MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 13 1963 ČÍSLO 4

ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПУЧКОВ КУБИЧЕСКИХ ТРОЙНИЧНЫХ ФОРМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

НИКОЛАЙ П. СОКОЛОВ, Киев

Проективная классификация регулярных пучков кубических тройничных форм с наивысшей характеристикой над полем комплексных и вещественных чисел дана автором в предыдущих работах [1], [2]. Настоящая статья посвящена проективной классификации регулярных пучков комплексных кубических тройничных форм, обладающих любой положительной характеристикой. Как геометрическая интерпретация полученных результатов дается проективная классификация в комплексной области пучков плоских линий 3-го порядка.

§ 1. Пучки с положительной характеристикой

Возьмем регулярный пучок кубических тройничных форм над полем комплексных чисел

$$\lambda f + \mu \varphi, \tag{1.1}$$

где λ, μ — переменные параметры, не обращающиеся одновременно в нуль, а формы

$$f = \sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ijk} x_i x_j x_k, \qquad \varphi = \sum_{i,j,k=1}^{3} B_{ijk} x_i x_j x_k$$

с соответствующими кубическими матрицами

$$A = \| A_{ijk} \|, \qquad B = \| B_{ijk} \| \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

образуют базис пучка.

Если формы f и φ линейно зависимы, то характеристика пучка (1.1), как легко убедиться, есть [(111)]. Тогда все формы пучка являются попарно линейно зависимыми и представляемые ими плоские линии 3-го порядка совпадают. Их типы хорошо известны ([1]). В дальнейшем мы предполагаем формы f и φ

([1]) См. [1], стр. 184, 194, 195.

пучка (1.1) линейно независимыми и характеристику пучка отличной от [0]. Тогда кубические детерминанты 3-го порядка, порождаемые полиномиальной матрицей $\lambda A + \mu B$ пучка (1.1), имеют наибольший общий делитель, зависящий от λ, μ, и следовательно существует по крайней мере одна пара значений λ, μ, при которых ранг $r(\lambda, \mu)$ (двумерный или трехмерный) этой матрицы меньше, чем 3.

Возьмем две формы пучка (1.1)

$$f_1 = \lambda_1 f + \mu_1 \varphi, \qquad \varphi_1 = \lambda_2 f + \mu_2 \varphi,$$

где λ_1, μ_1 представляет ту пару значений λ, μ, при которых $r(\lambda, \mu) < 3$, а другая пара λ_2, μ_2 значений λ, μ выбрана так, чтобы $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Принимая эти формы за базис, мы можем представить пучок (1.1) в виде

$$\lambda f_1 + \mu \varphi_1. \tag{1.2}$$

Подвергнем матрицу пучка (1.2) постоянным симметрическим элементарным преобразованиям, приводящим матрицу формы f_1 к каноническому виду, соответствующему каноническому виду F формы f_1. Получим тогда проективно эквивалентный пучку (1.2) регулярный пучок вида

$$\lambda F + \mu \Phi, \tag{1.3}$$

где F будет одной из трех канонических форм

$$x_1^3 + x_2^3, \quad 3x_1^2 x_2, \quad x_1^3.$$

В соответствии с этим различаем три случая при установлении канонических видов пучка (1.3), надлежащим образом преобразовывая матрицу этого пучка и меняя его базис.

§ 2. Случай I, когда $F = x_1^3 + x_2^3$

Пусть $\mathfrak{B} = \| \mathfrak{B}_{ijk} \|$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ есть матрица формы Φ пучка (1.3). Рассмотрим два варианта в зависимости от того, будет ли элемент $\mathfrak{B}_{333}$ матрицы $\mathfrak{B}$ отличным от нуля или $\mathfrak{B}_{333} = 0$.

Вариант 1. $\mathfrak{B}_{333} \neq 0$.

Тогда получаем канонический пучок

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu) x_2^3 + \mu x_3^3 \tag{2.1}$$

с характеристикой [111] при $b \neq 0$ и [(11) 1] при $b = 0$, а также канонические пучки

$$\lambda(a x_1^3 + 3x_1 x_2^2) + (\lambda + b\mu) x_2^3 + \mu(3p x_2^2 x_3 + x_3^3) \tag{2.2}$$

(где $a \neq 0$, $p \neq 0$),

$$3\lambda x_1^2 x_2 + (\lambda + b\mu)\, x_2^3 + \mu(3p x_2^2 x_3 + x_3^3) \tag{2.3}$$
$$(\text{где } p \neq 0),$$
$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu)\, x_2^3 + \mu(3x_2^2 x_3 + c x_3^3) \tag{2.4}$$
$$(\text{где } c \neq 0),$$
$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu)\, x_2^3 + \mu(3h x_1^2 x_2 + 3l x_1 x_2^2 + x_3^3) \tag{2.5}$$
$$\left(\text{где} \qquad h \neq 0, \qquad l \neq 0, \qquad b = \frac{l^3 - h^3}{hl}\right),$$

имеющие характеристику [11], и канонический пучок

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu)\, x_2^3 + \mu(3h x_1^2 x_2 + 3k x_1^2 x_3 + 3l x_1 x_2^2 + 6m x_1 x_2 x_3 + 3p x_2^2 x_3 + x_3^3) \tag{2.6}$$

(где h, k, l, m, p не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [1].

Относительные инварианты ручка (2.1) при всех значениях λ, μ имеют вид

$$S(\lambda, \mu) = 0, \qquad T(\lambda, \mu) = -\lambda^2 \mu^2 (\lambda + b\mu)^2.$$

Следовательно, если $b \neq 0$, то абсолютный инвариант $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$, а также при $\lambda = 0$ и при $\lambda = -b\mu$, причем во всех трех случаях $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 2$; при остальных значениях λ, μ имеем $I(\lambda, \mu) = -1$. Если же $b = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 2$) и при $\lambda = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$); при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ имеем $I(\lambda, \mu) = -1$.

Для пучка (2.2) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4ap\lambda^2\mu^2, \quad T(\lambda, \mu) = -a[(a + 4)\,\lambda^2 + 2ab\lambda\mu + a(b^2 + 4p^3)\,\mu^2]\,\lambda^2\mu^2,$$

откуда следует, что $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$

$$\left[\text{тогда} \qquad r(\lambda, \mu) = 2, \qquad r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 2 & (a \neq -4) \\ 1 & (a = -4) \end{cases}\right]$$

и при $\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } \; r(\lambda, \mu) = 2, \; r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 2 \; (b^2 + 4p^3 \neq 0) \\ 1 \; (b^2 + 4p^3 = 0) \end{cases}\right)$. При $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ имеем

$$I(\lambda, \mu) = \frac{64ap^3\lambda^2\mu^2 - [(a + 4)\,\lambda^2 + 2ab\lambda\mu + a(b^2 + 4p^3)\,\mu^2]^2}{[(a + 4)\,\lambda^2 + 2ab\lambda\mu + a(b^2 + 4p^3)\,\mu^2]^2}.$$

Тогда, если $b^2 + 4p^3 \neq 0$ и $a \neq -4$, то $I(\lambda, \mu) = \infty$ при одном или при двух значениях λ/μ в зависимости от того, будет ли $\delta = b^2 + (a + 4)\,p^3$ равным или не равным нулю; кроме того, $I(\lambda, \mu) = 0$ при четырех значениях λ/μ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4$), при остальных же значениях λ/μ абсолютный инвариант равен $I_A(\lambda, \mu)$, где $I_A(\lambda, \mu)$ — значения абсолютного инварианта, отличные от 0/0, 0, ∞, -1. Если $b^2 + 4p^3 \neq 0$ и $a = -4$ или $b^2 + 4p^3 = 0$ и $a \neq -4$, то $I(\lambda, \mu) = \infty$ только при $b \neq 0$ и при одном лишь значении λ/μ; кроме того, $I(\lambda, \mu) = 0$ при двух значениях λ/μ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4$), при остальных же значениях λ/μ имеем

$I_A(\lambda, \mu)$. Если $b^2 + 4p^3 = 0$ и $a = -4$, то $I(\lambda, \mu) \equiv 0$, причем $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} \approx 4$ при всех значениях λ/μ, кроме одного из них, когда $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 2$.

Для пучка (2.3) получаем

$$S(\lambda, \mu) = -4p\lambda^2\mu^2, \qquad \mathrm{T}(\lambda, \mu) = -4\lambda^3\mu^2(\lambda + p\mu).$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и при $\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } r(\lambda, \mu) = 2, r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b^2 + 4p^3 \neq 0) \\ 1 & (b^2 + 4p^3 = 0)\end{cases}\right)$. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то

$$I(\lambda, \mu) = -\frac{4p^3\mu^2 + (\lambda + p\mu)^2}{(\lambda + p\mu)^2}.$$

Тогда $I(\lambda, \mu) = \infty$ при одном значении λ/μ, $I(\lambda, \mu) = 0$ при одном ($b^2 + 4p^3 = 0$) или при двух ($b^2 + 4p^3 \neq 0$) значениях λ/μ, причем в обоих случаях $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 4$; при остальных значениях λ/μ имеем $I_A(\lambda, \mu)$.

Для пучка (2.4) при всех значениях λ, μ имеем

$$S(\lambda, \mu) = 0, \qquad T(\lambda, \mu) = -c[c(\lambda + b\mu)^2 + 4\mu^2]\,\lambda^2\mu^2.$$

Отсюда следует, что $I(\lambda,\mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda,\mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) а также при $\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } r_{\lambda,\mu} = 2, r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b^2c + 4 \neq 0) \\ 1 & (b^2c + 4 = 0)\end{cases}\right)$ и при $\lambda = \left(-b \pm \frac{2}{\sqrt{-c}}\right)\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$ при одном ($b^2c + 4 = 0$) или при двух ($b^2c + 4 \neq 0$) значениях λ/μ). При остальных значениях λ, μ получаем $I(\lambda, \mu) = -1$.

Для пучка (2.5) при всех значениях λ, μ находим $S(\lambda, \mu) = 0$,

$$T(\lambda, \mu) = -\mu^2\left(\lambda - \frac{h^2}{l}\mu\right)^2\left[\lambda^2 + 2\frac{l^2}{h}\lambda\mu + \frac{l}{h^2}(l^3 - 4h^3)\mu^2\right].$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$), а также при $\lambda = \mu h^2/l$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 4$) и при $\lambda = -(l^2/h \pm 2\sqrt{hl})\,\mu$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$ при двух значениях λ/μ, если $b \neq 0$; если же $b = 0$, то при одном значении λ/μ будет $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$, а при другом — $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$). При остальных значениях λ, μ получаем $I(\lambda, \mu) = -1$.

Наконец, для пучка (2.6) имеем

$$S(\lambda, \mu) = -4\mu^2(\lambda^2 + P^{(2)}(\lambda, \mu)), \quad T(\lambda, \mu) = -\mu^2(\lambda^4 + P^{(4)}(\lambda, \mu)),$$

где $P^{(\alpha)}(\lambda, \mu)$ — форма степени α от λ, μ, не содержащая λ^α. Поэтому, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$). Если же $\mu \neq 0$, то

$$I(\lambda, \mu) = -\frac{64\mu^2(\lambda^2 + P^{(2)}_{(\lambda,\mu)})^3 + (\lambda^4 + P^{(4)}_{(\lambda,\mu)})^2}{(\lambda^4 + P^{(4)}_{(\lambda,\mu)})^2}$$

(тогда $r(\lambda, \mu) = 3$).

Обозначая через N, N_0, N_∞, N_{-1} числа различных значений отношения $\lambda/\mu\ (\mu \neq 0)$, при которых $I(\lambda, \mu)$ обращается соответственно в 0/0, 0, ∞, -1, а через N' — число различных значений этого отношения, при которых абсолютный инвариант равен $I_A(\lambda, \mu)$, мы находим, что $N \leqq 2$, $N_0 \leqq 8 - N$, $N_\infty \leqq 4 - N$, $N_{-1} \leqq 2 - N$, $N' = \infty$.

Вариант 2. $\mathfrak{B}_{333} = 0$.

При этом возможны следующие предположения.

a) Оба элемента $\mathfrak{B}_{133}$, $\mathfrak{B}_{233}$ отличны от нуля.

Тогда приходим к каноническим пучкам

$$\lambda(x_1^3 + 3lx_1x_2^2 + x_2^3) + 3\mu x_2x_3^2 \tag{2.7}$$

$$(\text{где } 0 \neq l^3 \neq -1/4),$$

$$\lambda(x_1^3 + 3x_1x_2^2) + \mu(bx_2^3 + 3x_2x_3^2), \tag{2.8}$$

$$3\lambda x_1^2x_2 + (\lambda + b\mu)\,x_2^3 + 3\mu x_2x_3^2, \tag{2.9}$$

обладающим характеристикой [11] и к каноническому пучку

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu)\,x_2^3 + 3\mu(\mathrm{h}x_1^2x_2 + kx_1^2x_3 + lx_1x_2^2 + nx_1x_3^2 + x_2x_3^2) \tag{2.10}$$

(где $n \neq 0$) с характеристикой [1].

Для пучка (2.7) находим

$$S = -4l\lambda^2\mu^2, \qquad T = -4\lambda^3\mu^3.$$

Отсюда следует, что $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и при $\lambda = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$); при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ имеем $I_A(\lambda, \mu)$.

Для пучка (2.8) получаем

$$S(\lambda, \mu) = -4\lambda^2\mu^2, \qquad T(\lambda, \mu) = -4b\lambda^2\mu^4,$$

а потому $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и при $\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } r(\lambda, \mu) = 2,\ r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b \neq 0) \\ 1 & (b = 0)\end{cases}\right)$. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то

$$I(\lambda, \mu) = -\frac{4\lambda^2 + b^2\mu^2}{b^2\mu^2}.$$

В этом случае, если $b \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0$ при двух значениях λ/μ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 4$), а при остальных значениях λ/μ имеем $I_A(\lambda, \mu)$; если же $b = 0$, то $I(\lambda, \mu) = \infty$ при любых значениях λ, μ, отличных от нуля.

Для пучка (2.9) имеем

$$S(\lambda, \mu) = 4\lambda^2\mu^2, \qquad T(\lambda, \mu) = -8\lambda^3\mu^3.$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и при

$\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } r(\lambda, \mu) = 2,\ r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b \neq 0) \\ 1 & (b = 0)\end{cases}\right)$. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0$, причем, если $b \neq 0$, то

$$r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (\lambda \neq -b\mu) \\ 0 & (\lambda = -b\mu)\end{cases};$$

если же $b = 0$, то $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 2$.

Наконец, для пучка (2.10) находим:

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^2(n\lambda^2 + P^{(2)}(\lambda, \mu)), \qquad T(\lambda, \mu) = -4\mu^3[(1 + n^3)\lambda^3 + P^{(3)}(\lambda, \mu)],$$
$$R(\lambda, \mu) = -16\mu^6[(1 - n^3)\lambda^6 + \mathrm{P}^{(6)}(\lambda, \mu)].$$

Отсюда видим, что $S(\lambda, \mu) \not\equiv 0$ и невозможно, чтобы одновременно $T(\lambda, \mu) \equiv 0$ и $R(\lambda, \mu) \equiv 0$. Кроме того, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$); при $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $T(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, $R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, то $N \leqq 2$, $N_0 \leqq 6 - N$, $N_\infty \leqq 3 - N$, $N_{-1} \leqq 2 - N$, $N' = \infty$;

2. если $T(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N \leqq 2$, $N_0 = 0$, $N_\infty = \infty$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$;

3. если $R(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N = 1$, $N_0 = \infty$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$.

β) Только один из элементов $\mathfrak{B}_{133}$, $\mathfrak{B}_{233}$ отличен от нуля.

Тогда получаем канонические пучки

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu) x_2^3 + 3\mu x_2 x_3^2 \tag{2.11}$$

с характеристикой [11] и

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu) x_2^3 + 3\mu(hx_1^2x_2 + kx_1^2x_3 + lx_1x_2^2 + x_2x_3^2) \tag{2.12}$$

(где h, k, l не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [1].

Для пучка (2.11) при всех значениях λ, μ находим $S(\lambda, \mu) = 0$, $T(\lambda, \mu) = -4\lambda^2\mu^3(\lambda + b\mu)$, а потому $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$), а также при $\lambda = 0$ $\left(\text{тогда } r(\lambda, \mu) = 2,\ r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b \neq 0) \\ 1 & (b = 0)\end{cases}\right)$ и при $\lambda = -b\mu$, если $b \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$).

При остальных значениях λ, μ имеем $I(\lambda, \mu) = -1$.

Для пучка (2.12) получаем

$$S(\lambda, \mu) = -4\mu^3[(k^2 + l)\lambda + (bk^2 - h^2)\mu], \qquad T(\lambda, \mu) = -4\mu^3(\lambda^3 + P^{(3)}(\lambda, \mu)),$$
$$R(\lambda, \mu) = -16\mu^6(\lambda^6 + P^{(6)}(\lambda, \mu)).$$

Следовательно, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$); при $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем

1. если $S(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, то $N \leqq 1$, $N_0 \leqq 6 - N$, $N_\infty \leqq 3 - N$, $N_{-1} = 1 - N$, $N' = \infty$;

2. если $S(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N \leqq 3$, $N_0 = 0$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = \infty$, $N' = 0$.

γ) Оба элемента $\mathfrak{P}_{133}$, $\mathfrak{P}_{233}$ равны нулю.

Тогда получаем канонические пучки

$$\lambda x_1^3 + (\lambda + b\mu) x_2^3 + 3\mu(kx_1^2 x_3 + 2mx_1x_2x_3 + px_2^2x_3) \tag{2.13}$$

(где $kp \neq m^2$) с характеристикой [2],

$$\lambda(x_1^3 + 3lx_1x_2^2 + bx_2^3) + 3\mu(hx_1^2x_2 + x_2^2x_3) \tag{2.14}$$

(где l, b не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [2], если $h \neq 0$ и [21], если $h = 0$,

$$\lambda x_1^3 + 3\mu(hx_1^2x_2 + x_2^2x_3) \tag{2.15}$$

с характеристикой [(11)], если $h \neq 0$, и [(11) 1], если $h = 0$,

$$\lambda(3x_1^2x_2 - 3lx_1x_2^2 + l^2x_2^3) + \mu(x_1^3 + 3x_2^2x_3) \tag{2.16}$$

(где $l \neq 0$) с характеристикой [2],

$$l(3x_1^2x_2 + x_2^3) + 3\mu x_2^2 x_3 \tag{2.17}$$

с характеристикой [21].

Для пучка (2.13) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4(m^2 - kp)^2\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = 8(m^2 - kp)^3\mu^6.$$

Отсюда видим, что $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и $I(\lambda, \mu) = 0$ при $\mu \neq 0$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 0$, если $b = 0$, $\lambda = 0$; $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 4$ в противном случае).

Для пучков (2.14) и (2.15) имеем $I(\lambda, \mu) \equiv 0/0$. При этом, если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$, а если $\lambda = 0$, то $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 4$ при $h \neq 0$ и $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$ при $h = 0$; если же $\mu = 0$, то для пучка (2.14) имеем

$$r(\lambda, \mu) = 2, \quad r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (b^2 + 4l^3 \neq 0) \\ 1 & (b^2 + 4l^3 = 0), \end{cases}$$

а для пучка (2.15) $r(\lambda, \mu) = 1$.

Для пучков (2.16) и (2.17) также $I(\lambda, \mu) \equiv 0/0$, причем для пучка (2.16) $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$ при $\mu \neq 0$ и $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$ при $\mu = 0$, а для пучка (2.17) $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 4$ при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ и $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$ при $\mu = 0$ или $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$ при $\lambda = 0$.

§ 3. Случай II, когда $F = 3x_1^2x_2$

Как и раньше, рассматриваем два варианта.

Вариант 1. $\mathfrak{P}_{333} \neq 0$.

Тогда приходим к каноническим пучкам

$$\lambda(x_1^3 + 3x_1^2x_2) + 3\mu x_2x_3^2, \tag{3.1}$$

$$\lambda(x_1^3 + 3x_1^2x_2) + \mu(bx_2^3 + x_3^3) \tag{3.2}$$

(где $b \neq 0$) с характеристикой [11] и к каноническому пучку

$$3\lambda x_1^2x_2 + \mu(ax_1^3 + bx_2^3 + x_3^3 + 3kx_1^2x_3 + 3lx_1x_2^2 + 6mx_1x_2x_3 + 3px_2^2x_3) \tag{3.3}$$

(где b, l, m, p не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [1].

Для пучка (3.1) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4\lambda^2\mu^2, \qquad T(\lambda, \mu) = -8\lambda^3\mu^3.$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ и при $\lambda = 0$ (в обоих случаях $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$). Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 4$).

Для пучка (3.2) при всех значениях λ, μ получаем

$$S(\lambda, \mu) = 0, \qquad T(\lambda, \mu) = -b\lambda^2\mu^3(4\lambda + b\mu),$$

а потому $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$), а также при $\lambda = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 2$) и при $\lambda = -\frac{1}{4}b\mu$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$). При остальных значениях λ, μ будет $I(\lambda, \mu) = -1$.

Для пучка (3.3) имеем

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^2[-p\lambda^2 + (bk + lm)\lambda\mu + (k^2p^2 - kl^2 + alp - abm - 2km^2p + m^4)\mu^2],$$

$$T(\lambda, \mu) = \mu^3[b\lambda^3 + 3(l^2 - 4m^2p - 8kp^2)\lambda^2\mu + P^{(2)}(\lambda, \mu)],$$

$$R(\lambda, \mu) = -\mu^6[(b^2 + 64p^3)\lambda^6 + P^{(6)}(\lambda, \mu)],$$

откуда заключаем, что тождества $S(\lambda, \mu) \equiv 0$ и $T(\lambda, \mu) \equiv 0$ не могут одновременно иметь место. Кроме того, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$); при $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $S(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, $T(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, $R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, то $N \leqq 2$, $N_0 \leqq 6 - N$, $N_\infty \leqq 3 - N$, $N_{-1} \leqq 2 - N$, $N' = \infty$;
2. если $S(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N \leqq 3$, $N_0 = 0$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = \infty$, $N' = 0$;
3. если $T(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N \leqq 2$, $N_0 = 0$, $N_\infty = \infty$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$;
4. если $R(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N = 1$, $N_0 = \infty$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$.

Вариант 2. $\mathfrak{P}_{333} = 0$.

При этом возможны следующие предположения.

α) $\mathfrak{P}_{233} \neq 0$

Тогда получаем канонические пучки

$$3\lambda x_1^2x_2 + 3\mu x_2x_3^2 \tag{3.4}$$

с характеристикой [11] и

$$3\lambda x_1^2x_2 + \mu(ax_1^3 + bx_2^3 + 3kx_1^2x_3 + 3lx_1x_2^2 + 3nx_1x_3^2 + 3x_2x_3^2) \qquad (3.5)$$

(где a, k, l, n не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [1].

Для пучка (3.4) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4\lambda^2\mu^2, \qquad T(\lambda, \mu) = -8\lambda^3\mu^3.$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ и при $\lambda = 0$ (в обоих случаях $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)\ 3} = 1$). Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0$, причем $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 0$.

Для пучка (3.5) имеем

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^2(\lambda^2 + P^{(2)}(\lambda, \mu)), \qquad T(\lambda, \mu) = -8\mu^3(\lambda^3 + P^{(3)}(\lambda, \mu)),$$
$$R(\lambda, \mu) = \mu^7[192n(bn - 2l)\,\lambda^5 + P^{(5)}(\lambda, \mu)].$$

Поэтому, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$). При $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, то $N \leqq 2$, $N_0 \leqq 5 - N$, $N_\infty \leqq 3 - N$, $N_{-1} \leqq 2 - N$, $N' = \infty$;

2. если $R(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $N = 1$, $N_0 = \infty$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$.

β) $\mathfrak{P}_{233} = 0$.

Если при этом $\mathfrak{P}_{133} \neq 0$, то приходим к каноническим пучкам

$$3\lambda x_1^2x_2 + 3\mu x_2^2x_3 \qquad (3.6)$$

с характеристикой [21] и

$$3\lambda x_1^2x_2 + \mu(ax_1^3 + bx_2^3 + 3lx_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 3px_2^2x_3) \qquad (3.7)$$

(где b, l, p не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [1].

Для пучка (3.6) $I(\lambda, \mu) \equiv 0/0$, причем

$$r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0) \\ 2 & (\lambda = 0 \text{ или } \mu = 0) \end{cases},$$

$$r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 4 & (\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0) \\ 1 & (\lambda = 0 \text{ или } \mu = 0) \end{cases}.$$

Для пучка (3.7) имеем

$$S(\lambda, \mu) = -4\mu^3[b\lambda + (ap^2 - l^2)\,\mu],$$
$$T(\lambda, \mu) = \mu^4[27p^2\lambda^2 + 12bl\lambda\mu - 4(ab^2 - 6alp^2 + 2l^3)\,\mu^2],$$
$$R(\lambda, \mu) = -\mu^8[729p^4\lambda^4 + 8(81lp^2 + 8b^2)\,b\lambda^3\mu + P^{(3)}(\lambda, \mu)].$$

Отсюда видим, что тождества $S(\lambda, \mu) \equiv 0$ и $T(\lambda, \mu) \equiv 0$ не могут одновременно иметь место. Кроме того, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$). При $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $S(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, $T(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, $R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$, то $N \leqq 1$, $N_0 \leqq 4 - N$, $N_\infty \leqq 2 - N$, $N_{-1} = 1 - N$, $N' = \infty$;

2. если $S(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $b = 0$, $p \neq 0$ и $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $N \leqq 2$ значениях λ/μ, а при остальных значениях λ/μ будет $I(\lambda, \mu) = -1$;

3. если $T(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $p = 0$, $l = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$ и $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\lambda = 0$ (тогда $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$), а при $\lambda \neq 0$ будет $I(\lambda, \mu) = \infty$.

4. если $R(\lambda, \mu) \equiv 0$, то $b = 0$, $p = 0$, $l \neq 0$ и при всех значениях λ/μ имеем $I(\lambda, \mu) = 0$, причем $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (a \neq 0) \\ 0 & (a = 0) \end{cases}$.

При $\mathfrak{B}_{133} = 0$, если $\mathfrak{B}_{123}$ и $\mathfrak{B}_{223}$ неравны одновременно нулю, получаем канонические пучки

$$(a'\lambda + a\mu)\, x_1^3 + 3\lambda x_1^2 x_2 + 3\mu(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3) \tag{3.8}$$

(где $a \neq 0$ либо $a = a' = 0$),

$$3\lambda x_1^2 x_2 + \mu(x_1^3 + 3x_2^2 x_3), \tag{3.9}$$

$$3\lambda x_1^2 x_2 + \mu(a x_1^3 + b x_2^3 + 6 x_1 x_2 x_3), \tag{3.10}$$

обладающие характеристикой [2].

Для пучка (3.8) имеем

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = -8\mu^6.$$

Следовательно, $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$) и $I(\lambda, \mu) = 0$ при $\mu \neq 0$, причем, если $a \neq 0$, то

$$r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 2 & (\text{при одном } (a' = \pm 3i) \text{ или при двух } (a' \neq \pm 3i) \text{ значениях } \lambda/\mu) \\ 4 & (\text{при остальных значениях } \lambda/\mu) \end{cases}$$

и если $a = a' = 0$, то

$$r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 4 & (\lambda \neq 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}.$$

Для пучка (3.9) $I(\lambda, \mu) \equiv 0/0$, причем

$$r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0) \\ 2 & (\mu = 0) \end{cases}, \qquad r_{C(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0) \\ 1 & (\mu = 0) \end{cases}.$$

Для пучка (3.10) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = 8\mu^6,$$

а потому $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 2$, $r_{C(\lambda,\mu)} = 1$) и $I(\lambda, \mu) = 0$ при $\mu \neq 0$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = 4$).

Если при $\mathfrak{B}_{133} = 0$ также $\mathfrak{B}_{123} = 0$, $\mathfrak{B}_{223} = 0$, то приходим к каноническим пучкам

$$\lambda(3x_1 x_2^2 + b x_2^3) + \mu(x_1^3 + 3x_2^2 x_3), \tag{3.11}$$

$$3\lambda x_1 x_2^2 + 3\mu(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3), \tag{3.12}$$

имеющим характеристику [3]

Для пучков (3.11), (3.12) $I(\lambda, \mu) = 0/0$, причем $r(\lambda, \mu) = \begin{cases} 3 & (\mu \neq 0) \\ 2 & (\mu = 0) \end{cases}$, но $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 5 & (\mu \neq 0) \\ 1 & (\mu = 0) \end{cases}$ для пучка (3.11) и $r_{C(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 & (\mu \neq 0) \\ 1 & (\mu = 0) \end{cases}$ для пучка (3.12).

§ 4. Случай III, когда $F = x_1^3$

Здесь различаем четыре варианта в зависимости от того, будет ли матрица

$$\mathfrak{B}_0 = \left\| \begin{array}{cc|cc} \mathfrak{B}_{222} & \mathfrak{B}_{223} & \mathfrak{B}_{223} & \mathfrak{B}_{233} \\ \mathfrak{B}_{223} & \mathfrak{B}_{233} & \mathfrak{B}_{233} & \mathfrak{B}_{333} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to (i) \\ \to (k) \\ \downarrow (j) \end{array},$$

входящая в состав матрицы $\mathfrak{B}$, нулевой или приводящейся к одному из канонических видов

$$(\alpha) \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \qquad (\beta) \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \qquad (\gamma) \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Вариант 1. $\mathfrak{B}_0 = 0$.

Если при этом $\mathfrak{B}_{133} \neq 0$, то получаем канонический пучок

$$3\lambda(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3) + \mu x_2^3 \tag{4.1}$$

с характеристикой [(21)].

Для этого пучка $I(\lambda, \mu) = 0/0$, причем, если $\lambda = 0$, то $r(\lambda, \mu) = 1$, а если $\lambda \neq 0$, то $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 4$.

При $\mathfrak{B}_{133} = 0$ имеем канонический пучок

$$\lambda x_1^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 \tag{4.2}$$

с характеристикой [(11)].

Для пучка (4.2) находим

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = 8\mu^6,$$

а потому при $\mu = 0$ имеем $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$); если же $\mu \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0$, причем $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 2 & (\lambda \neq 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$.

Вариант 2. $\mathfrak{B}_0$ приводится к каноническому виду (α). Тогда приходим к каноническим пучкам

$$\lambda x_1^3 + \mu(3h x_1^2 x_2 + 3x_1 x_3^2 + x_2^3), \tag{4.3}$$

$$\lambda x_1^3 + \mu(x_2^3 + 3k x_1^2 x_3 + 6x_1 x_2 x_3), \tag{4.4}$$

обладающим характеристикой [(11)], и к каноническому пучку

$$\lambda(x_1^3 + 3x_2^2x_3) + \mu x_2^3 \tag{4.5}$$

с характеристикой [(21)].

Для пучка (4.3) находим

$$S(\lambda, \mu) = -4h\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = -4\lambda\mu^5.$$

Следовательно, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$). Если же $\mu \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = -(4h^3\mu^2 + \lambda^2)/\lambda^2$. Тогда, если $h \neq 0$, то $I(\lambda, \mu) = \infty$ при $\lambda = 0$ и $I(\lambda, \mu) = 0$ при $\lambda = \pm 2\sqrt{-h^3\mu}$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4$); при остальных значениях λ, μ имеем $I_A(\lambda, \mu)$. Если же $h = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\lambda = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 5$) и $I(\lambda, \mu) = -1$ при $\lambda \neq 0$.

Для пучка (4.4) получаем

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = 8\mu^6.$$

Поэтому $I(\lambda, \mu) = 0/0$ при $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$) и $I(\lambda, \mu) = 0$ при $\mu \neq 0$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4$ если $\lambda \neq (k^2/8)\mu$ и $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 2$ если $\lambda = (k^2/8)\mu$).

Для пучка (4.5) $I(\lambda, \mu) = 0/0$, при этом $r(\lambda, \mu) = 3$, $r_{C(\lambda, \mu)} = 5$, если $\lambda \neq 0$ и $r(\lambda, \mu) = 1$, если $\lambda = 0$.

Вариант 3. $\mathfrak{P}_0$ приводится к каноническому виду (β). Тогда получаем канонические пучки

$$\lambda x_1^3 + 3\mu(hx_1^2x_2 + kx_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3), \tag{4.6}$$

$$\lambda x_1^3 + 3\mu(hx_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3), \tag{4.7}$$

имеющие характеристику [(11)].

Для пучка (4.6) находим

$$S(\lambda, \mu) = -4\mu^3(\lambda - k^2\mu), \qquad T(\lambda, \mu) = \mu^5[12k\lambda + (27h^2 - 8k^3)\mu],$$

$$R(\lambda, \mu) = -\mu^9[64\lambda^3 - 48k^2\lambda^2\mu + 648h^2k\lambda\mu^2 - 27h^2(16k^3 - 27h^2)\mu^3].$$

Следовательно, если $\mu = 0$, то $J(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$). При $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $27h^2 + 4k^3 \neq 0$, то $N = 0$, $N_0 = \begin{cases} 3 \ (h \neq 0), \text{ тогда } r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4 \\ 2 \ (h = 0), \text{ тогда } r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = \begin{cases} 4 \ (\lambda = \frac{3}{4}k^2\mu). \\ 2 \ (\lambda = 0) \end{cases} \end{cases}$

$$N_\infty = \begin{cases} 1 \ (k \neq 0) \\ 0 \ (k = 0 \end{cases}, \qquad N_{-1} = 1, \qquad N' = \infty;$$

2. если $27h^2 + 4k^3 = 0$, но h и k не равны одновременно нулю, то $N = 1$ (тогда $r_{C(\lambda, \mu)} = 5$), $N_0 = 1$ (тогда $r_{\mathfrak{C}(\lambda, \mu)} = 4$), $N_\infty = 0$, $N_{-1} = 0$, $N' = \infty$; если

же $h = k = 0$, то $N = 1$ (тогда $r_{C(\lambda,\mu)} = 4$), $N_0 = 0$, $N_\infty = \infty$, $N_{-1} = 0$, $N' = 0$.

Для пучка (4.7) имеем

$$S(\lambda, \mu) = 4\mu^4, \qquad T(\lambda, \mu) = -8\mu^6,$$

а потому $I(\lambda, \mu) = 0/0$, если $\mu = 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$) и $I(\lambda, \mu) = 0$, если $\mu \neq 0$ $\left(\text{тогда } r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 4 \ (\lambda \neq \pm 3ih\mu) \\ 2 \ (\lambda = \pm 3ih\mu) \end{cases} \text{ при } h \neq 0 \text{ и } r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 4 \ (\lambda \neq 0) \\ 0 \ (\lambda = 0) \end{cases} \text{ при } h = 0\right)$.

Вариант 4. $\mathfrak{B}_0$ приводится к каноническому виду (γ). Тогда имеем канонический пучок

$$\lambda x_1^3 + \mu(3hx_1^2x_2 + 3kx_1^2x_3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3) \tag{4.8}$$

(где h, k, m не могут одновременно равняться нулю) с характеристикой [(11)].

Для этого пучка находим

$$S(\lambda, \mu) = -4\mu^3[m\lambda - (m^4 + hk)\mu],$$

$$T(\lambda, \mu) = -\mu^4[\lambda^2 - 20m^3\lambda\mu + 4(h^3 + k^3 + 9hkm^2 - 2m^6)\mu^2],$$

$$R(\lambda, \mu) = -\mu^8(\lambda^4 + P^{(4)}(\lambda, \mu)).$$

Следовательно, если $\mu = 0$, то $I(\lambda, \mu) = 0/0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 1$). При $\mu \neq 0$ (тогда $r(\lambda, \mu) = 3$) имеем:

1. если $m \neq 0$ и $h = k = 0$, то $N = 0$. $N_0 = 2$ причем
$$r_{\mathfrak{C}(\lambda,\mu)} = \begin{cases} 4 \ (\lambda = 0) \\ 0 \ (\lambda = -8m^3\mu), \end{cases} \quad N_\infty = 2,\ N_{-1} = 1,\ N' = \infty;$$

2. если $m \neq 0$ и h, k не равны одновременно нулю, то
$N \leqq 1$, $N_0 \leqq 4 - N$, $N_\infty \leqq 2 - N$, $N_{-1} = 1 - N$, $N' = \infty$;

3. если $m = 0$, $h \neq 0$, $k \neq 0$, то $N = 0$, $N_0 \leqq 4$, $N_\infty \leqq 2$, $N_{-1} = 0$, $N' = \infty$;

4. если $m = 0, h = 0, k \neq 0$ или $m = 0, h \neq 0, k = 0$, то $N = 2$ (тогда $r_{C(\lambda,\mu)} = 5$), $N_0 = 0$, $N_\infty = 0$, $N_{-1} = \infty$, $N' = 0$.

§ 5. Категории и типы пучков кубических тройничных форм над полем комплексных чисел

Как видно из предыдущих параграфов, положительная характеристика пучка (1.1), базисом которого являются линейно независимые формы, может быть одного из следующих девяти видов: [111], [(11) 1], [21], [(21)], [3], [2], [11], [(11)], [1].

Обьединяя в одну категорию регулярные пучки комплексных кубических

Таблица 1

Категории	Типы, представляемые каноническими пучками		Состав соответствующих пучков плоских линий 3-го порядка												
			A	E	H	D''	D''_n	D''_o	Δ	D'	D'_n	D'_0	T_3	T_2	T_1
I. [111]	(2.1),	$b \neq 0$		∞									3		
II. [(11) 1]	(2.1),	$b = 0$		∞									1		1
	(2.15),	$h = 0$									∞			1	1
III. [21]	(2.14),	$h = 0$, $b^2 + 4l^3 \neq 0$									∞		1	1	
		$h = 0$, $b^2 + 4l^3 = 0$									∞			2	
	(2.17)											∞	1	1	
	(3.6)											∞		2	
IV. [(21)]	(4.5)										∞				1
	(4.1)(2)											∞			1
V. [3]	(3.11)(3)										∞			1	
	(3.12)											∞		1	
VI. [2]	(2.13)(4)						∞		$\leqq 1$				1		
	(3.8)	$a \neq 0$, $a' \neq \pm 3i$					∞	2						1	
		$a \neq 0$, $a' = \pm 3i$					∞	1						1	
		$a = a' = 0$					∞		1					1	
	(3.10)						∞							1	
	(2.14),	$h \neq 0$, $b^2 + 4l^3 \neq 0$									∞	1	1		
		$h \neq 0$, $b^2 + 4l^3 = 0$									∞	1		1	
	(2.16)										∞		1		
	(3.9)(3)										∞			1	

(2) Пучок (4.1) — сизигетический.

(3) Двойная прямая тройки T_2 в пучке (3.11) и простая прямая тройки T_2 в пучке (3.9) касаются линий D'_n в двойной точке их. При $b = 0$ пучок (3.11) — сизигетический.

(4) При $h = k = p = 0$ и $m = 1$ пучок (2.13) — сизигетический.

Продолжение таблицы I

Категории	Типы, представляемые каноническими пучками		Состав соответствующих пучков плоских линий 3-го порядка												
			A	E	H	D''	D''_n	D_0	Δ	D'	D'_n	D'_0	T_3	T_2	T_1
VII. [11]	(2.2),	$b^2 - 4p^3 \neq 0,\ a \neq -4,\ \delta \neq 0$	∞		2		4						2		
		$b^2 - 4p^3 \neq 0,\ a \neq -4,\ \delta = 0$	∞		1		4						2		
		или $b^2 + 4p^3 \neq 0,\ a = -4,\ b \neq 0$	∞		1		2						1	1	
		или $b^2 + 4p^3 = 0,\ a \neq -4,\ b = 0$	∞				2						1	1	
		$b^2 - 4p^3 = 0,\ a = -4$					∞	1						2	
	(2.3),	$b^2 + 4p^3 \neq 0$	∞		1		2						2		
		$b^2 + 4p^3 = 0$	∞		1		1						1	1	
	(2.7)		∞										1	1	
	(2.8),	$b \neq 0$	∞				2						2		
		$b = 0$			∞								1	1	
	(2.5),	$b \neq 0$		∞							2	1	1		
		$b = 0$		∞							1	1	2		
	(2.4)	$b^2c + 4 \neq 0$		∞							2		2		
		$b^2c + 4 = 0$		∞							1		1	1(5)	
	(2.11)	$b \neq 0$		∞							1		2		
		$b = 0$		∞									1	1	
	(3.2)			∞							1		1	1(5)	
	(3.1)						∞							2	
	(2.9)	$b \neq 0$						∞	1				2		
		$b = 0$						∞					1	1	
	(3.4)								∞					2	

(5) Двойная прямая тройки T_2 в последнем из пучков (2.4) касается, а в пучке (3.2) не касается линии D'_n в двойной точке ее.

Продолжение таблицы I

Категории	Типы, представляемые каноническими пучками			Состав соответствующих пучков плоских линий 3-го порядка: A	E	H	D''	D''_n	D_0	Δ	D'	D'_n	D'_0	T_3	T_2	T_1
VIII. [(11)]	(4.6),	$27h^2+4k^3\neq 0$, $k\neq 0$,	$h\neq 0$	∞	1	1		3								1
			$h=0$	∞	1	1		1	1							1
			$k=0$, $h\neq 0$	∞	1			3								1
		$27h^2+4k^3=0$,	h, k не равны одновременно нулю	∞				1				1				1
			$h=k=0$			∞							1			1
	(4.8),	$m\neq 0$	$h=k=0$	∞	1	2		1		1						1
			h, k не равны одновременно нулю	∞	$1-N$	$\leqq 2-N$	$\leqq 4-N$				$N\leqq 1$					1
		$m=0$	$h\neq 0$, $k\neq 0$	∞		$\leqq 2$	$\leqq 4$									1
			$h=0$, $k\neq 0$ или $h\neq 0$, $k=0$		∞							2				1
	(4.3),	$h\neq 0$		∞		1		2								1
		$h=0$			∞							1				1
	(4.7),	$h\neq 0$						∞	2							1
		$h=0$						∞		1						1
	(4.4)							∞	1							1
	(4.2)[6]								∞	1						1
	(2.15),	$h\neq 0$										∞	1			1

[6] Пучок (4.2) — сизигетический.

Продолжение таблицы I

Категории		Типы, представляемые каноническими пучками	Состав соответствующих пучков плоских линий 3-го порядка: A	E	H	D''	D''_n	D''_0	Δ	D'	D'_n	D'_0	T_3	T_2	T_1
IX. [1]	(2.6)		∞	$\leq 2\text{-}N$	$\leq 4\text{-}N$	$\leq 8\text{-}N$				$N \leq 2$			1		
	(2.10).	$T(\lambda, \mu) \not\equiv 0,\ R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$	∞	$\leqq 2\text{-}N$	$\leqq 3\text{-}N$	$\leqq 6\text{-}N$				$N \leqq 2$			1		
		$T(\lambda, \mu) \equiv 0$			∞					$\leqq 2$			1		
		$R(\lambda, \mu) \equiv 0$				∞				1			1		
	(2.12),	$S(\lambda, \mu) \not\equiv 0$	∞	$1 - N$	$\leqq 3\text{-}N$	$\leqq 6\text{-}N$				$N \leqq 1$			1		
		$S(\lambda, \mu) \equiv 0$		∞						$\leqq 3$			1		
	(3.5),	$R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$	∞	$\leqq 2\text{-}N$	$\leqq 3\text{-}N$	$\leqq 5\text{-}N$				$N \leqq 2$				1	
		$R(\lambda, \mu) \equiv 0$				∞				1				1(7)	
	(3.3),	$S(\lambda, \mu) \not\equiv 0,\ T(\lambda, \mu) \not\equiv 0,\ R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$	∞	$2 - N$	$\leqq 3\text{-}N$	$\leqq 6\text{-}N$				$N \leqq 2$				1	
		$S(\lambda, \mu) \equiv 0$		∞						$\leqq 3$				1	
		$T(\lambda, \mu) \equiv 0$			∞					$\leqq 2$				1	
		$R(\lambda, \mu) \equiv 0$				∞				1				1(7)	
	(3.7).	$S(\lambda, \mu) \not\equiv 0,\ T(\lambda, \mu) \not\equiv 0,\ R(\lambda, \mu) \not\equiv 0$	∞	$1 - N$	$\leqq 2\text{-}N$	$\leqq 4\text{-}N$				$N \leqq 1$				1	
		$S(\lambda, \mu) \equiv 0$		∞						$\leqq 2$				1	
		$T(\lambda, \mu) \equiv 0$			∞						1			1	
		$R(\lambda, \mu) \equiv 0,\ a \neq 0$						∞						1	
		$R(\lambda, \mu) \equiv 0,\ a = 0$							∞					1	

(7) Все линии с двойными точками в последнем из пучков (3.5) проходят, а в последнем из пучков (3.3) не проходят через тройную точку тройки T_2.

тройничных форм, имеющие одну и ту же характеристику, находим девять категорий([8]) такого рода пучков.

Вместе с тем, в зависимости от значений других инвариантов, эти категории могут быть подразделены на типы, число которых равно 74.

Результаты такой классификации и их геометрическая интерпретация приведены в таблице 1, где введены следующие обозначения для плоских линий 3-го порядка:

A — ангармонические линии,

E — эквиангармонические линии,

H — гармонические линии,

D'' — линии с двойными точками, у которых касательные в двойной точке различны
- D''_n — нераспадающиеся линии с двойной точкой,
- D''_0 — совокупности конического сечения и пересекающей его прямой,
- I — тройки прямых, не пересекающихся в одной точке,

D' — линии с двойной точкой, у которых касательные в двойной точке совпадают
- D'_n — нераспадающиеся линии с двойной точкой,
- D'_0 — совокупности конического сечения и касательной к нему прямой.

T_3 — тройки различных прямых, пересекающихся в одной точке,

T_2 — тройки прямых, из которых две совпадают,

T_1 — тройки совпадающих прямых.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколов Н. П., *Пространственные матрицы и их приложения* Физматгиз, М. 1960.

[2] Соколов Н. П., *О пучках вещественных кубических тройничных форм*, Известия АН СССР, сер. матем., 19 (1955), 201—232.

Поступило 10. XII. 1962 г.

Технологический институт, Киев

([8]) Характеристика [(111)] исключена.

CLASSIFICATION PROJÉCTIVE DES FAISCEAUX DES FORMES CUBIQUES TERNAIRES À CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

Nikolai P. Sokoloff

Résumé

Ce travail donne la classification projéctive des faisceaux réguliers des formes cubiques ternaires complexes à caractéristique positive arbitraire. Comme interprétation géometrique des résultats obtenus on donne la classification projéctive des faisceaux des courbes planes de troisième ordre dans le domaine complexe.