Theta^{\cup}$ von B, so daß $L \cong B/\Theta^{\cup}$ gilt.*

Beweis. Ist $\Theta^{\cup}$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz von B, so (nach dem Hilfssatz 4.8) läßt sich $B/\Theta^{\cup}$ in B als Teilverband einbetten. Es sei $a, b \in B/\Theta^{\cup}$, $a < b$. Es bezeichne c das relative Komplement von a im Intervall $[0, b]$. Wenn $x \in B$ so bezeichne $\bar{x}$ daß größte Element der $\Theta^{\cup}$-Klasse die x enthält. Es gilt $\bar{x} \in B/\Theta^{\cup}$. Wegen a, $b \in B/\Theta^{\cup}$ erhalten wir, daß $\bar{c} \cup a = \overline{c \cup a} = c \cup a = \bar{b} = b$ ist, d. h. $\bar{c} = a * b$.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, es sei B die durch L erzeugte verallgemeinerte Boolesche Algebra. Nach Hilfssatz 3.5 gibt es zu jedem $x \in B$ ein kleinstes $\bar{x} \in L$ mit $x \leqslant \bar{x}$, $\bar{x} \cup \bar{y} = \overline{x \cup y}$. Die Abbildung $x \to \bar{x}$ ist also ein distributiver $\cup$-Homomorphismus von B auf L. Die induzierte $\cup$-Kongruenz ist offenbar monomial, da x das größte Element der Klasse, die x enthält, ist.

Hilfssatz 4.10. *Es sei $\Theta^{\cup}$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz des distributiven Verbandes L. Ist $a \in L$, so induziert $\Theta^{\cup}$ auf dem Hauptideal $(a]$ eine $\cup$-Kongruenz $\Theta^{\cup}_a$. Diese $\Theta^{\cup}_a$ ist wieder eine monomiale distributive $\cup$-Kongruenz.*

Beweis. Es sei $x \cup y \equiv u\ (\Theta^{\cup}_a)$, $x \cup y \leqslant u$, x, y, $u \in (a]$. So gilt auch

$x \cup y \equiv u\,(\Theta^{\cup})$. Da aber $\Theta^{\cup}$ distributiv ist, existieren die Elemente $x_1 \geqslant x$, $y_1 \geqslant y$ mit $x_1 \equiv x\,(\Theta^{\cup})$, $y_1 \equiv y\,(\Theta^{\cup})$, $x_1 \cup y_1 \geqslant u$. L ist aber ein distributiver Verband, so können wir $x_1 \cup y_1 = u$ voraussetzen. So ist x_1, $y_1 \in (a]$. d. h. $\Theta_a^{\cup}$ ist distributiv. Daß $\Theta_a^{\cup}$ monomial ist, ist offenbar.

Ist Θ eine Kongruenz des Halbverbandes H mit Nullelement, so daß aus $x \quad 0\,(\Theta)$ $x = 0$ folgt, so sagen wir, daß der Kern von Θ die Null ist.

Schließlich erwähnen wir noch zwei Probleme:

Problem 1. *Ist jeder distributive Halbverband mit Nullelement zu einer Faktorstruktur einer verallgemeinerten Booleschen Algebra nach einer distributiven $\cup$-Kongruenz isomorph?*

Problem 2. *Ensteht jede distributive Kongruenz als die Vereinigung distributiver monomialer Kongruenzen? Entsteht jede distributive $\cup$-Kongruenz einer Booleschen Algebra als die Vereinigung solcher $\cup$-Kongruenzen die im Beispiel* 2 *definiert sind?*

§ 5. Kongruenz-isomorphe Erweiterung

Wir beginnen diesen Paragraphen mit zwei Definitionen:

Definition 5.1. *Es sei L' ein Teilverband des Verbandes L. Wir sagen, daß die Kongruenz $\Theta \in \Theta\,(L')$ auf L erweiterbar ist, wenn eine kleinste Kongruenz $\bar{\Theta} \in \Theta\,(L)$ derart existiert, daß $x \equiv y\,(\bar{\Theta})$ x, $y \in L'$ dann und nur dann gilt, wenn $x \equiv y\,(\Theta)$ ist. $\bar{\Theta}$ heißt die Erweiterung von Θ.*

Definition 5.2. *Der Verband L heißt eine kongruenz-isomorphe Erweiterung seines Teilverbandes L', wenn jede Kongruenz $\Theta \in \Theta\,(L')$ auf L erweiterbar ist; und die Abbildung $\Theta \to \bar{\Theta}$ definiert einen Isomorphismus zwischen $\Theta\,(L)$ und $\Theta\,(L')$.*

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis eines Hilfssatzes, welcher in der Theorie der Kongruenzverbände eine wesentliche Rolle spielt.

Hilfssatz 5.3. *Zu einem beliebigen modularen Verband L mit Nullelement gibt es mindestens einen ein Nullelement besitzenden Verband M mit den folgenden zwei Eigenschaften:*

(i) *M besitzt drei mit L isomorphe Ideale L_1, L_2 und L_3, so daß $L_i \wedge L_j = 0$ $(i \neq j)$ ist;*

(ii) *M ist eine kongruenz-isomorphe Erweiterung jedes L_i.*

Beweis. Der Hilfssatz wurde zuerst in [5] bewiesen. Wir wollen hier nur die Konstruktion eines Verbandes M angeben.

Betrachten wir das direkte Produkt $T = L \times L \times L$. Die Elemente von T sind die Elementetripel (x, y, z) mit $x, y, z \in L$. Das Element $(x, y, z) \in T$ heißt *normal*, wenn $x \cap y = x \cap z = y \cap z$. Die Menge aller normalen Elemente bildet einen Verband M. Ist $u = (x, y, z) \in T$, so ist $\overline{u} = \overline{(x, y, z)} = (x \cup (y \cap z), y \cup (x \cap z), z \cup (x \cap y)) \in M$ das kleinste normale Element v mit der Eigenschaft $u \leqq v$. Dieser Verband genügt den Eigenschaften (i) und (ii). Das Ideal L_1 besteht aus allen Elementen $(x, 0, 0)$. Analog ist L_2 die Menge der Elemente $(0, x, 0)$, und L_3 ist die Menge der Elemente $(0, 0, x)$. M ist bezüglich des Durchschnitts ein Teilhalbverband von T. Die Operationen von M werden mit $\wedge$, $\vee$ bezeichnet. Wenn (x, y, z), $(u, v, w) \in M$, so $(x, y, z) \vee (u, v, w) = \overline{(x \cup u, y \cup v, z \cup w)} = ((x \cup u) \cup [(y \cup v) \cap (z \cup w)], (y \cup v) \cup [(x \cup u) \cap (z \cup w)], (z \cup w) \cup [(x \cup u) \cap (y \cup v)])$. Wir führen schließlich die Bezeichnungen $x_1 = (x, 0, 0)$, $x_2 = (0, x, 0)$, $x_3 = (0, 0, x)$ ein. So ist $(x, y, z) = x_1 \vee y_2 \vee z_3$.

Im folgenden möge M stets den ober konstruierten Verband bezeichnen.

Der Hilfssatz 5.3. läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Es sei L ein modularer Verband, mit Nullelement, und $\mathfrak{m}$ eine beliebige Mächtigkeit. Es existiert ein Nullelement besitzender Verband M mit folgenden zwei Eigenschaften:

(i) M besitzt $\mathfrak{m}$ mit L isomorphe Ideale L_α, so daß $L_\alpha \wedge L_\beta = 0$ ist;

(ii) M ist eine kongruenz-isomorphe Erweiterung jedes L_α. (T ist in diesem Fall das diskrete direkte Produkt.)

Problem 3. *Kann man zu jedem modularen Verband L einen modularen Verband M finden, der die Eigenschaften* (i)—(ii) *aus Hilfssatz* 5.3 *besitzt?*

Problem 4. *Gilt der Hilfssatz für beliebige Verbände?*

§ 6. Faktorverband als die Basis eines Kongruenzverbandes.

Mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Paragraphen können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 6.1. *Ist $\Theta^\cup$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz der verallgemeinerten Booleschen Algebra B, so existiert ein Verband N, für den $B/\Theta^\cup = \mathscr{K}(\Theta(N))$ gilt.*

Zusatz. *N besitzt die folgenden zwei Eigenschaften:*

(α) *N hat zwei Ideale J_1 und J_2, so daß $J_1 \cong B/\Theta^\cup$, $J_2 \cong B$ und $J_1 \wedge J_2 = 0$ ist;*

(β) *jede Kongruenz $\Theta\,[I_1]$ des Ideales J_1, wo I_1 ein Ideal von J_1 ist, ist auf N erweitbar; umgekehrt, jede Kongruenz von N ist die Erweiterung einer Kongruenz $\Theta\,[I_1]$.*

Beweis. Wendet man den Hilfssatz 5.3. auf den Verband $B\,(= L)$ an, so erhält man einen Verband M. Dieser Verband besitzt drei mit B isomorphe Ideale: B_1, B_2 und B_3.

Wir definieren eine Teilmenge N des Verbandes M:

(*) Es gehört $(x, y, z) \in M$ dann und nur dann zu N, wenn x ein größtes Element einer $\Theta^{\cup}$-Klasse ist.

Die teilweise Ordnung von M induziert eine teilweise Ordnung auf N. Wir zeigen, daß N-bezüglich dieser Ordnung einen Verband bildet, der die im Satz 6.1. gegebene Eigenschaft besitzt.

(1) Es seien (x, y, z), $(x', y', z') \in N$. Nach Hilfssatz 4.8. ist $x \cap x'$ ein größtes Element einer $\Theta^{\cup}$-Klasse, d. h. $(x \cap x', \ y \cap y', \ z \cap z') \in N$. N ist also ein $\cap$-Halbverband, und zwar ein $\cap$-Teilhalbverband von M.

(2) Es sei $(u, v, ,w) \in M$. Es soll $\hat{u}$ das größte Element der $\Theta^{\cup}$-Klasse, die u enthält, bezeichen. Ist $a = (\hat{u} \cap v) \cup (\hat{u} \cap w)$, so ist $(\hat{u}, v \cup a, \ w \cup a) \in N$. (Es gilt nämlich $\hat{u} \cap (v \cup a) = \hat{u} \cap (w \cup a) = (v \cup a) \cap (w \cup a))$. Dieses Element ist das kleinste Element $s \in N$ mit $s \geqslant (u, v, w)$. Wir bezeichen es mit $\widehat{(u, v, w)}$. Sind (x, y, z), $(x', y', z') \in N$, so ist die kleinste obere Schranke dieser Elemente:

$$\widehat{(x, y, z) \vee (x', y', z')}$$

N ist also ein Verband. Die Vereiningungsoperation bezeichnen wir mit $\sqcup$.

(3) Der Nachweis von (α). J_1 ist die Menge aller $(x, 0, 0) \in N$. Daher gilt $J_1 \cong B/\Theta^{\cup}$ (Hilfssatz 4.8). J_2 bzw. J_3 ist die Menge aller $\widehat{(0, x, 0)} = (\hat{0}, x \cap \cap \hat{0}, x)$ bzw. $\widehat{(0, 0, x)} = (\hat{0}, x, x \cap \hat{0})$. Dann ist $J_2 \cong J_3 \cong B$.

(4) Der Nachweis von (β). Es bezeichne I_1' ein Ideal von J_1. Nach Hilfssatz 4.6 entspricht I_1' ein abgeschlossenes Ideal I der Booleschen Algebra B.

Wir definieren nun die Relation $\overline{\Theta}$ des Verbandes M:

$(x, y, z) \equiv (x', y', z')$ $(\overline{\Theta})$ mit (x, y, z), $(x', y', z') \in M$ dann und nur dann. wenn $x \equiv x'(\Theta\,[I])$, $y \equiv y'(\Theta\,[I])$ und $z \equiv z'(\Theta\,[I])$.

Man muß feststellen, ob die Relation $\overline{\Theta}$ auf N eine Kongruenz ist. Sie ist offenbar eine Äquivalenzrelation, und so bleibt nur zu zeigen, daß $\overline{\Theta}$ den Kompatibilitätsbedingungen genügt. Da aber N ein $\cap$-Teilhalbverband von M ist, ist $\overline{\Theta}$ bezüglich des Durchschnittes kompatibel.

Nunmehr sei $u \equiv v(\overline{\Theta})$, $u, v, w \in N$. Man muß zeigen, daß $u \sqcup w \equiv v \sqcup w$ $(\overline{\Theta})$ ist. Es sei $x \equiv x'$ $(\Theta\,[I])$, $x, x' \in B$. Nach Hilfssatz 2.5. exisstiert ein $v \in I$ mit $x \cup v = x' \cup v$. Dann gilt aber $\hat{x} \cup \hat{v} = \widehat{x \cup v} = \widehat{x' \cup v} = \hat{x}' \cup \hat{v}$. Ist I ein abgeschlossenes Ideal, so ist $\hat{v} \in I$ und so $\hat{x} \equiv \hat{x}'$ $(\Theta\,[I])$. Es sei $(x, y, z) \equiv \equiv (x', y', z')$ $(\overline{\Theta})$. Nach der Definition von $\widehat{(x, y, z)}$ können wir schließen, daß $\widehat{(x, y, z)} \equiv \widehat{(x', y', z')}$ $(\overline{\Theta})$. $\overline{\Theta}$ ist eine Kongruenz des Verbandes M und so besteht $u \vee w \equiv v \vee w$ $(\overline{\Theta})$, d. h. $u \sqcup w = \widehat{u \vee w} \equiv \widehat{v \vee w} = v \sqcup w$ $(\overline{\Theta})$. $\overline{\Theta}$ ist also eine Kongruenz des Verbandes N, und zwar die Erweiterung von $\Theta\,[I_1]$.

Um die zweite Behauptung aus (β) zu beweisen, sei Φ eine beliebige Kongruenz des Verbandes N. Ist $\Theta^{\cup}$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz von B, können wir eine durch das Ideal $(\hat{0}]$ definierte Kongruenz $\Theta_1 = \Theta\,[(\hat{0}]]$ betrachten. B/Θ_1 ist wieder eine verallgemeinerten Boolesche Algebra und $\Theta^{\cup}$ induziert auf B/Θ_1 eine $\cup$-Kongruenz die ebenfalls distributiv und monomial ist. Wenn o das Nullelement von B/Θ_1 bezeichnet, so gilt bezüglich dieser Kongruenz, daß $\hat{o} = \dot{o}$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\hat{0} = 0$ gilt. In diesem Fall wird die nachstehende Rechnung etwas einfacher. Es sei $u = (x, y, z) \equiv (x', y', z') = v\ (\Theta)$, wo $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$, $z \geqslant z'$ ist. Nehmen wir den Durchschnitt beider Seiten mit $(x, 0, 0)$, so entsteht $(x, 0, 0) \equiv (x', 0, 0)\ (\Phi)$. Genauso erhält man, daß $(0, y, 0) \equiv (0, y', 0)\ (\Phi)$ und $(0, 0, z) \equiv (0, 0, z')\ (\Phi)$. Aus $(x, 0, 0) \equiv (x', 0, 0)\ (\Phi)$ folgt $(x, x, x) = (0, 0, x) \sqcup (x, 0, 0) \equiv (0, 0, x) \sqcup (x', 0, 0) = (x', x', x)\ (\Phi)$. So gilt auch $(0, x, 0) \equiv (0, x', 0)\ (\Phi)$. Analog ergibt sich $(0, z, 0) \equiv (0, z', 0)\ (\Phi)$. J_2 ist eine verallgemeinerte Boolesche Algebra, und so existiert ein $(0, t, 0) \in \in J_2$ mit $\Theta_{t,0} = \Theta_{x,x'} \cup \Theta_{y,y'} \cup \Theta_{z,z'}$. Wenn $(0, t, 0) \equiv (0, 0, 0)\ (\Phi)$ ist, so gilt $(\hat{t}, 0, 0) \equiv (0, 0, 0)\ (\Phi)$, d. h. $\Theta_{u,v}$ ist die Erweiterung von $\Theta_{\hat{t}_1,0} = \Theta\,[(\hat{t}]]$. Daraus folgt, daß Φ die Erweiterung einer Kongruenz $\Theta\,[I_1]$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Aus Hilfssatz 4.9 folgt die

Folgerung 6.2. *Es sei H ein relativ-pseudokomplementärer Verband. Es gibt einen Verband L, so daß $H \cong \mathscr{K}(\Theta(L))$ ist.*

Folgerung 6.3. (Dilworth) *Jeder endliche distributive Verband ist einem Kongruenzverband eines Verbandes isomorph.*

§ 7. $\cup$-partielle Verbände

Wir wollen den Satz 6.1. verallgemeinern. Wir werden zuerst einige Begriffe einführen.

Definition 7.1. *Die teilweise geordnete Menge H wird ein $\cup$-partieller Verband genannt, wenn H den folgenden zwei Eigenschaften genügt:*

(a) *H ist ein $\cap$-Halbverband ($a \cap b$ bedeutet also die größte untere Schranke von a und b);*

(b) *für gewisse Paare a, b ist $a \cup b$ erklärt und zwar so, daß $a \cup b$ die kleinste obere Schranke von a und b sei.*

Definition 7.2. *Eine nichtleere Teilmenge I des $\cup$-partiellen Verbandes H heißt ein Ideal, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *wenn $a, b \in I$ ist und $a \cup b$ existiert, so ist $a \cup b \in I$;*

(ii) *mit $a \in I$, $b \leqslant a$ gilt auch $b \in I$.*

Alle Ideale der $\cup$-partiellen Verbandes H bilden einen Verband $I(H)$, den Idealverband von H. I heißt endlich erzeugt, wenn endlich viele Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ derart existieren, daß kein Ideal $J \sqsubset I$ sie enthält.

Wenn I durch $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird, so schreiben wir $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$, und $x_1, \ldots, x_n$ heißt ein System von Erzeugenden.

Definition 7.3. *Ein System von Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ des Ideales I heißt eine Basis, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *n ist Minimalzahl der erzeugenden Elemente;*

(2) *es gilt $t \in I$ genau dann, wenn ein erzeugendes Element x_i derart existiert, daß $t \leqslant x_i$ ist.*

Schließlich werden wir noch eine Definition angeben.

Definition 7.4. *Es sei der $\cup$-partielle Verband H ein $\cap$-Teilhalbverband des Verbandes L, und wenn $a \cup b$ in H existiert, so soll $a \cup b$ mit der Vereinigung von a und b in L übereinstimmen. Wenn kein echter Teilverband in L existiert, der H enthält, so sagen wir, daß L durch H erzeugt wird.*

Der Verband L ist im allgemeinen durch H nicht eindeutig bestimmt.

Hilfssatz 7.5. *Es bezeichne H einen $\cup$-partiellen Verband. Wenn jedes endlich erzeugbare Ideal durch eine Basis erzeugbar ist, so existiert ein durch H erzeugter Verband L.*

Beweis. Es seien I und J zwei endlich erzeugbare Ideale. Sind $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $J = \{y_1, \ldots, y_k\}$ Basisdarstellungen von I und J, so bilden wir das Ideal K, erzeugt durch die Elemente $x_1 \cap y_1, x_1 \cap y_2, \ldots, x_n \cap y_k$. Dann gilt $K \subseteq I \wedge J$ (mengentheoretischer Durchschnitt). Umgekehrt, wenn $t \in I \wedge J$ ist, so gilt $t \in I$ und $t \in J$, d. h. es existieren Basiselemente x_i, y_j mit $x_i \geqslant t$, $y_j \geqslant t$. Das bedeutet aber gerade, daß $t \leqslant x_i \cap y_j$, d. h. $t \in K$ ist. Damit ist bewiesen, daß $K = I \wedge J$ ist, folglich ist $I \wedge J$ endlich erzeugbar. Die Vereinigung von I und J ist ebenfalls endlich erzeugbar, d. h., die Menge aller endlich erzeugbaren Ideale bildet einen Verband L. Es bezeichne $(x]$ das durch $x \in H$ erzeugte Ideal. Die Abbildung $x \to (x]$ definiert eine Einbettung von H in L. Jedes Element von L ist dann die Vereinigung gewisser Elemente von H, denn wenn $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist, so können wir schreiben $I = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i] = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$. L ist also ein durch H erzeugter Verband.

Mit Basiselementen können wir ebenso rechnen, wie mit distributiven Elementen. Ist nämlich $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $J = \{y_1, \ldots, y_k\}$, so gilt $I \wedge J = \bigvee x_i \cap \bigvee y_j = \bigvee (x_i \cap y_j)$. (Die Elemente $x_i \cap y_j$ bilden im allgemeinen keine Basis von $I \wedge J$.)

Hilfssatz 7.6. *Es sei H ein $\cup$-partieller Verband mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *H ist die mengentheoretische Vereinigung der konvexen Teilmengen $P_\alpha (\alpha \in \Lambda) : H = \bigvee_\alpha P_\alpha$;*

(b) *Es gibt eine Teilmenge $P \subseteq H$, so daß für $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta$, $P_\alpha \wedge P_\beta = P$ gilt;*

(c) *P besitzt ein größtes Element ε;*

(d) *$x \cup y$ $(x, y \in H)$ ist dann und nur dann definiert, wenn $x, y \in P_\alpha$ für ein passendes $\alpha \in \Lambda$;*

(e) *Es sein $x \in P_\alpha$, $y \in P_\beta$, $\alpha \neq \beta$, $x, y \notin P$ so gilt $\varepsilon = (x \cap \varepsilon) \cup (y \cap \varepsilon)$.*

Es existiert ein durch H erzeugter Verband L, der eine kongruenz-isomorphe Erweiterung von H ist.

Beweis. Es sei das Ideal I erzeugt durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wir nehmen an, daß n die Minimalzahl der Erzeugenden ist. So ist $x_i \cup x_j$ $(i \neq j)$ in H nicht definiert, d. h. $x_i \in P_{\alpha_i}$, $x_j \in P_{\alpha_j}$, $x_i, x_j \notin P$ $(\alpha_i \neq a_j)$. Wir konstruieren eine Basis für I. Ist $n = 1$, so ist x_1 eine Basis. Es sei nun $n \geqslant 2$ vorausgesetzt. Dann ist $\varepsilon = (x_1 \cap \varepsilon) \cup (x_2 \cap \varepsilon) \in I$, d. h. $x_i \cup \varepsilon \in I$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Die Elemente $x_1 \cup \varepsilon, \ldots, x_n \cup \varepsilon$ bilden offenbar ein erzeugendes System für I. Wir zeigen, daß es auch eine Basis bildet. Aber die Menge aller $t \in H$ mit $t \leqslant x_i \cup \varepsilon$ für alle i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ stellt ein Ideal dar, welches mit I übereinstimmt, d. h. $x_i \cup \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist eine Basis von I. Nach Hilfssatz 7.5. existiert ein durch H erzeugter Verband L.

Um die zweite Behauptung des Hilfssatzes zu beweisen, betrachten wir die Ideale $I = \bigvee_{i\,1}^{n} x_i > J = \bigvee_{j=1}^{k} y_j$, wo $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots y_k$ eine Basis für I und J bilden. Nehmen wir an, daß bei der Kongruenz $\Theta \in \Theta(L)$ $\bigvee x_i \equiv \bigvee y_j (\Theta)$ gilt. Bilden wir den Durchschnitt beider Seiten mit x_l $(1 \leqslant l \leqslant n)$, so erhalten wir die Kongruenz:

$$x_l = x_l \cap \bigvee_{i-1}^{n} x_i \equiv x_l \cap \bigvee_{j\,1}^{k} y_j = \bigvee_{j\,1}^{k} (x_l \cap y_j)\ (\Theta).$$

Vereinigen wir diese n Kongruenzen, so folgt:

$$I = \bigvee_{l-1}^{n} x_l \equiv \bigvee_{l,j} (x_l \cap y_j) = \bigvee_{l-1}^{n} x_l \cap \bigvee_{j\,1}^{k} y_j = \bigvee_{j\,1}^{k} y_j = J(\Theta).$$

Es gilt $\bigvee_j (x_l \cap y_j) \in H$ d. h. jede Kongruenz von L ist die Erweiterung einer Kongruenz von H.

Wir müßen noch zeigen, daß jede Kongruenz von H auf L erweitbar ist. Es sei Θ eine beliebige Kongruenz von H. Wir sagen, daß die Elemente $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n \in H$ der Eigenschaft (P) genügen, wenn:

$$x_i, y_i \in P_{\alpha_i}, \quad x_i \geqslant y_i, \quad x_i \equiv y_i(\Theta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ ist.}$$

Es seien I, J zwei endlich erzeugbare Ideale von H. Wir definieren eine Relation $\bar{\Theta}$ auf L:

$I \equiv J(\bar{\Theta})$ dann und nur dann, wenn $I \cup J$ und $I \cap J$ für ein passendes n solche erzeugende Systeme $I \cup J = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $I \cap J = \{y_1, \ldots, y_n\}$ besitzen, daß die Elemente $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ der Eigenschaft (P) genügen.

$\bar{\Theta}$ ist offenbar ein Äquivalenzrelation. Sie ist bezüglich der Vereinigung kompatibel. Wir zeigen die Kompatibilitätsbedingu ıg bezüglich des Durchschnittes. Wir können annehmen, daß $x_i \notin P$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $y_1, \ldots, y_k \notin$ $\notin P$, $y_i \notin P$ $(i = k + 1, \ldots, n)$, und $n \geqslant 2$ ist. Es sei $y = y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_k$ und $K = \{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$ ein beliebiges Ideal mit einer Basis angegeben. Wir werden drei Fälle diskutieren:

1) $k \geqslant 2$. Aus $x_i \equiv y_i(\Theta)$ $(i \leqslant k)$ folgt $x_i \cap \varepsilon \equiv y_i \cap \varepsilon = y_i(\Theta)$. Dann gilt aber $\varepsilon = \bigvee\limits_{i-1}^{k} (x_i \cap \varepsilon) \equiv y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_k = y(\Theta)$. Es gilt auch $x_j \cup \varepsilon \equiv$ $\equiv y_j \cup \varepsilon(\Theta)$ und so:

$x_1 \cup \varepsilon \equiv y(\Theta), \quad \ldots, \quad x_k \cup \varepsilon \equiv y(\Theta), \quad x_{k+1} \cup \varepsilon \equiv y_{k+1} \cup \varepsilon(\Theta), \quad \ldots, \quad x_n \cup \varepsilon \equiv$ $\equiv y_n \cup \varepsilon(\Theta)$.

$x_1 \cup \varepsilon, \ldots, x_n \cup \varepsilon$ ist eine Basis von $I \cup J$, folglich $(I \cup J) \cap K = \{(x_i \cup$ $\cup\, \varepsilon) \cap z_j\}$.

$(x_i \cup \varepsilon) \cap z_j$, $y \cap z_j$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s)$, $(x_r \cup \varepsilon) \cap z_j$, $(y_r \cup \varepsilon) \cap$ $\cap\, z_j$ $(r = k + 1, \ldots, n)$ besitzt die Eigenschaft (P), d. h.:

$$(I \cup J) \cap K \equiv Y = \{y \cap z_j, (y_r \cup \varepsilon) \cap z_j, r = k + 1, \ldots, n\}\ (\bar{\Theta}).$$

Es gilt aber $(I \cap J) \cap K \supseteq Y$ und so $(I \cup J) \cap K \equiv (I \cap J) \cap K$ $(\bar{\Theta})$.

2) $n - k \geqslant 2$. Es ist $x_i \cup \varepsilon \equiv y_i \cup \varepsilon(\Theta), i > k$, $\varepsilon = (y_{k+1} \cap \varepsilon) \cup (y_{k+2} \cap \varepsilon) \in$ $\in I \cap J$. Daraus ergibt sich, daß $x_1 \cup \varepsilon \equiv \varepsilon(\Phi), \ldots, x_k \cup \varepsilon - \varepsilon(\Theta), \ldots, x_{k+1} \cup$ $\cup\, \varepsilon \equiv y_{k+1} \cup \varepsilon(\Theta), \ldots, x_n \cup \varepsilon \equiv y_n \cup \varepsilon(\Theta)$.

Die Elemente $x_i \cup \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bilden eine Basis für $I \cup J$. Von hier geht der Beweis genau so wie unter (1) weiter.

3) $k = n - k = 1$. Da $(x_1 \cap \varepsilon) \cup (y_2 \cap \varepsilon) = \varepsilon$ ist gilt $x_1 \cup (y_2 \cap \varepsilon) = x_1 \cup$ $[(x_1 \cap \varepsilon) \cup (y_2 \cap \varepsilon)] = x_1 \cup \varepsilon$ und so aus $x_1 \equiv y_1(\Theta)$ folgt: $x_1 \cup \varepsilon = x_1 \cup$ $\cup\, (y_2 \cap \varepsilon) \equiv y_1 \cup (y_2 \cap \varepsilon)$ (Θ). Vereinigen wir beide Seiten mit y_2, so gilt $y_2 \cup \varepsilon \equiv y_2(\Theta)$. Das ergibt mit $x_2 \cup \varepsilon \equiv y_2 \cup \varepsilon(\Theta)$ zusammen, daß $x_2 \cup \varepsilon \equiv$ $\equiv y_2(\Theta)$. Damit haben wir bewiesen, daß $x_1 \cup \varepsilon \equiv y_1 \cup (y_2 \cap \varepsilon)$ (Θ), $x_2 \cup$ $\cup\, \varepsilon \equiv y_2(\Theta)$. Die Elemente $x_1 \cup \varepsilon$, $x_2 \cup \varepsilon$ bilden eine Basis für $I \cap J$. Die Fortsetzung des Beweises geht wie unter (1). Damit ist der Beweis des Hilfssatz 7.6 beendet.

§ 8. Der Hauptsatz

Wir können nunmehr unser Hauptergebnis formulieren:

Satz 8.1. *Es sei $\Theta^{\cup}$ eine $\cup$-Kongruenz einer verallgemeinerten Booleschen Algebra B mit dem Kern Null, die als die Vereinigung monomialer, distributiver $\cup$-Kongruenzen darstellbar ist. Dann existiert ein Verband Q, der Eigenschaft $B/\Theta^{\cup} \cong \mathscr{K}(\Theta(Q))$ genügt.*

Beweis. $\Theta^{\cup}$ ist die Vereinigung monomialer, distributiver Kongruenzen, d. h. $\Theta^{\cup} = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} \Theta^{\cup}_{\alpha}$. Es bezeichne a ein belibieges Element der verallgemeinerten Booleschen Algebra B. Das Hauptideal $(a]$ ist eine Boolesche Algebra und die $\cup$-Kongruenz $\Theta^{\cup}_{\alpha}$ von B induziert auf $(a]$ eine $\cup$-Kongruenz, die mit $\Theta^{\cup}_{\alpha}(a)$ bezeichnet werde. Nach Hilfssatz 4.10 ist $\Theta^{\cup}_{\alpha}(a)$ eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz. Wir können also auf $(a]$ und $\Theta^{\cup}_{\alpha}(a)$ den Satz 6.1 anwenden. So erhalten wir einen Verband N^{a}_{α}, für den

$$(a]/\Theta^{\cup}_{\alpha}(a) \cong \mathscr{K}(\Theta(N^{a}_{\alpha})) \text{ gilt.}$$

Nach Satz 6.1. enthält N^{a}_{α} ein zu $(a]$ isomorphes Ideal $(a]_{\alpha}$ (das ist nämlich J_2).

Wenden wir den Hilfssatz 5.3 auf die verallg. Boolesche Algebra B an, so erhalten wir den Verband M. Im Paragraphen 5 haben wir erwähnt, daß der Hilfssatz 5.3 auch für eine beliebige Mächtigkeit gültig ist. Es sei die gewählte Mächtigkeit $\mathfrak{m} = |B \times \Lambda|$. Der Verband M hat aber zu jedem $a \in B$, $\alpha \in \Lambda$ ein Ideal

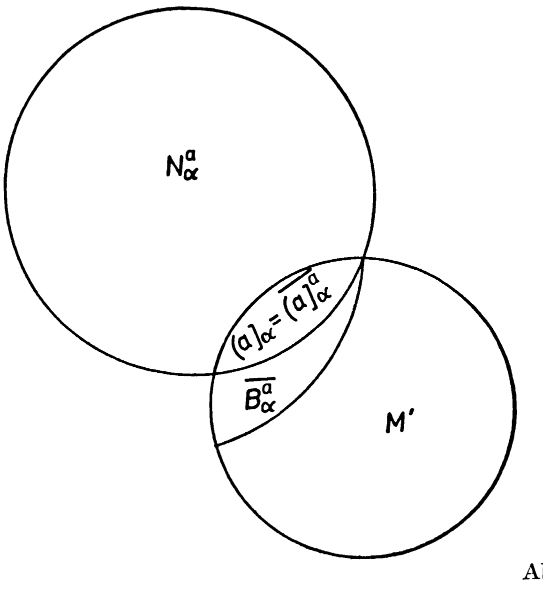

Abb. 1.

B_α^a mit den Eigenschaften $B_\alpha^a \cong B$; $B_\alpha^a \wedge B_\beta^b = 0$ (wenn $(a, \alpha) \neq (b, \beta)$ ist). Ist $a \in B$, so entspricht dem Hauptideal $(a]$ bei dem Isormorphismus $B \cong B_\alpha^a$ das Ideal $(a]_\alpha^a$. Es bezeichne schließlich M' den zu M dualen Verband. Das Ideal B_α^a entspricht dan einem dualen Ideal $\overline{B_\alpha^a}$ des Verbandes M'. Mit Hilfe der Verbände N_α^a und M' werden wir zunächst eine $\cup$-partiellen Verband H konstruieren. Es bezeichne H die mengentheoretische Vereinigung der Mengen N_α^a und M'. Wir identifizieren für jedes $a \in B$ und $\alpha \in A$ die Elemente $(a]_\alpha^a$ mit dem elementen $(a]_\alpha$ (Genauer: $\overline{(a]_\alpha^a}$ ist dualisomorph mit $(a]_\alpha$, bei diesem natürlichen dual Isomorphismus werden einander entsprechende Elemente identifiziert). (Abb. 1.)

In H erklären wir erst eine Ordnungsrelation $\sqsubseteq$:

(1) wenn $x, y \in N_{\alpha-}^a \subseteq H$ ist, so soll $x \sqsubseteq y$ die in N_α^a ursprünglich definierte Ordnungsrelation bedeuten;

(2) wenn $x, y \in M' \subseteq H$ ist, bedeute $x \sqsubseteq y$ die in M' gegebene Ordnungsrelation;

(3) ist $x \in N_\alpha^a$, $x \notin M'$, $y \in M'$, $y \notin N_\alpha^a$ so gilt $x \sqsubseteq y$ nicht, und $x \sqsupset y$ genau dann, wenn sich ein $z \in (a]_\alpha$, finden läßt, so daß $x \sqsupset z$ nach (1) und $z \sqsupset y$ nach (2) gilt;

(4) die Elemente $x \in N_\alpha^a$, $y \in N_\beta^b$, $(a, \alpha) \neq (b, \beta)$, $x, y \notin M'$ sind unvergleichbar.

H ist bezüglich der so definierten Relation eine teilweise geordnete Menge. Wir werden weiter zeigen, daß H ein $\cup$-partieller Verband ist. Es bezeichne ε das größte Element des Verbandes M'. (M besitzt die 0, infolgedessen hat M' ein Einselement).

Den Beweis dafür, daß H ein $\cap$-Halbverband ist, liefert eine triviale Rechnung, so daß wir ihn hier fortlassen können.

Wir definieren eine partielle Operation $\cup$ wie folgt:

(i') Wenn $x, y \in N_\alpha^a$ für ein gewisse α, a, oder $x, y \in M'$ ist, so sei $x \cup y$ definiert und bedeute die kleinste obere Schranke von x und y in N_α^a, bzw. in M';

(ii') ist $x \in M'$, $y \in N_\alpha^a$, so seien $x \cup y$ und $y \cup x$ so definiert, daß $x \cup y = y \cup x$ ist und $x \cup y$ die kleinste obere Schranke von x, y bedeutet.

(iii') für andere Elementepaare sei die Vereinigung nicht erklärt.

H ist ein $\cup$-partieller Verband. H besitzt die in Hilfssatz 7.6 gegebene Eigenschaften (mit $P = M'$). Es bezeichne Q den durch H erzeugten Verband, wie das in Hilfssatz 7.2 geben wurde. So können wir aus Hilfssatz 7.6 schließen, daß $\Theta(H) \cong \Theta(Q)$ gilt. Die Kongruenzen des Verbandes N_α^a entsprechen eindeutig den $\Theta_\alpha^\cup(a)$ abgeschlossenen Idealen von $(a]$. So entsprechen aber den Kongruenzen von H die $\Theta^\cup = \bigvee \Theta_\alpha^\cup = \bigvee_\alpha \bigvee_a \overline{\Theta}_\alpha^\cup(a)$ abgeschlossenen Ideale, wo $\overline{\Theta}_\alpha^\cup(a)$ die durch $\Theta_\alpha^\cup(a)$ induzierte $\cup$-Kongruenz von B bezeichnet, d. h., nach Hilfssatz 4.6 es gilt $\mathscr{K}(\Theta(H)) \cong B/\Theta^{\cup}$, und so gilt auch $\mathscr{K}(\Theta(Q)) \cong B/\Theta^{\cup}$ was zu beweisen war.

Wir können den Satz 8.1 verallgemeinern:

Satz 8.2. *Es sei F ein relativ-pseudokomplementärer Halbverband und Θ eine Kongruenz von F, mit dem Kern Null, die als Vereinigung monomialer, distributiver Kongruenzen darstellbar ist. Dann existiert ein Verband S mit der Eigenschaft $F/\Theta \cong \mathscr{K}(\Theta(S))$.*

Beweis. Betrachten wir für jedes $a \in F$ die Boolesche Algebra $B(a)$. (Siehe Hilfssatz 3.4.). Es soll wieder B das diskrete direkte Produkt der Booleschen Algebra $B(a)$ bezeichnen. B ist eine verallgemeinerte Boolesche Algebra. Wir werden zuerst zeigen, daß eine distributive $\cup$-Kongruenz $\Psi^{\cup}$ von B mit der Eigenschaft $F \cong B/\psi^{\cup}$ existiert.

Es sei $a, b \in F$. Betrachten wir das direkte Produkt $B(a, b) = B(a) \times B(b)$. Die Elemente von $B(a, b)$ sind Paare (x_1, x_2) wo $x_1 \in B(a)$ und $x_2 \in B(b)$ gilt. Auf $B(a, b)$ können wir eine $\cup$-Kongruenz erklären: es gilt $(x_1, x_2) \equiv$ $\equiv (x_1', x_2') (\Phi^{\cup})$ dann und nur dann, wenn $x_1 \cup x_2 = x_1' \cup x_2'$ ist. Wir zeigen erst die Distributivität von $\Phi^{\cup}$. Es seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ und $z = (z_1, z_2)$ Elemente von $B(a, b)$, und es gelte $x \cup y \equiv z(\Phi^{\cup})$, $x \cup y \leqslant z$. Dann ist aber $x_1 \cup x_2 \cup y_1 \cup y_2 = z_1 \cup z_2$, $x_1 \cup y_1 \leqslant z_1$ und $x_2 \cup y_2 \leqslant z_2$.

Es sei $\bar{x} = (x_1 \cup x_2(z_1), x_2 \cup x_1(z_2))$,

$\bar{y} = (y_1 \cup y_2(z_1), y_2 \cup y_1(z_2))$.

Wegen $x_2 \geqslant x_2(z_1)$ und $x_1 \geqslant x_1(z_2)$, gilt auch $x_1 \cup x_2 = (x_1 \cup x_2(z_1)) \cup (x_2 \cup$ $\cup x_1(z_2))$, d. h. $x \equiv x(\Phi^{\cup})$. Genauso ergibt sich auch $y \equiv \bar{y}(\Phi)$. Schließlich nach Hilfssatz 3.4 gilt

$$\begin{aligned}\bar{x} \cup \bar{y} &= ((x_1 \cup y_1) \cup (x_2(z_1) \cup y_2(z_1)), (x_2 \cup y_2) \cup (x_1(z_2) \cup y_1(z_2))) = \\ &= ((x_1 \cup y_1 \cup x_2 \cup y_2)(z_1), (x_1 \cup y_2 \cup x_2 \cup y_2)(z_2)) = \\ &= ((z_1 \cup z_2)(z_1), (z_1 \cup z_2)(z_2)) = (z_1, z_2) = z.\end{aligned}$$

$\Phi^{\cup}$ ist eine monomiale $\cup$-Kongruenz: es sei $(x_1, x_2) \in B(a, b)$. Nach Hilfssatz 3.4 ist $((x_1 \cup x_2)(a), (x_1 \cup x_2)(b))$ das größte Element der $\Phi^{\cup}$-Klasse die (x_1, x_2) enthält.

$B(a, b)$ ist eine direkte Komponente von B, und so ist $\Phi^{\cup}$ zu einer $\cup$-Kongruenz $\Phi_{ab}^{\cup}$ auf B erweitbar. $\Phi_{ab}^{\cup}$ ist wieder eine monomiale, distributive $\cup$-Kongruenz. Es sei $\Psi^{\cup} = \bigvee\limits_{a,b \in F} \Phi_{ab}^{\cup}$. Dann ist $\Psi^{\cup}$ offenbar die Vereinigung monomialer, distributiver $\cup$-Kongruenzen. Es gilt auch $F \cong B/\Psi^{\cup}$.

Betrachten wir nun die Kongruenz $\Theta = \bigvee\limits_{\alpha} \Theta_{\alpha}$. Wir können auf $B(a, b)$ eine $\cup$-Kongruenz $\Phi_{\alpha}^{\cup}$ definieren: $(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)$ $(\Phi_{\alpha}^{\cup})$ dann und nur dann, wenn $x_1 \cup x_2 \equiv y_1 \cup y_2(\Theta_{\alpha})$. Mann kann leicht zeigen, daß $\Phi_{\alpha}^{\cup}$ eine monomiale distributive $\cup$-Kongruenz ist. $\Phi_{\alpha}^{\cup}$ ist auf B zu einer $\cup$-Kongruenz $\Phi_{\alpha}^{\cup}$ erweitbar. Es sei $\bar{\Theta} = \bigvee \Phi_{\alpha}^{\cup}$, so gilt $B/\bar{\Theta} \cong F/\Theta$.

§ 9. Bemerkungen

Bezeichnen wir mit D_1 die Klasse der distributiven Halbverbände mit Nullelement. Wir definieren eine Teilklasse D_2 von D_1 wie folgt:

Ein Halbverband $F \in D_1$ gehört dann und nur dann zu D_2, wenn eine verallg. Boolesche Algebra B und eine $\cup$-Kongruenz $\Theta^{\cup}$ von B derart existieren, daß $\Theta^{\cup}$ die Vereinigung monomialer distributiver $\cup$-Kongruenzen ist, und $F \cong B/\Theta^{\cup}$ gilt.

Unsere Vermutung ist, daß D_2 mit der Klasse D_1 übereinstimmt. Es sind einige Konstruktionen solcher Booleschen Algebren B für spezielle Halbverbände bekannt. So z. B. gelten die folgenden Behauptungen:

Ist $F \in D_2$ und F' ein beliebiger endlicher distributiver Verband, so gehört jedes subdirekte Produkt von F und F' in D_2. Jeder abzählbare Halbverband aus D_1 ist in D_2.

LITERATUR

[1] Funayama N., Nakayama T., *On the distributivity of lattice-congruences*, Proc. Imp. Acad. Tokyo *18* (1942), 553–554.

[2] Grätzer G., Schmidt E. T., *Characterizations of congruence lattices of abstract algebras*, Acta scient. math. *24* (1963), 34–59.

[3] Grätzer G., Schmidt E. T., *On congruence lattice of lattices*, Acta math. Acad. scient. hung. *13* (1962), 179–185.

[4] Grätzer G., Schmidt E. T., *Ideals and congruence relations in lattices*, Acta math. Acad. scient. hung. *9* (1958), 137–175.

[5] Schmidt E. T., *Über die Kongruenzverbände der Verbände*, Publs. math. *9* (1962), 243–256.

Eingegangen am 16. 11. 1966.

Mathematisches Institut
Martin Luther — Universität
Halle — Wittenberg,
Halle/Saale, DDR