

Matematicko-fyzikálny časopis

Július Krempaský

Nerovnovážne koncentrácie elektrónov a dier nehomogénnych polovodičoch so zmiešanou vodivosťou

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 9 (1959), No. 2, 109--(127)

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126727>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

NEROVNOVÁŽNE KONCENTRÁCIE ELEKTRÓNOV A DIER NEHOMOGÉNNYCH POLOVODIČOCH SO ZMIEŠANOU VODIVOSŤOU

JÚLIUS KREMPASKÝ, Bratislava

Úvod

V práci [1] sa rieši problém rozloženia stacionárnej koncentrácie elektrónov, resp. dier v nehomogénnom polovodiči s jedným typom vodivosti v bezprúdovom stave i za prítomnosti vonkajšieho elektrického poľa. Ukázalo sa, že v týchto prípadoch sú i pri pomerne veľkej nehomogenite a silných elektrických poliach odchýlky od rovnovážnych koncentrácií nepatrné.

V tejto práci budeme riešiť problém stacionárneho rozloženia koncentrácií nosičov náboja v polovodičoch so zmiešanou vodivosťou. Pretože problém rovnovážneho rozloženia v bezprúdovom stave sa rieši v prácach [2], [3], zameriame sa len na prípad nehomogénneho polovodiča vo vonkajšom elektrickom poli¹⁾.

Problém, ktorý sa v tejto práci rieši, je jednak omnoho reálnejší jednak omnoho zaujímavejší než problém polovodiča s jedným typom vodivosti, pretože v polovodiči so zmiešanou vodivosťou vzniká celý rad efektov podmienených práve existenciou nosičov náboja obidvoch znamienok, napr. rekombinácia, vzájomné kompenzovanie nábojov atď. Avšak práve pre tieto efekty je tento problém matematicky omnoho zložitejší a vo všeobecnom prípade sa bežnými funkciami vôbec nedá riešiť. Nevyhnutne budeme preto musieť zaviesť niektoré zjednodušujúce predpoklady, ktoré zapríčinia, že kvantitatívne zhodnotenie efektov bude spoľahlivé len v špeciálnych prípadoch, avšak nebudú mať vplyv na správnosť odvodených kvalitatívnych záverov.

Podobne ako v práci [1] budeme aj tu nazývať základnými koncentraciami tie koncentrácie elektrónov a dier, ktoré by zodpovedali tepelnej rovnováhe, keby nebolo difúzie a nerovnovážnymi tie, ktoré charakterizujú stacionárny stav vo vzorke polovodiča umiestneného v elektrickom poli. Ťažiskom práce

¹⁾ V uvedených prácach sa čiastočne rieši aj tento problém, avšak len so zameraním na polovodiče s lokalizovanou bariérou (p—n prechodom). Jej výsledky nemožno prakticky na polovodiče s pozvoľnou nehomogenitou aplikovať, pretože niektoré predpoklady, ktoré uvedení autori používajú, nie sú pre mierne nehomogenity splnené (pozri napr. [4]).

má byť riešenie problému, do akej miery môže nehomogenita vzorky, nadobudnutá pri jej výrobe, ovplyvniť najdôležitejšie jej charakteristiky napr. vodivosť, odpor atď.

1. Základné predpoklady a rovnice

Z prác [5], [6], [7] vyplýva, že gradient atómov nečistoty, resp. prímеси vo vzorkách polovodičov, pripravených ťahaním z taveniny alebo zónovou tavbou, má exponenciálny charakter. V najjednoduchšom prípade môžeme koncentráciu prímесných atómov vyjadriť vzťahom

$$N(x) = N_0 e^{ax}, \quad (1,1)$$

kde x je súradnica v ose vzorky. V reze (y, z) budeme vzorku považovať za homogénnu. Ak je vzorka pripravovaná zónovou tavbou tak, že sa atómy prímеси dajú iba do prvej roztavenej zóny (alebo aj v prípade, že pred zónovou tavbou má vzorka konštantnú priemernú koncentráciu atómov nečistoty), je exponent a rovný podielu segregáčnej konštanty k a dĺžky roztavenej zóny l . Podľa [8], [9], [10] majú napr. v germánii všetky prvky okrem bóru $k \ll 1$, takže pri $l \approx 1$ a $x < \frac{1}{k}$ môžeme písať približne

$$e^{\pm \frac{k}{l}x} = 1 \pm \frac{k}{l}x = 1 \pm ax$$

a pre koncentráciu prímесných atómov, resp. atómov nečistoty

$$N(x) = N_0(1 \pm ax). \quad (1,2)$$

Nevzdialime sa preto veľmi od skutočnosti, ak budeme predpokladať rozloženie koncentrácie atómov prímеси, resp. nečistoty podľa vzťahu (1,2). Aby sme sa vyhli neobyčajne zložitým zjavom na kontaktoch [11], budeme predpokladať, že nehomogenita je len v intervale $0 < x < l$, kým napravo aj naľavo od tejto oblasti budeme považovať vzorku za homogénnu. S ohľadom na jednoduché okrajové podmienky budeme preto od vzorky požadovať, aby jej koncentrácia prímесných atómov, resp. atómov nečistoty bola určená vzťahmi

pre

$$\begin{aligned} x \in \langle -\infty, 0 \rangle & N(x) = N_0, \\ x \in \langle 0, l \rangle & N(x) = N_0(1 + ax), \\ x \in \langle l, \infty \rangle & N(x) = N_0(1 + al) = N_l. \end{aligned} \quad (1,3)$$

Ďalšie úvahy budú platiť aj pre prípad, že N značí koncentráciu iných porúch (napr. Frenkelových, resp. Schottkyho porúch) podmieňujúcich donorové, resp. akceptorové hladiny. Keďže v polovodičoch nehomogénne znečiste-

ných prakticky nemožno realizovať vlastný polovodič, budeme sa v ďalšom zaoberať len vzorkami polovodičov s prevažujúcou elektrónovou vodivosťou. (Pre polovodič typu p boli by úvahy analogické.)

Pre nerovnovážne koncentrácie elektrónov a dier v polovodičoch s uvážením rekombinácií a generácií všetkých druhov platia rovnice (pozri napr. [12])

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon} \left(n_2 - n_1 - N_3 \frac{k_{23} + k_{13}n_1}{k_{31} + k_{23} + k_{13}n_1 + k_{32}n_2} + \right. \\ \left. + N_4 \frac{k_{41} + k_{42}n_2}{k_{41} + k_{24} + k_{14}n_1 + k_{42}n_2} \right), \quad (1,4a)$$

$$u_{1,2} \operatorname{div} (\mp en_{1,2} \mathbf{E} - kT \operatorname{grad} n_{1,2}) = e \partial n, \quad (1,4b)$$

$$\partial n = k_{21} - k_{12}n_1n_2 + N_3 \frac{k_{31}k_{23} - k_{13}k_{32}n_1n_2}{k_{31} + k_{23} + k_{13}n_1 + k_{32}n_2} + \\ + N_4 \frac{k_{14}k_{24} - k_{14}k_{42}n_1n_2}{k_{14} + k_{24} + k_{14}n_1 + k_{42}n_2}, \quad (1,4c)$$

kde n_1 — koncentrácia elektrónov vo vodivostnom pásme,

n_2 — koncentrácia dier vo valenčnom pásme,

N_3 — koncentrácia akceptorových hladín,

N_4 — koncentrácia donorových hladín,

\mathbf{E} — intenzita elektrického poľa (súčet intenzity vnútorného a vonkajšieho elektrického poľa),

$u_{1,2}$ — pohyblivosť elektrónu, resp. diery,

k_{ij} — kinetické koeficienty prechodov zo stavu i do stavu j ,

e — náboj elektrónu ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ AS),

k — Boltzmannova konštanta ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ joule grad^{-1}),

ε — dielektrická konštanta prostredia,

T — absolútna teplota.

V tepelnej rovnováhe musí sa počet prechodov zo stavu i do stavu j rovnať počtu prechodov zo stavu j do i . Z predpokladu, že prechody 2—3, 2—4, 3—1 a 4—1 majú charakter monomolekulárny a prechody 1—2, 1—3, 1—4, 3—2, 3—4, 4—2 a 4—3 charakter bimolekulárny, dostaneme pre kinetické koeficienty vzťahy:

$$\frac{k_{21}}{k_{12}} = n_1^0 n_2^0, \quad \frac{k_{31}}{k_{13}} = \frac{n_1^0 (N_3 - n_3^0)}{n_3^0}, \quad \frac{k_{41}}{k_{14}} = \frac{n_1^0 n_4^0}{N_4 - n_4^0}, \\ \frac{k_{23}}{k_{32}} = \frac{n_2^0 n_3^0}{N_3 - n_3^0}, \quad \frac{k_{24}}{k_{42}} = \frac{n_2^0 (N_4 - n_4^0)}{n_4^0}, \quad k_{34} = k_{43} = 0. \quad (1,5)$$

Kinetické koeficienty k_{34} a k_{43} kladieme ako rovné nule, pretože elektróny na donorových, resp. diery na akceptorových hladinách sú prakticky nepohyblivé. Symbolmi n_i^0 sme označili rovnovážne koncentrácie elektrónov a dier

vo vodivostnom, valenčnom pásme, resp. na donorových a akceptorových hladinách. Za nezávislé kinetické koeficienty volíme k_{12} , k_{13} , k_{14} , k_{32} a k_{42} , pretože ich možno vyjadriť vzťahmi

$$\begin{aligned} k_{12} &= \sigma_{12} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, & k_{13} &= \sigma_{13} v_1, \\ k_{14} &= \sigma_{14} v_1, & k_{32} &= \sigma_{32} v_2, & k_{42} &= \sigma_{42} v_2, \end{aligned} \quad (1,6)$$

kde v_1 a v_2 značia strednú tepelnú rýchlosť elektrónu, resp. diery a σ_{ik} príslušné účinné prierezy rekombinácie alebo záchytu. Pre jednoduchosť budeme ďalej uvažovať vo vzorke len donorové hladiny, t. j. položíme $N_3 = 0$ a $N_4 = N(x)$. O nich budeme predpokladať, že sú ionizované alebo úplne, alebo len čiastočne.

2. Polovodič s úplne ionizovanými donorovými hladinami

Fakt, že donorové hladiny sú úplne ionizované, môžeme matematicky vyjadriť tým, že položíme $k_{24} = k_{14} = 0$. Vyplýva to z podmienky, že počet dier prechádzajúcich z donorových hladín do valenčného pásma $v_{24} = k_{24} n_4$, (n_4 značí koncentráciu ionizovaných donorových hladín) a počet elektrónov prechádzajúcich z vodivostného pásma na donorové hladiny $v_{14} = k_{14} n_1 n_4$ má sa rovnať nule. Na základe toho z rovnice (1,4a) ihneď vyplýva

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon} (n_2 - n_1 + N). \quad (2,1)$$

Táto podmienka je v germánii a kremíku splnená prakticky už pri izbových teplotách.

Zo zákona o pôsobení hmôt pre rovnovážne koncentrácie elektrónov a dier vyplýva

$$n_1^0 n_2^0 = n_i^0 = f(T). \quad (2,2)$$

Okrem toho v tepelnej rovnováhe musí platiť²⁾

$$n_1^0 = n_2^0 + N, \quad (2,3)$$

z čoho na základe (2,2) dostaneme

$$n_1^0 = \frac{1}{2} [\sqrt{N^2 + 4n_i^2} + N], \quad (2,4a)$$

$$n_2^0 = \frac{1}{2} [\sqrt{N^2 + 4n_i^2} - N]. \quad (2,4b)$$

²⁾ Táto podmienka by v skutočnosti platila v nehomogénnom polovodiči len v prípade, že by nejstvovala difúzia. Difúzia spôsobí, že rovnovážne koncentrácie sa líšia od základných, avšak pokiaľ nehomogenity nie sú veľké, sú tieto odchýlky podľa [2], [3] nepatrné, takže základné a rovnovážne koncentrácie môžeme považovať za zhodné. Tým fakticky zanedbávame aj priestorový náboj, ktorý sa difúziou v polovodiči vytvorí.

Pri izbovej teplote je pre germánium $n_i = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Keby bolo $N \ll 2n_i$, vplyv nehomogenity by sa vôbec neprejavil. Pre nás dôležitý prípad je teda, ak

$$N \gg 2n_i. \quad (2,5)$$

V tom prípade môžeme funkciu $\sqrt{N^2 + 4n_i^2} = N \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N}\right)^2}$ rozvinúť do Taylorovho radu a zanedbať členy úmerné $\left(\frac{2n_i}{N}\right)^4$. Tak dostaneme

$$n_1^0 = N + \frac{n_i^2}{N}, \quad (2,6a)$$

$$n_2^0 = \frac{n_i^2}{N}. \quad (2,6b)$$

Riešenie rovníc (1,4) ďalej zjednodušíme predpokladom, že intenzita elektrického poľa vo vnútri polovodiča je konštantná. t. j. $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Ak je intenzita vonkajšieho elektrického poľa konštantná, čo ako samozrejmé predpokladáme, žiada táto podmienka, aby aj intenzita elektrického poľa vo vzorke pred vložením do elektrického vonkajšieho poľa bola konštantná. Táto požiadavka predpokladá, že vo vnútri polovodiča pred pripojením vonkajšieho napätia je priestorový náboj spôsobený difúziou voľných nosičov náboja z miest o väčšej ich koncentrácii do miest s nižšou koncentraciou kompenzovaný nábojmi opačného znamienka. S touto podmienkou, charakteristickou pre malé nehomogenity, sa stretávame v celom rade prác s príbuznou problematikou (pozri napr. [13–17]). Mott v práci [18] používa túto podmienku s úspechom pri riešení usmerňovacieho efektu na styku polovodiča a kovu, kde ide o pomerne veľké gradienty koncentrácií. Je však isté, že čím viac prevažuje koncentrácia nosičov jedného typu nad druhým, tým je ten predpoklad ťažšie splniteľný (nakoniec by totiž ani všetky minoritné nosiče náboja nestačili kompenzovať priestorový náboj spôsobený difúziou majoritných³ nosičov náboja). Preto výsledky tejto práce budú na rozdiel od [1] aplikovateľné na polovodiče, v ktorých koncentrácia nábojov jedného znamienka neprevyšuje príliš koncentráciu nábojov opačného znamienka. Bližšie o tomto predpoklade pojednáme v pripravovanej práci.

Po týchto zjednodušeníach dostávame pre n_1 , n_2 a \mathbf{E} na základe (1,4) tieto rovnice: (podľa úvodného predpokladu ide o jednorozmerný prípad $E_x = E$)

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma_1 E + u_1 kT \frac{dn_1}{dx} \right] = -ek_{12}(n_1^0 n_2^0 - n_1 n_2), \quad (2,7a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma_2 E - u_2 kT \frac{dn_2}{dx} \right] = ek_{12}(n_1^0 n_2^0 - n_1 n_2), \quad (2,7b)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (2,7c)$$

³ Nosiče náboja prevažujúceho typu sa nazývajú majoritné, nosiče náboja opačného znamienka — minoritné.

kde σ_1, σ_2 sú elektrónová, resp. dierová vodivosť. Hustota elektrónového a dierového prúdu je určená vzťahmi

$$i_1 = \sigma_1 E + u_1 kT \frac{dn_1}{dx}, \quad (2,8a)$$

$$i_2 = \sigma_2 E - u_2 kT \frac{dn_2}{dx}. \quad (2,8b)$$

Celkový prúd $i = i_1 + i_2$ je podľa predpokladu konštantna. Preto ak rovnice (2,7a) a (2,7b) spočítame a integrujeme, dostaneme

$$(\sigma_1 + \sigma_2) E + kT \left(u_1 \frac{dn_1}{dx} - u_2 \frac{dn_2}{dx} \right) = i,$$

z čoho, ak označíme $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, vyplýva

$$E = \frac{i}{\sigma} - kT \frac{u_1 \frac{dn_1}{dx} - u_2 \frac{dn_2}{dx}}{\sigma}. \quad (2,9)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (2,7a) s uvážením (2,7c) dostaneme pre príslušné nerovnovážne koncentrácie diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\frac{d}{dx} \left[u_2 kT \frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{dN}{dx} - u_1 kT \frac{dn_1}{dx} - \frac{\sigma_1}{\sigma} i \right] = ek_{12}(n_1^0 n_2^0 - n_1 n_2), \quad (2,10)$$

kde

$$u = \frac{\sigma_1 u_2 + \sigma_2 u_1}{\sigma}.$$

Ak nerovnovážnu koncentráciu elektrónov n_1 vyjadríme vzťahom

$$n_1 = n_1^0 + z \quad (2,11)$$

a ak okrem toho predpokladáme, že odchýlka nerovnovážnej koncentrácie od rovnovážnej nebude presahovať samotnú rovnovážnu koncentráciu, t. j. ak $z < n_1^0$, dostaneme pre z na základe (2,10) rovnicu (ak položíme približne

$$u \approx u_2 \text{ a } \frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{dN}{dx} \approx \frac{dN}{dx}),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{ek_{12}}{u_2 kT} (n_1^0 + n_2^0) z = - \frac{d}{dx} \left[\frac{dn_1^0}{dx} + \frac{i}{u_1 kT} \frac{\sigma_1}{\sigma} \right]. \quad (2,12)$$

V I. a III. oblasti, ktoré sú určené definovaním funkcie $N(x)$ vzťahmi (1,3), je

$$n_1^0 + n_2^0 = N_0 \left[1 + 2 \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 \right], \quad \frac{d^2 n_1^0}{dx^2} = 0,$$

resp.

$$n_1^0 + n_2^0 = N_l \left[1 + 2 \left(\frac{n_i}{N_l} \right)^2 \right], \quad \frac{d^2 n_1^0}{dx^2} = 0.$$

V II. oblasti môžeme písať

$$n_1^0 + n_2^0 = N_0(\beta_1 + \beta_2 ax), \quad (2,13)$$

kde

$$\beta_1 = 1 + 2 \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2,$$

$$\beta_2 = 1 - 2 \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2.$$

Po týchto označeniach nadobudne diferenciálna rovnica (2,12) v jednotlivých oblastiach tvar

$$\text{I} \quad \frac{d^2 z_I}{dx^2} - (C_0 \beta_0)^2 z_I = 0, \quad (2,14a)$$

$$\text{II} \quad \frac{d^2 z_{II}}{dx^2} - C_0^2 (\beta_1 + \beta_2 ax) z_{II} = - \frac{2n_i^2 ag}{N_0} \left(\frac{1}{1+ax} \right)^3, \quad (2,14b)$$

$$\text{III} \quad \frac{d^2 z_{III}}{dx^2} - (C_l \beta_l)^2 z_{III} = 0, \quad (2,14c)$$

kde

$$C_{0,l} = \sqrt{\frac{ek_{12}N_{0,l}}{u_2 kT}}, \quad g = \frac{i}{u_1 kTN_0},$$

$$\beta_{0,l} = \sqrt{1 + 2 \left(\frac{n_i}{N_{0,l}} \right)^2}.$$

3. Hraničné podmienky a riešenie rovníc (2,14)

Pre určenie šiestich konštánt (po dvoch z každej oblasti) použijeme predovšetkým prirodzené podmienky v nekonečnu, t. j. podmienky, že v nekonečnu sú nerovnovážne koncentrácie rovné rovnovážnym. Preto musí platiť

$$x \rightarrow -\infty \quad z_I = 0, \quad (3,1a)$$

$$x \rightarrow +\infty \quad z_{III} = 0. \quad (3,1b)$$

Ostatné podmienky dostaneme z predpokladu, že vo vnútri vzorky je $\text{div } \mathbf{E} = 0$ a z podmienky spojitosti celkového prúdu, vyjadrenej rovnicou $\text{div } i = 0$. Môžeme ich napísať v tvare

$$x = 0 \quad z_I = z_{II}, \quad \frac{dz_I}{dx} = \frac{dz_{II}}{dx}, \quad (3,2a)$$

$$x = l \quad z_{II} = z_{III}, \quad \frac{dz_{II}}{dx} = \frac{dz_{III}}{dx}. \quad (3,2b)$$

Riešením rovníc (2,14a) a (2,14c) sú funkcie

$$z_{\text{I}} = C_1 e^{\alpha_0 x} + C_2 e^{-\alpha_0 x}, \quad (3,3a)$$

$$z_{\text{III}} = C_5 e^{\alpha_l x} + C_6 e^{-\alpha_l x}, \quad (3,3b)$$

kde

$$\alpha_{0,l} = C_{0,l} \beta_{0,l} = \sqrt{\frac{ek_{12} N_{0,l}}{u_2 k T} \left[1 + 2 \left(\frac{n_i}{N_{0,l}} \right)^2 \right]}.$$

Z prirodzených okrajových podmienok v nekonečnu však vyplýva, že $C_2 = C_5 = 0$.

Riešenie rovnice (2,14b) je

$$\begin{aligned} z_{\text{II}} = & \sqrt{\beta_1 + \beta_2 ax} \left\{ C_3^* I_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2iC}{3} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}} \right] + \right. \\ & \left. + C_4^* I_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2iC}{3} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} + \omega(x), \end{aligned} \quad (3,4)$$

kde $I_{\frac{1}{3}}$ a $I_{-\frac{1}{3}}$ sú Besselove funkcie $c = \frac{C_0}{a\beta_2}$ a $\omega(x)$ partikulárny integrál. Konštanty C_3^* a C_4^* sú obecné komplexné čísla. Aby sme dostali reálne riešenie rovnice (2,14b), uvažíme, že pre Besselove funkcie platí (pozri napr. [19])

$$I_\nu(i\eta) = i^\nu \bar{I}_\nu(\eta),$$

kde

$$\bar{I}_\nu(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{\nu+2k}.$$

Preto ak volíme $C_3^* = i^{-\frac{1}{3}} C_3$ a $C_4^* = i^{\frac{1}{3}} C_4$, môžeme reálne riešenie rovnice (2,14b) vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} z_{\text{II}} = & \sqrt{\beta_1 + \beta_2 ax} \left\{ C_3 \bar{I}_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2C}{3} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}} \right] + \right. \\ & \left. + C_4 \bar{I}_{-\frac{1}{3}} \left[\frac{2C}{3} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} + \omega(x). \end{aligned} \quad (3,5)$$

Aby sme určili partikulárny integrál $\omega(x)$, položíme $1 + ax = \eta$, t. j. $\beta_1 + \beta_2 ax = (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2 \eta \approx \beta_2 \eta$, pretože $\beta_1 - \beta_2 = 4 \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 < \beta_2 \eta$. Je teda treba hľadať partikulárny integrál rovnice

$$\frac{d^2 z_{\text{II}}(\eta)}{d\eta^2} - \left(\frac{C_0}{a} \right)^2 \beta_2 \eta z_{\text{II}}(\eta) = - \frac{2n_i^2 g}{aN_0} \left(\frac{1}{\eta} \right)^3. \quad (3,6)$$

Vo všeobecnom prípade je jediná možnosť hľadať jej partikulárny integrál vo forme nekonečného radu. V dvoch špeciálnych prípadoch možno ho však vyjadriť jediným členom, a to:

a) ak je

$$\beta_2 \left(\frac{C_0}{a} \right)^2 \ll 2 \left(\frac{1}{1+ax} \right)^3, \quad (3,7)$$

potom

$$\omega(x) = - \frac{n_i^2 g}{aN_0} \frac{1}{1+ax}. \quad (3,8)$$

Z nerovnosti (3,7) však vyplýva, že je

$$3 \left(\frac{\beta_2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2C}{3} (1+ax)^{\frac{3}{2}} \ll 1. \quad (3,9)$$

Keďže $3 \left(\frac{\beta_2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 1$ a $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$ nerovnosť (3,9) značí, že argument Besselových funkcií je v tom prípade $\ll 1$. Možno ich preto aproximovať len prvými členmi.

b) Ak je

$$\beta_2 \left(\frac{C_0}{a} \right)^2 \gg 20 \left(\frac{1}{1+ax} \right)^3, \quad (3,10)$$

potom

$$\omega(x) = \frac{2ag}{\beta_2 N_0} \left(\frac{n_i}{C_0} \right)^2 \left(\frac{1}{1+ax} \right)^4. \quad (3,11)$$

Z nerovnosti (3,10) potom vyplýva, že je

$$\frac{3}{8} \beta_2 \cdot \frac{2C}{3} (1+ax)^{\frac{3}{2}} \gg 1, \quad (3,12)$$

čo značí, že v tom prípade môžeme pre Besselove funkcie použiť asymptotické vzorce platné pre veľké argumenty.

O tom, či konkrétny prípad patrí do skupiny a) alebo b), rozhoduje výraz

$$\frac{2C}{3} (1+ax)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3a} \sqrt{\frac{ek_{12}N_0}{u_2kT}} (1+ax)^{\frac{3}{2}}. \quad (3,13)$$

Pri dostatočne malej nehomogenite môžeme podľa toho všetky konkrétne prípady zahrnúť do skupiny b). Pri nie veľmi malej nehomogenite je rozhodujúci kinetický koeficient k_{12} . Všimnime si napr. germánia. Podľa [20], [21] je pre germánium $\sigma_{12} = 10^{-15} \text{ cm}^2$. Ak položíme $v_1 = v_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ cm/sek}$, vychádza podľa (1,6) $k_{12} = 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ cm/sek}$ a teda $C = 10^{-5} \frac{\sqrt{N_0}}{a\beta_2}$. Pretože podľa (2,5) má byť $N_0 > 2n_i = 6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, vychádza napr. pre germánium s $N_0 = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ $\frac{2C}{3} (1+ax)^{\frac{3}{2}} \approx 300 \frac{(1+ax)^{\frac{3}{2}}}{a}$. Z toho vyplýva, že pre germánium i pri pomerne veľmi silných nehomogenitách sú podmienky prípadu b) dobre splnené. Podmienky prípadu a) by mohli byť splnené alebo pri veľmi malých hodnotách rekombinačných prierezov (a to vtedy, ak

$\sigma_{12} \ll 3 \cdot 10^{-6} \frac{a}{N_0(1+ax)}$ t. j. pri $a = 1 \mid l = 1 \mid N_0 = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \sigma_{12} \ll 10^{-21} \text{ cm}^2$, čo je podľa [22], [23], [24] už prakticky dolná hodnota rekombinačného prierezu), alebo pri veľmi malých koncentráciách nečistôt v polovodičoch so širokým zakázaným pásmom.

Polovodiče patriace do skupiny a) nazveme polovodičami so slabou rekombináciou, polovodiče patriace do skupiny b) polovodičami so silnou rekombináciou, resp. malou nehomogenitou.

4. Polovodiče so slabou rekombináciou

Ak je rekombinácia taká slabá, že je splnená nerovnosť (3,7), môžeme funkcie $\bar{I}_{\frac{1}{3}}$ a $\bar{I}_{-\frac{1}{3}}$ aproximovať vzťahmi

$$\bar{I}_{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{C}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right)} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{1}{2}} = A(\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{1}{2}}, \quad (4,1a)$$

$$\bar{I}_{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{C}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{3} + 1\right)} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{-\frac{1}{2}} = B(\beta_1 + \beta_2 ax)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4,1b)$$

Pre neznáme konštanty dostaneme potom vzťahy

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{n_i^2 g}{N_0} \left[\frac{a + \alpha_0}{a(\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1})} - \frac{1}{a} \right], \\ C_3 &= - \frac{n_i^2 g}{AN_0(1+al)(\alpha_l + C_0 \sqrt{\beta_1 + \beta_2 al})(\beta_1 + \beta_2 al)} \left[\frac{1}{1+al} - \frac{\alpha_l}{a} \right], \\ C_4 &= \frac{n_i^2}{BN_0(\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1})} \left[1 + \frac{\alpha_0}{a} \right], \\ C_6 &= -e^{\alpha_l l} \frac{n_i^2 g}{N_0} \left[\frac{a + \alpha_0}{a(\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1})} - \frac{1}{a(1+al)} \right]. \end{aligned} \quad (4,2)$$

Je zrejmé, že konštanta C_1 značí odchýlku od rovnovážnej koncentrácie elektrónov v bode $x = 0$ a $C_6 e^{-\alpha_l l}$ v bode $x = l$. Pre odchýlku od rovnovážnej koncentrácie spôsobenú pretekajúcim prúdom v bode $x = 0$ vychádza

$$n_1 - n_1^0 = \frac{n_i^2 i}{N_0^2 u_1 kT} \left[\frac{a + \alpha_0}{a(\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1})} - \frac{1}{a} \right], \quad (4,3)$$

alebo ak sem dosadíme $i = eu_1 N_0 E_0$, kde E_0 značí intenzitu elektrického poľa vo vzorke v $x \rightarrow -\infty$ a ak ešte uvážime, že $\alpha_0 \approx C_0$ a $\beta_1 \approx 1$ (pre $a > C_0$)

$$n_1 - n_1^0 = \frac{1}{2} \frac{e}{kT} \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 \sqrt{\frac{u_2 kT}{ek_{12} N_0}} N_0 E_0. \quad (4,4)$$

Z toho vzťahu vidieť, že i pri pomerne malých hodnotách prúdu sú odchýlky od rovnovážnych koncentrácií značné. Vzorec však podľa základného predpokladu je správny len potiaľ, pokiaľ je $n_1 - n_1^0 < n_1^0$. V germániu, ako sme videli, sa pri malých nehomogenitách podmienka prípadu a) nedá realizovať. V kremíku, v ktorom je $n_i = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, by mohol takýto prípad nastať pri koncentrácii nečistôt neprevyšujúcich 10^{11} cm^{-3} , avšak taký čistý kremík sa súčasnými technologickými metódami ešte nepodarilo vyrobiť. Preto pre prax je dôležitejší druhý prípad a z toho dôvodu preberieme ho oniečo podrobnejšie.

5. Polovodiče so silnou rekombináciou, resp. malou nehomogenitou

Z teórie Besselových funkcií je známe, že pre veľké argumenty možno ich aproximovať vzťahmi

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{I}_\nu(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta}} e^\eta.$$

Podľa toho však je $\lim \bar{I}_{\frac{1}{3}}(\eta) = \lim \bar{I}_{-\frac{1}{3}}(\eta)$ a pre riešenie diferenciálnej rovnice (2,14b) by sme dostali tak dva lineárne závislé integrály. Pretože v tomto prípade by sme nemohli splniť systém štyroch rovníc pre štyri konštanty, použijeme pre tento prípad miesto funkcie $\bar{I}_{-\frac{1}{3}}(\eta)$ ako riešenie funkciu Mac Donaldovu definovanú vzťahom (pozri napr. [25])

$$K_\nu(\eta) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(i\eta),$$

kde $H_\nu^{(1)}$ je Hankelova funkcia I. druhu.

Pre veľké argumenty klesá Mac Donaldova funkcia exponenciálne k nule

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} K_\nu(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} e^{-\eta}.$$

Ak označíme

$$\begin{aligned} H(x) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi C}} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2C}{3}(\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}}}; & H_{0,l} &= |H|_{x=0,l}, \\ F(x) &= \sqrt{\frac{3\pi}{4C}} (\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2C}{3}(\beta_1 + \beta_2 ax)^{\frac{3}{2}}}; & F_{0,l} &= |F|_{x=0,l}, \\ Z_{0,l} &= - \left| \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0,l} = \frac{8a^2g}{\beta_2 N_0} \left(\frac{n_i}{C_0} \right)^2 \left(\frac{1}{1+ax} \right)^5, \end{aligned} \quad (5,1)$$

vychádzajú pre neznáme konštanty vzorce

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\alpha_l \omega(l) + Z_l}{\alpha_l + C_0 \sqrt{\beta_1 + \beta_2 a l}} \cdot \frac{H_0}{H_l} - \frac{\alpha_0 \omega(0) - Z_0}{\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1}} + \omega(0), \\
 C_3 &= -\frac{\alpha_l \omega(l) + Z_l}{\alpha_l + C_0 \sqrt{\beta_1 + \beta_2 a l}} \cdot \frac{1}{H_l}, \\
 C_4 &= -\frac{\alpha_0 \omega(0) - Z_0}{\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1}} \cdot \frac{1}{F_0}, \\
 C_6 &= e^{\alpha_l l} \left[-\frac{\alpha_l \omega(l) + Z_l}{\alpha_l + C_0 \sqrt{\beta_1 + \beta_2 a l}} - \frac{\alpha_0 \omega(0) - Z_0}{\alpha_0 + C_0 \sqrt{\beta_1}} + \omega(l) \right].
 \end{aligned} \tag{5,2}$$

Pre zvýšenie koncentrácie elektrónov v bode $x = 0$ vychádza približne

$$n_1 - n_1^0 = 2 \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 \frac{a u_2 E_0}{k_{12}}, \tag{5,3}$$

čo pre germánium dáva približne

$$n_1 - n_1^0 \approx 1,2 \cdot 10^{11} \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 a E_0. \tag{5,4}$$

Pri $n_i/N_0 = 0,2$ by to bolo asi $4 \cdot 10^{10} a E_0$ a pri $n_i/N_0 = 0,1$ asi $1,2 \cdot 10^9 a E_0$.

Odchýlky rádovo porovnateľné s pôvodnými koncentraciami elektrónov by preto v germánium mohli vzniknúť až pri elektrickom poli

$$E_0 > 10^{-12} \frac{N_0^3}{a n_i^2}, \tag{5,5}$$

čo pri $N_0 = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ značí $E_0 > 10^6/a$ (V/cm).

Z týchto vzťahov vyplýva záver, že v polovodičoch, v ktorých je splnená nerovnosť (3,10) (a to sú prakticky všetky v praxi sa vyskytujúce prípady — samozrejme nemáme na mysli znečistenia bariérového charakteru) sú odchýlky od rovnovážnych koncentrácií spôsobené pretekajúcim prúdom také malé, že pri nie príliš veľkých prúdoch môžeme ich zanedbať. Je to dôsledok toho, že pri zvýšení koncentrácie voľných elektrónov v niektorom bode nad jej rovnovážnu hodnotu (napr. elektrickým polom) objaví sa silná rekombinácia, ktorá tieto odchýlky znižuje. V porovnaní s polovodičom s jedným typom vodivosti sú odchýlky v polovodiči so zmiešanou vodivosťou za inakších rovnakých podmienok väčšie, aj keď sú často tiež zanedbateľné.

6. Nerovnovážne koncentrácie voľných elektrónov a dier vo wilsonovskom polovodiči

Rovnovážne koncentrácie elektrónov a dier v homogénnych polovodičoch s málo ionizovanými donorovými hladinami za predpokladu, že pri absolútnej nule sú donorové hladiny obsadené jediným elektrónom, vypočítal Wilson [26].

(Polovodiče v podmienkach, za ktorých platia Wilsonove vzorce, sa často nazývajú wilsonovské.) Sú určené vzťahmi

$$n_1^0 = \sqrt{A_1 e^{-u_1/kT} (N + A_2 e^{-u_2/kT})}, \quad (6,1a)$$

$$n_2^0 = A_2 e^{-u_2/kT} \sqrt{\frac{A_1 e^{-u_1/kT}}{N + A_2 e^{-u_2/kT}}}, \quad (6,1b)$$

kde u_1 – aktivačná energia donorových elektrónov, $u_2 = \Delta E - u_1$, pričom ΔE je šírka zakázaného pásma. Konštanty A_1 a A_2 sú určené vzorcami

$$A_1 = \frac{2}{h^3} (2\pi m_1 kT)^{\frac{3}{2}}, \quad (6,2a)$$

$$A_2 = \frac{2}{h^3} (2\pi m_2 kT)^{\frac{3}{2}}. \quad (6,2b)$$

Aj pre wilsonovské polovodiče budeme predpokladať, že tieto vzťahy určujú priamo rovnovážnu koncentráciu elektrónov a dier v polovodiči bez vonkajšieho vplyvu (pozri pozn. ²) na str. 6).

S wilsonovskými polovodičmi sa v praxi stretujeme napr. pri nízkych teplotách, keď stredná energia fonónov (kT) je omnoho menšia ako aktivačná energia prímiesi, alebo aj pri vyšších teplotách v prípade, že aktivačná energia prímiesi je dostatočne veľká.

Podľa Pearsona a Bardeena [27] závisí aktivačná energia u_1 od koncentrácie prímiesnych atómov vzťahom

$$u_1 = u_{10} - \alpha_1 N^{\frac{1}{3}}, \quad (6,3)$$

avšak pri nie príliš veľkom gradiente koncentrácie prímiesi (čo v celej práci predpokladáme) môžeme ju považovať za konštantnú.

Vo väčšine prípadoch je $u_1 \ll u_2$. Pre $u_2 = 0,5$ eV pri izbovej teplote je $A_1 \approx A_2 \approx 7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ a $e^{-u_2/kT} = 3 \cdot 10^{-9}$, takže $A_2 e^{-u_2/kT} \approx 2,1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$. V germánii je $u_2 \approx 0,7$ a v kremíku až 1,2 eV, takže príslušné hodnoty sú ešte menšie. Vzhľadom na predpokladanú nerovnosť (2,5) môžeme oprávnene predpokladať, že $N \gg A_2 e^{-u_2/kT}$. Vzťahy (6,1) možno potom prepísať do tvaru

$$n_1^0 = \sqrt{A_1 e^{-u_1/kT} N} = f_1 \sqrt{N}, \quad (6,4a)$$

$$n_2^0 = \sqrt{\frac{A_1 A_2 e^{-(u_1+2u_2)/kT}}{N}} = f_2 \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (6,4b)$$

Pretože podľa predpokladu niet vo vzorke priestorového náboja, musí za rovnováhy platiť

$$n_1^0 = n_2^0 + n_4^0, \quad (6,5)$$

kde n_4^0 značí koncentráciu ionizovaných donorových hladín. Pri teplotách, pri ktorých je ešte len malá časť donorových hladín ionizovaná, je vo valenčnom pásme nepatrná koncentrácia dier. Preto v menovateli druhého zlomku vo

vzťahu (1,4c) môžeme člen úmerný n_2 zanedbať oproti členu úmernému n_1 . Okrem toho na základe (1,5) platí

$$k_{41}k_{24} = k_{14}k_{42}n_1^0n_2^0,$$

$$k_{14} \left(n_1 + \frac{n_1n_4^0}{N - n_4^0} \right) \approx k_{14}n_1.$$

Pri predpokladaných malých odchýlkach od rovnovážnej koncentrácie môžeme teda písať

$$\delta n = k_{12}(n_1^0n_2^0 - n_1n_2) + k_{42}N(n_2^0 - n_2). \quad (6,6)$$

Podľa [12] možno za predpokladu $\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{o}$ v stacionárnom prípade písať

$$n_1 - n_2 = \frac{n_1^0n_4^0}{n_1} = \frac{n_1^0 - n_1^0n_2^0}{n_1}. \quad (6,7)$$

Konečne ak budeme nerovnovážne koncentrácie hľadať v tvare

$$n_1 = n_1^0 + z_1, \quad (6,8a)$$

$$n_2 = n_2^0 + z_2, \quad (6,8b)$$

pričom podľa (6,7) je

$$n_1^0z_2 = n_2^0z_1, \quad (6,9)$$

dostaneme pre z_1 túto diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2z_1}{dx^2} - C_0^2(h_1 - h_2ax)z_1 = -\frac{f_2}{f_1}ag \left(\frac{1}{1+ax} \right)^2, \quad (6,10)$$

kde

$$h_1 = \frac{f_2}{f_1}k_{42} + \frac{2k_{12}f_2}{\sqrt{N_0}},$$

$$h_2 = \frac{k_{12}f_2}{\sqrt{N_0}},$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{e}{u_2kT}}.$$

Jej riešenie v I. a III. oblasti je vyjadrené funkciami (3,3), len konštanty α_0 a α_l majú hodnoty

$$\alpha_{0,l} = C_0 \sqrt{\frac{2k_{12}f_2}{\sqrt{N_{0,l}}} + \frac{k_{42}f_2}{f_1}}. \quad (6,11)$$

V II. oblasti jej je približným riešením

$$Z_1^{\text{II}} = (1+ax) \left\{ C_3 \bar{I}_{\frac{1}{3}} \left[\frac{2C_0}{3ah_2} (1+ax)^{\frac{3}{2}} \right] + C_4 \bar{I}_{-\frac{1}{3}} \left[\frac{2C_0}{3ah_2} (1+ax)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} + \omega(x), \quad (6,12)$$

pričom partikulárny integrál $\omega(x)$ v prípade malých argumentov je

$$\omega(x) = \frac{f_2}{f_1} \frac{g}{a} \ln(1 + ax) \quad (6,13)$$

a v prípade veľkých

$$\omega(x) = -\frac{f_2}{f_1 h_1} \frac{ag}{C_0^2} \left(\frac{1}{1 + ax} \right)^2. \quad (6,14)$$

Integračné konštanty sú aj v tomto prípade určené vzťahmi (5,2). Všimneme si totiž len prípadu veľkých argumentov, pretože sa v praxi omnoho častejšie vyskytuje. Pre zvýšenie koncentrácie elektrónov vo vodivostnom pásme v bode $x = 0$ vychádza približne

$$n_1 - n_1^0 = -\frac{f_2}{f_1 h_1} \frac{ag}{C_0^2}. \quad (6,15)$$

Ak sem dosadíme podobne ako na str. 118 $i = eu_1 N_0 E_0$ na základe označení (6,10), môžeme tento vzťah prepísať do tvaru

$$n_1 - n_1^0 = \frac{N_0^{\frac{3}{2}}}{k_{42} \sqrt{N_0} + 2k_{12} f_1} au_2 E_0. \quad (6,16)$$

Koncentrácia voľných dier vo valenčnom pásme sa podľa vzťahu (6,9) zmení približne o n_2^0/n_1^0 násobok odchýlky koncentrácie elektrónov. Pretože podľa predpokladu je tento zlomok omnoho menší ako 1, sú aj odchýlky koncentrácie voľných dier vo valenčnom pásme čo do hodnoty omnoho menšie. Koncentrácia dier na donorových hladinách sa preto mení približne tak ako koncentrácia voľných elektrónov vo vodivostnom pásme.

7. Usmerňovací efekt v nehomogénnych polovodičoch

V polovodičoch, v ktorých pri zmene polaritý vonkajšieho napätia vzniká rozličné rozloženie nerovnovážnej koncentrácie nosičov náboja, musí vzniknúť usmerňovací efekt. V polovodičoch s bariérovým charakterom znečistenia je tento efekt značný a má aj praktické upotrebenie. Pokúsime sa vyšetriť, ako intenzívne sa tento efekt prejaví aj v polovodičoch s pozvoľnou nehomogenitou a za akých podmienok by mohol mať po prípade aj praktický význam.

Aby sme dostali o ňom kvantitatívnu predstavu, vypočítame zmenu odporu vzorky polovodiča pri zmene orientácie vonkajšieho poľa. Formálne ju môžeme vyjadriť takto:

$$\Delta R = \Delta R_{+i} - \Delta R_{-i}, \quad (7,1)$$

kde

$$\Delta R_{+i} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_0 + \Delta\sigma_{\pm i}} - \frac{1}{\sigma_0} \right) dx \approx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\sigma_{\pm i}}{\sigma_0^2} dx. \quad (7,2)$$

Charakteristikou usmerňovacieho efektu môže byť podiel tejto zmeny odporu a pôvodného odporu vzorky (bez prúdu), t. j.

$$p = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta R_{+i} - \Delta R_{-i}}{R_0}. \quad (7,3)$$

Zo vzťahov (5,1) vyplývajú nerovnosti

$$H_i \gg H_0, \quad (7,4a)$$

$$F_i \ll F_0, \quad (7,4b)$$

preto ak za C_4 a C_3 dosadíme podľa (5,2) a za $H(x)$ a $F(x)$ ich maximálne hodnoty, dostaneme nerovnosť

$$\begin{aligned} & H(C_3^i - C_3^{-i}) + F(C_4^i - C_4^{-i}) \ll \\ & \ll \left| -\frac{\alpha_i}{\alpha_i + C_0} \frac{1}{1+ax} [\omega(l)_i - \omega(l)_{-i}] + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + C_0} [\omega(0)_i - \omega(0)_{-i}] \right|. \end{aligned} \quad (7,5)$$

Z nej vyplýva, že

$$\int_0^l \frac{H(C_3^i - C_3^{-i}) + F(C_4^i - C_4^{-i})}{N_0^2(1+ax)^2} dx \ll \int_0^l \frac{\omega(x)_i - \omega(x)_{-i}}{N_0^2(1+ax)^2} dx. \quad (7,6)$$

Preto pri počítaní integrálu (7,2) stačí uvážiť partikulárny integrál rovnice (2,14), čím pre celkovú zmenu odporu polovodiča pri preorientovaní vonkajšieho napätia dostaneme

$$\begin{aligned} |\Delta R| &= \frac{2g}{eu_1 C_0^2} \left(\frac{n_i}{N_0} \right)^2 \left\{ \frac{2a}{\alpha_0} + \frac{2a}{\alpha_i(1+al)^4} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{7} \left[1 - \left(\frac{1}{1+al} \right)^7 \right] + \frac{20a^2}{9C_0^2} \left[1 - \left(\frac{1}{1+al} \right)^9 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7,7)$$

Prvé dva členy zo zátvorky charakterizujú vplyv na počiatku homogénnych oblastí $\langle -\infty, 0 \rangle$ a $\langle l, \infty \rangle$. Pre nie príliš veľké nehomogenity ich môžeme zanedbať. Ak ešte uvážime, že odpor vzorky bez vonkajšieho poľa je

$$R_0 = \frac{1}{eu_1 N_0} \int_0^l \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{eu_1 a N_0} \ln(1+al), \quad (7,8)$$

dostaneme pre podiel (7,3) vzťahovaný na oblasť $\langle 0, l \rangle$, ktorá je pre usmerňovanie rozhodujúca, približne

$$\left| \frac{\Delta R}{R_0} \right| = \frac{2n_i^2 u_2 E_0}{N_0^3 k_{12}} \frac{a}{\ln(1+al)} \left\{ \frac{2}{7} \left[1 - \left(\frac{1}{1+al} \right)^7 \right] + \frac{20a^2}{9C_0^2} \left[1 - \left(\frac{1}{1+al} \right)^9 \right] \right\}. \quad (7,9)$$

Usmerňovací efekt je podľa toho tým väčší, čím väčšia je nehomogenita vzorky a čím menšia je rekombinácia. Rastie s pripojeným napätím, avšak so vzrastajúcim prúdom fakticky klesá, čo vyplýva z prítomnosti N_0^3 v menovateli. Práve taký výsledok bolo nutné očakávať.

Pre $N_0 = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ vychádza približne

$$\left| \frac{\Delta R}{R_0} \right| \approx 6 \cdot 10^{-3} E_0 \frac{a}{\ln(1 + al)}, \quad (7,10)$$

pre $N_0 = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ 100-krát menej. Pri pretekaní prúdu o hustote $i = 0,05 \text{ A/cm}^2$, čo zodpovedá napr. hodnotám $N_0 = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ a $E_0 = 1 \text{ V/cm}$, je celková zmena odporu pri $a = 1$ a $l = 1$ len asi 6/1000 a pri hustote $i = 0,5 \text{ A/cm}$ 6/100 000 pôvodného odporu vzorky. Z toho vidieť, že pre malé nehomogenity je pre merateľné prúdy usmerňovací efekt zanedbateľný. Aby polovodič mal dobré usmerňovacie vlastnosti, musel by podľa (7,9) mať prudkú nehomogenitu na čo možno najmenšom intervale, čo je výsledok v praxi veľmi dobre overený.

Záver

V práci sa rieši problém nerovnovážnych koncentrácií elektrónov a dier v polovodičoch s pozvoľnou nehomogenitou na ľubovoľne veľkom intervale, takže rekombinácia elektrónov a dier sa nedá zanedbať tak ako v bariérach s hrúbkou pod 10^{-7} cm . Pri riešení nevystupujú doby života elektrónov a dier, ktoré nemožno vždy považovať za konštanty. Ako základné charakteristiky polovodiča sú uvažované kinetické koeficienty prechodov medzi rozličnými energetickými hladinami.

Ukázalo sa, že pri miernych nehomogenitách sú odchýlky od rovnovážnych koncentrácií i pri pomerne silných vonkajších elektrických poliach malé a vo väčšine prípadov, ktoré podľa našej klasifikácie, vyplývajúcej z dvoch možných jednoduchých riešení východiskových rovníc, treba zaradiť medzi „polovodiče so silnou rekombináciou“, často zanedbateľné malé. Z toho, ako je to aj matematicky potvrdené, vyplýva, že aj usmerňovací efekt v nehomogénnych polovodičoch s malou nehomogenitou existuje iba kvalitatívne.

Na základe odvodených vzťahov za predpokladu, že by bolo možné merať odchýlky od rovnovážnych koncentrácií, javí sa možnosť určovať hodnoty ináč ťažko merateľných kinetických koeficientov, prípadne charakter nehomogenity.

LITERATÚRA

- [1] Krempaský J., Mat.-fyz. čas. SAV 7 (1957).
- [2] Shockley W., Bell System Tech. 3 (1949), XXVIII.
- [3] Tauc J., Čs. čas. fyz. 2 (1954), 158.
- [4] Poluprovodníci v nauke i technike I, IAN SSSR, Moskva—Leningrad 1957.
- [5] Pfann W. G., Trans. AIMME (1952), 747.
- [6] Lord N. W., J. Metals 5 (1953), 11.
- [7] Krempaský J., Mat.-fyz. čas. SAV 7 (1957).

- [8] Burton J. A., Kolb E. D., Slichter W. P., Struthers J. D., J. Chem. Phys. 21 (1953), 1991.
- [9] Struthers J. D., Buehler E., Theuerer H. C., Burton J. A., J. Metals 4 (1952), 835.
- [10] Hunter L. P., Handbook of Semiconductor electronic, New York 1956.
- [11] Pekar C. J., ŽETF 10 (1940), 1210.
- [12] Gubanov A. J., Teoria vypramlajúšceho dejstva poluprovodnikov, GJTTL, Moskva 1956.
- [13] Anselm G. ŽTF XXII (1952), 1146.
- [14] Pikus G. E., ŽTF 22 (1956).
- [15] Pikus G. E., stat' v knihe Poluprovodniki v nauke i v tehnike I, IAN SSSR, Moskva—Leningrad 1957.
- [16] Tauc J., Čs. čas. fyz. 2 (1956), 132.
- [17] Tauc J., Čs. čas. fyz. 1 (1955), 34.
- [18] Mott N. F., Proc. Roy. Soc. A 27 (1939), 171.
- [19] Tichonov A., Samarskij N., Uravnenia matematičeskoj fiziki, GJ TTL, Moskva—Leningrad 1951.
- [20] Mott N. F., Guerney H., Elektronie processes in ionic crystal, 1950 (ruský preklad).
- [21] Lehovec K., Phys. Rev. 75 (1949), 1100.
- [22] Smith J., RCA Rev. 12 (1951), 362.
- [23] Bube A., Thomsen J. Journ. Chem. Phys. (citované z Rose, Phys. Rev. 97 (1955), 322).
- [24] Rose A., RCA Rev. 12 (1951), 362.
- [25] Gray A., Mathews G. B., A treatise on Bessel Functions and their applications to physics, 1931. (Ruský preklad: Funkcii Bessela i ich priloženia k fizike, Moskva 1953.)
- [26] Wilson H., Proc. Roy. Soc. A, 133 (19), 458; Proc. Roy. Soc. 2, (19), 277.
- [27] Pearson H., Bardeen A., Phys. Rev. 75 (1949), 865.
Došlo 24. 4. 1958.

*Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave*

НЕРАВНОВЕСНЫЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ С ЭЛЕКТРОННОЙ И ДЫРОЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ЮЛИУС КРЕМПАСКИ

Выводы

В этой работе решается проблема неравновесных концентраций электронов и дырок в полупроводниках с малой неоднородностью помещенных в внешнем электрическом поле. Предполагается, что примесные уровни вполне или только частично ионизированы. Исходится из уравнений, в которых не выступают время жизни электронов и дырок а кинетические коэффициенты переходов между различными уровнями энергии. Показалось, что при малых неоднородностях отклонения неравновесных концентраций от равновесных и при больших значениях напряжённости внешнего электрического поля незначительны и в большинстве случаев, которые в нашей классификации основаны на двух возможных несложных решениях начальных уравнений принадлежат к полупроводникам с „большой рекомбинацией“ их возможно пренебрегать. Поэтому и выпрямляющий эффект, как это математически показано, очень мал.

Если бы удалось эти отклонения измерить, было бы возможно с помощью выведенных формул определять другим методом очень тяжело измеримые кинетические коэффициенты, степень неоднородности и. т. п.

UNEQUILIBRIUM CONCENTRATIONS OF ELECTRONS AND HOLES IN UNHOMOGENOUS SEMICONDUCTOR

JULIUS KREMPASKY

Summary

The problem of unequilibrium concentration of electrons and holes in semiconductors with the small unhomogeneity in electric field is solved. Assumption is made that the impurity levels are partly or entirely ionized. Solving this problem recombinations of various type are considered and equations are used which do not contain the lifetimes but kinetic coefficients. It is shown that deviations of concentrations from the equilibrium concentration are considerable only in those semiconductors which according to our classification, based on two possible simple solutions of the equations, belong to „semiconductors with weak recombination“. In other cases these deviations are, however, vanishing small. Therefore also the rectification process in them is unimportant, as it is proved mathematically.

Assuming that it is possible to measure these deviations, the kinetic coefficients and other hardly measurable properties as for instance the degree of unhomogeneity, could be determined from the derived relations.