Matematický časopis

Ivo Rosenberg

Die transitive Hülle des lexikographischen Produktes

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 2, 92--107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126702

Matematický časopis 17 (1967), No. 2

DIE TRANSITIVE HÜLLE DES LEXIKOGRAPHISCHEN PRODUKTES

IVO ROSENBERG, Brno

M. M. Day studierte in [2] allgemein die Eigenschaften der Relation $\sqsubseteq$ der transitiven Hülle des lexikographischen Produktes auf dem cartesischen Produkt G. In dieser Arbeit stellen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $a \sqsubseteq b$ $(a, b \in G)$ fest.

§ 1

1.1 Definition. *Es sei H eine nichtleere teilweise geordnete Menge, $\{G_x \mid x \in H\}$ ein System von nichtleeren, teilweise geordneten Mengen* (die Ordnungsrelationen in H und in G_x bezeichnen wir mit $\leqslant$). *Unter dem lexikographischen Produkt verstehen wir das cartesische Produkt $G = \prod_{x \in H} G_x$ mit der Relation $\preceq$, die wir folgendermassen definieren: $f \preceq g$ gerade dann, wenn für jedes $x \in H$ gilt: $f(x) \neq$ $\neq g(x) \Rightarrow$ existiert ein $y \in H$ derart, dass $y \leqslant x$ und*

$$f(y) < g(y). \tag{1}$$

Die Relationen $\succeq$, $\prec$, $\prec$, $\npreceq$, $\nsucceq$, $\nprec$, $\nsucc$ werden analog wie die Relationen $\geqslant$, $<$, $>$, $\nleqslant$, $\ngeqslant$, $\nless$, $\ngtr$ definiert (z. B.: $f \succ g$ bedeutet $f \preceq g, f \neq g$).

1.2 Satz. *Es sei $H_1 = \{x \in H \mid \text{card } G_x > 1\}$ und $\preceq_1$ die Relation des lexikographischen Produktes auf $G_1 = \prod_{x \in H_1} G_x$. Für $f \in G$ bezeichnen wir mit f_1 die auf H reduzierte Funktion f* (d. h. $f_1 \in G_1$, $f_1(x) = f(x)$ für jedes $x \in H_1$). *Dann gilt:*

$$f_1 \preceq_1 g_1 \Leftrightarrow f \preceq g. \tag{2}$$

Beweis. 1) $\Rightarrow$. Es seien $f, g \in G$, $x \in H$ und $f(x) \neq g(x)$. Dann ist card $G_x > 1$, $x \in H_1$ und $f_1(x) = f(x) \neq g(x) = g_1(x)$. Da $f_1 \nprec_1 g_1$ ist, so existiert $y \in H_1$, $y \leqslant x$ derart, dass $f_1(y) < g_1(y)$. Es existiert also $y \in H_1 \subseteq H$, $y \leqslant x$ so, dass $f(y) = f_1(y) < g_1(y) = g(y)$. Es gilt (1) und daher ist $f \preceq g$.

2) $\Leftarrow$. Es seien $f_1, g_1 \in G_1$, $x \in H_1$ und $f_1(x) \neq g_1(x)$. Dann ist $f(x) = f_1(x) \neq$ $\neq g_1(x) = g(x)$ und aus $f \preceq g$ ergibt sich, dass ein $y \in H$, $y \leqslant x$ existiert, derart dass $f(y) < g(y)$. Offenbar ist card $G_y > 1$ und daher ist $y \in H_1$. Es existiert also $y \in H_1$, $y \leqslant x$ so, dass $f_1(y) = f(y) < g(y) = g_1(y)$, d. h. es gilt (1) und $f_1 \preceq_1 g_1$.

1.3 Bemerkung. Auf Grund des Satzes 1.2 beschränken wir uns im Weiteren auf den Fall, dass $H = H_1$, d. h. auf den Fall, dass für jedes $x \in H$ stets card $G_x > 1$ ist.

1.4 Bemerkung. M. M. Day hat in [2] folgende Behauptung bewiesen: $(G, \preceq)$ ist eine teilweise geordnete Menge gerade dann, wenn $H_2 = \{x \in H \mid G_x$ ist keine Gegenkette$\}$ der Minimalbedingung genügt (d. h. wenn jede Kette $c_0 \geqslant c_1 \geqslant \ldots$ in H_2 endlich ist).

Ferner werden wir uns mit dem Fall befassen, dass H_2 die Mimimalbedingung nicht erfüllt. Aus [2] ergibt sich, dass dann $\preceq$ keine transitive Relation ist.

1.5 Definition. *Die transitive Hülle der Relation $\preceq$ auf G bezeichnen wir mit $\sqsubseteq$.*

Für Ableitung der notwendigen und genügenden Bedingungen für $f \sqsubseteq g$ müssen wir einige Begriffe und Hilfsbehauptungen einführen.

1.6 Definition. *Es sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, $x \in M$. Wir schreiben $I_x = \{y \in M \mid y \leqslant x\}$. Eine Menge $Z \subseteq M$ nennt man Anfang in M, wenn gilt: $x \in Z$, $y \in M$, $y \leqslant x \Rightarrow y \in Z$. Eine Menge $K \subseteq M$ nennt man Ende in M, wenn gilt: $x \in K$, $y \in M$, $y \geqslant x \Rightarrow y \in K$. Es sei $A \subseteq M$. Die Menge $B =$ $= \{x \in M \mid$ es existiert ein $y \in A$, $y \leqslant x\}$ nennt man das durch A in M erzeugte Ende.*

1.7 Definition. *Es sei $Z \subseteq H$ und $h \in G$. Wir bezeichnen mit $[Z]_h$, bzw. $[Z]^h$ die Menge aller solcher $x \in H$, dass für jedes $z \in I_x \setminus Z$ stets $h(z)$ ein minimales, bzw. maximales Element in G_z ist.*

1.8 Hilfssatz. *Es sei Z ein Anfang in H und $h \in G$. Dann sind $[Z]_h$ und $[Z]^h$ Anfänge in H und $Z \subseteq [Z]_h$, $Z \subseteq [Z]^h$.*

Sind U, V Anfänge in H und $U \subseteq V$, dann gilt $[U]_h \subseteq [V]_h$ und $[U]^h \subseteq$ $\subseteq [V]^h$.

Beweis. Die ersten Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus 1.7. Es seien U, V Anfänge in H, $U \subseteq V$ und es sei $h \in G$. Es sei $x \in [U]_h$. Für jedes $z \in I_x \setminus U$ ist dann $h(z)$ ein minimales Element von G_z. Da $I_x \setminus V \subseteq$ $\subseteq I_x \setminus U$ ist, so ist auch $h(t)$ ein minimales Element von G_t für jedes $t \in$ $\in I_x \setminus V$. Es ist also $x \in [V]_h$ und daher ist $[U]_h \subseteq [V]_h$. Analog lässt sich beweisen, dass $[U]^h \subseteq [V]^h$.

1.9 Definition. *Es seien f, $g \in G$, $f \sqsubseteq g$. Wir bezeichnen mit R^{fg} den maximalen Anfang in H derart, dass für eine beliebige natürliche Zahl n und für jedes $r \in R^{fg}$ folgendes gilt:*

(3) $$f \precsim h_1 \precsim \ldots \precsim h_{n-1} \precsim g \Rightarrow f(r) = h_1(r) = \ldots = h_{n-1}(r) = g(r)$$

1.10 Bemerkung. Die mengentheoretische Vereinigung eines beliebigen Systems von Anfängen $Z \subseteq H$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \geqslant 1$ und beliebige $r \in Z$ stets (3) gilt, ist offenbar wieder ein Anfang mit der erwähnten Eigenschaft.

Damit ist die Existenz eines derartigen maximalen Anfangs R^{fg} garantiert (allerdings kann eventuell $R^{fg} = \emptyset$ sein).

Nach (3) gilt $f(r) = g(r)$ für jedes $r \in R^{fg}$.

§ 2

2.1 Hilfssatz. *Es sei f, $g \in G$, $f \sqsubseteq g$ und Z sei ein Anfang in R^{fg}. Dann sind $[Z]^f$ und $[Z]_g$ Anfänge in R^{fg}.*

Beweis. Es sei n eine natürliche Zahl und $f = h_0 \precsim h_1 \precsim \ldots \precsim h_n = g$. Durch Induktion beweisen wir folgende Behauptung V_k ($k = 0, 1, \ldots, n$): für jedes $z \in [Z]^f$ ist $h_0(z) = h_1(z) = \ldots = h_k(z)$.

1) V_0 gilt offenbar.

2) Es gelte V_k ($0 \leqslant k < n$). Indirekt beweisen wir, dass V_{k+1} gilt. Setzen wir voraus, dass ein $x \in [Z]^f$ existiert, derart, dass $h_k(x) \neq h_{k+1}(x)$. Nach der Voraussetzung ist $h_k \precsim h_{k+1}$ und nach 1.1 existiert ein $y \leqslant x$ so, dass $h_k(y) < h_{k+1}(y)$. $[Z]^f$ ist nach 1.8 ein Anfang in H und so ist $y \in [Z]^f$. Da $Z \subseteq R^{fg}$ ist, so ist nach der Definition 1.9 $y \notin Z$. Es ist also $y \in [Z]^f \setminus Z$ und nach der Definition 1.7 für $y \in I_x \setminus Z$ ist $f(y)$ notwendig ein maximales Element von G_y. Nach der induktiven Voraussetzung ist $f(y) = h_0(y) = h_1(y) = \ldots = h_k(y)$ und daher ist $h_k(y) = f(y)$ ein maximales Element von G_y. Das ergibt aber einen Widerspruch mit $h_k(y) < h_{k+1}(y)$. Es gilt also V_{k+1} und damit ist der Beweis durch Induktion erbracht.

Der Beweis der Behauptung $[Z]_g \leqslant R^{fg}$ ist ähnlich (durch Induktion beweisen wir die Behauptung $V_k (k = 0,1, \ldots, n)$: Für jedes $z \in [Z]_g$ ist $h_{n-k}(z) = h_{n-k+1}(z) = \ldots = h_n(z)$).

2.2 Hilfssatz. *Es mögen die Voraussetzungen von 2.1 gelten. Dann ist*

(4) $$[Z]_g \subseteq [Z]_f \text{ und } [Z]^f \subseteq [Z]^g.$$

Beweis: Es sei $x \in [Z]_g$ und $z \in I_x \setminus Z$. Nach 1.7 ist dann $g(z)$ ein minimales Element von G_z. Da $[Z]_g$ ein Anfang in R^{fg} (2.1) ist, so ist $z \in [Z]_g \subseteq R^{fg}$

und daher ist nach 1.10: $f(z) = g(z)$. Es ist also $f(z)$ ein minimales Element von G_z. Wir haben so festgestellt, dass $x \in [Z]_f$ (1.7) und daher $[Z]_g \subseteq [Z]_f$. Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

2.3 Definition. *Es sei $V \subseteq H$. Wir bezeichnen mit $\langle V \rangle$ die Menge aller $x \in H$ solcher Art, dass $I_x \setminus V$ der Minimalbedingung genügt.*

Beispiel. Es sei C die Menge aller realen Zahlen mit natürlicher Ordnung. Setzen wir $H = C$ und $V = (-\infty, 0)$. Dann ist $\langle V \rangle = (-\infty, 0\rangle$.

2.4 Hilfssatz. *Es sei V ein Anfang in H. Dann ist $\langle V \rangle$ ein Anfang in H und $V \subseteq \langle V \rangle$. Wenn $x \in H$ ist und I_x der Minimalbedingung genügt, dann ist $I_x \subseteq \langle V \rangle$.*

Sind U, $V \subseteq H$ und $U \subseteq V$, dann ist $\langle U \rangle \subseteq \langle V \rangle$.

Beweis. Es genügt die letzte Behauptung zu beweisen, die übrigen ergeben sich direkt aus 2.3. Es sei $x \in \langle U \rangle$. Dann genügt $I_x \setminus U$ der Minimalbedingung und um so eher erfüllt $I_x \setminus V \subseteq I_x \setminus U$ die Minimalbedingung. Es ist also $x \in \langle V \rangle$ und $\langle U \rangle \subseteq \langle V \rangle$.

2.5 Definition. *Es sei $V \subseteq H$ und f, $g \in G$. Wir bezeichnen mit $\langle V \rangle^{fg}$ die Menge aller $x \in \langle V \rangle$* (2.3) *solcher Art, dass für jedes $y \in I_x \setminus V$ stets $f(y) = g(y)$ ist.*

2.6 Hilfssatz. *Es sei V ein Anfang in H und f, $g \in G$. Dann ist $V \subseteq \langle V \rangle^{fg} \subseteq \langle V \rangle$. $\langle V \rangle^{fg}$ ist ein maximales Element im System aller Anfänge A mit der Eigenschaft, dass* 1) *$V \subseteq A \subseteq \langle V \rangle$,* 2) *dass für jedes $y \in A \setminus V$ stets $f(y) = g(y)$ ist.*

Wenn U, $V \subseteq H$ sind und $U \subseteq V$ ist, dann ist $\langle U \rangle^{fg} \subseteq \langle V \rangle^{fg}$.

Beweis. Wir beweisen nur die letzte Behauptung. Es sei $x \in \langle U \rangle^{fg}$. Dann ist $x \in \langle U \rangle$ und für jedes $y \in I_x \setminus U$ gilt $f(y) = g(y)$. Nach 2.4 ist $x \in \langle U \rangle \subseteq \langle V \rangle$ und für jedes $y \in I_x \setminus V \subseteq I_x \setminus U$ gilt. $f(y) = g(y)$. Nach 2.5 ist $x \in \langle V \rangle^{fg}$ und $\langle U \rangle^{fg} \leqslant \langle V \rangle^{fg}$.

2.7 Hilfssatz. *Es sei f, $g \in G$, $f \sqsubseteq g$ und Z sei ein Anfang in R^{fg}. U sei ein Anfang in H solcher Art, dass $Z \subset U \subseteq \langle Z \rangle$ und es sei $V = U \setminus Z$. Dann ist die Relation $\preceq'$ des lexikographischen Produktes auf $G' = \prod_{x \in V} G_x$ eine Ordnungsrelation.*

Für jedes $h \in G$ bezeichnen wir mit h' die auf V reduzierte Funktion h (d. i. eine partielle Abbildung: $h' \in G$, $h'(x) = h(x)$ für jedes $x \in V$). *Dann gilt:*

$$f = h_0 \preceq h_1 \preceq \ldots \preceq h_n = g \quad \Rightarrow \quad h_0' \preceq' h_1' \preceq' \ldots \preceq' h_n'. \tag{5}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass V der Minimalbedingung genügt. Es sei B eine absteigende Kette in V und x_0 sein grösstes Element. Dann ist offenbar $B \subseteq I_{x_0} \cap V = I_{x_0} \cap (U \setminus Z) = I_{x_0} \setminus Z$. Da $x_0 \in V \subsetneq \langle Z \rangle$ genügt $I_{x_0} \setminus Z$ nach 2.3 der Minimalbedingung und also ist die Kette B eine endliche Kette.

Aus Days Satz (1.4) ergibt sich, das $\preceq'$ eine Ordnungsrelation auf G' ist.

Wir beweisen (5). Es sei $0 \leqslant i < n$, $x \in V$ und $h'_i(x) \neq h'_{i+1}(x)$. Dann ist offenbar $h_i(x) \neq h_{i+1}(x)$ und aus $h_i \preceq h_{i+1}$ ergibt sich, dass ein $y \in H$, $y \leqslant x$ solcher Art besteht, dass $h_i(y) < h_{i+1}(y)$. Da U ein Anfang ist, $x \in V \subseteq U$ und $y \leqslant x$ ist, so ist $y \in U$. Nach 1.9 ist $h_i(r) = h_{i+1}(r)$ für jedes $r \in Z \subseteq R^{fg}$ und daher bekommen wir aus $h_i(y) < h_{i+1}(y)$, dass $y \notin Z$ ist. Es ist also $y \in U \setminus Z$ und $h'_i(y) = h_i(y) < h_{i+1}(y) = h'_{i+1}(y)$. Damit haben wir bewiesen, dass $h'_i \preceq' h'_{i+1}$, d. h. es gilt (5).

2.8 Hilfssatz. *Es sei $f, g \in G$ und $f \sqsubseteq g$. Wenn Z ein Anfang in R^{fg} ist, dann ist auch $\langle Z \rangle^{fg}$ ein Anfang in R^{fg}.*

Beweis. n sei eine natürliche Zahl und $f = h_0 \preceq h_1 \preceq \ldots \preceq h_n = g$ seien Elemente von G. Bezeichnen wir $V = \langle Z \rangle^{fg} \setminus Z$. Ist $V = \emptyset$, dann ist $\langle Z \rangle^{fg} = Z \subseteq R^{fg}$ (2.6) und die Behauptung gilt.

Es sei also $V \neq \emptyset$. Wie in 2.7 möge h'_i die auf V reduzierten Funktionen h_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) bezeichnen, und $\preceq'$ möge die Relation des lexikographischen Produktes auf $G' = \prod_{x \in V} G_x$ bedeuten. Nach 2.7 ist $h'_0 \preceq' h'_1 \preceq' \ldots \preceq' h'_n$. Da $V = \langle Z \rangle^{fg} \setminus Z$, ist nach 2.6 2) $f(y) = g(y)$ für jedes $y \in V$ und daher ist $h'_0 = h'_n$. Nach 2.7 ist $\preceq'$ eine Ordnungsrelation und so ergibt sich aus $h'_0 \preceq' h'_1 \preceq' \ldots \preceq' h'_n$ und $h'_0 = h'_n$ stets $h'_0 = h'_1 = \ldots = h'_n$. So haben wir festgestellt, dass $h_0(x) = h_1(x) = \ldots = h_n(x)$ für jedes $x \in V$ ist. Nach der Definition R^{fg} gilt $h_0(x) = h_1(x) = \ldots = h_n(x)$ auch für jedes $x \in Z \leqslant R^{fg}$ und also ist $h_0(x) = h_1(x) = \ldots = h_n(x)$ für jedes $x \in \langle Z \rangle^{fg}$. Nach 1.9 ist damit der Hilfssatz bewiesen.

2.9 Definition. *Es sei α die kleinste Ordnungszahl derart, dass in H keine durch Inklusion wohlgeordnete Kette des Typs α von untereinander verschiedenen Mengen existiert. Es seien $f, g \in G$. Transfinit definieren wir die Mengen P^{fg}_ξ ($\xi < \alpha$) wie folgt:*

1) $P^{fg}_0 = \emptyset$.

2) *Wenn $\nu < \alpha$ und wir bereits P^{fg}_ξ für alle $\xi < \nu$ zusammengestellt haben, dann setzen wir*

a) $P^{fg}_\nu = \langle [P^{fg}_{\nu-1}]^f \cup [P^{fg}_{\nu-1}]_g \rangle^{fg}$ (1.7 und 2.5), *wenn ν eine isolierte Ordnungszahl ist;*

b) $P^{fg}_\nu = \bigcup_{\xi < \nu} P^{fg}_\xi$, *wenn ν eine Limeszahl ist.*

Schliesslich setzen wir $Q^{fg} = \bigcup_{\xi < \alpha} P^{fg}_\xi$.

2.10 Beispiel. Es sei $H = C$ (Beispiel 2.3) und $G_x = \langle 0,1 \rangle$ für jedes $x \in H$. Es sei $f(x) = g(x) = 0$ für $x < 1$, $f(1) = g(1) = \frac{1}{2}$, $f(x) = g(x) = 1$ für $1 < x < 2, f(2) = g(2) = \frac{1}{3}$ und $f(x) = g(x) = 0$ für jedes irrationale $x > 2$, $f(x) = g(x) = 1$ für jedes rationale $x > 2$.

Dann ist $P_0^{fg} = \emptyset$, $[\emptyset]^f = \emptyset$, $[\emptyset]_g = (-\infty, 1)$, $P_1^{fg} = (-\infty, 1\rangle$, $[(-\infty, 1\rangle]^f = (-\infty, 2)$, $[(-\infty, 1\rangle]_g = (-\infty, 1\rangle$, $P_2^{fg} = (-\infty, 2\rangle$ und $Q^{fg} = (-\infty, 2\rangle$.

2.11 Hilfssatz. *Es seien $f, g \in G$. Dann ist für jedes $\xi < \alpha$ stets P_ξ^{fg} ein Anfang Wenn $f \sqsubseteq g$, dann ist $P_\xi^{fg} \subseteq R^{fg}$ für jedes $\xi < \alpha$.*

Beweis. Beide Behauptungen beweisen wir durch transfinite Induktion.
1) $P_0^{fg} = \emptyset$ und die Behauptungen gelten offenbar.
2) Es sei $\nu < \alpha$ und die Behauptungen mögen für jedes $\xi < \nu$ gelten.

a) Es sei ν isoliert. Nach der induktiven Voraussetzung ist $P_{\nu-1}^{fg}$ ein Anfang. Nach 1.8 sind dann $[P_{\nu-1}^{fg}]^f$ und $[P_{\nu-1}^{fg}]_g$ Anfänge und daher ist $Z = [P_{\nu-1}^{fg}]^f \cup [P_{\nu-1}^{fg}]_g$ ein Anfang. Nach 2.6 ist $P_\nu^{fg} = \langle Z \rangle^{fg}$ ebenfalls ein Anfang.

Es sei $f \sqsubseteq g$. Nach der induktiven Voraussetzung ist $P_{\nu-1}^{fg} \subseteq R^{fg}$. Nach 2.1 ist dann $[P_{\nu-1}^{fg}]^f \subseteq R^{fg}$ und $[P_{\nu-1}^{fg}]_g \subseteq R^{fg}$ und daher ist Z ein Anfang in R^{fg}. Nach 2.8 ist dann $P_\nu^{fg} = \langle Z \rangle^{fg} \subseteq R^{fg}$.

b) Es sei ν eine Limeszahl. Dann ist $P_\nu^{fg} = \bigcup_{\xi<\nu} P_\xi^{fg}$ eine mengentheoretische Vereinigung von Anfängen und daher ein Anfang. Im Falle $f \sqsubseteq g$ ist P_ν^{fg} eine mengentheoretische Vereinigung von Teilmengen aus R^{fg} und daher ist $P_\nu^{fg} \subseteq R^{fg}$.

Damit ist der Beweis durch transfinite Induktion abgeschlossen. Aus 2.9 und 2.11 ergibt sich:

2.12 Hilfssatz. *Es seien $f, g \in G$. Dann ist Q^{fg} ein Anfang. Wenn $f \sqsubseteq g$, dann ist $Q^{fg} \subseteq R^{fg}$.*

2.13 Hilfssatz. *Es seien $f, g \in G$. Dann ist $[Q^{fg}]_g = [Q^{fg}]^f = \langle Q^{fg} \rangle^{fg} = Q^{fg}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\{P_\xi^{fg} \mid \xi < \alpha\}$ ein durch Inklusion linear geordnetes Mengensystem ist. Nach 1.8 ist $P_\xi^{fg} \subseteq [P_\xi^{fg}]^f$ und $P_\xi^{fg} \subseteq [P^{fg}]_g$ für jedes $\xi < \alpha$. Also ist $P_\xi^{fg} \subseteq Z = [P_\xi^{fg}]^f \cup [P_\xi^{fg}]_g$. Nach 2.6 ist $P_\xi^{fg} \subseteq Z \subseteq \langle Z \rangle^{fg} = P_{\xi+1}^{fg}$. Ist $\nu < \alpha$ eine Limeszahl, dann ist $P_\mu^{fg} \leqslant P_\nu^{fg}$ für jedes $\mu < \nu$. Es ist also $\{P_\xi^{fg} \mid \xi < \alpha\}$ eine durch Inklusion wohlgeordnete Kette der Teilmengen von H.

Es existiert ein $\lambda < \alpha$ derart, dass $P_{\lambda+1}^{fg} = P_\lambda^{fg}$. Wenn das nicht der Fall wäre, so wäre $\{P_\xi^{fg} \mid \xi < \alpha\}$ eine durch Inklusion wohlgeordnete Kette des Typs α von untereinander verschiedenen Teilmengen von H, was im Widerspruch zur Wahl von α steht. Aus $P_{\lambda+1}^{fg} = P_\lambda^{fg}$ ergibt sich

$$[P_\lambda^{fg}]^f = [P_\lambda^{fg}]_g = \langle P_\lambda^{fg} \rangle^{fg} = P_\lambda^{fg} \tag{6}$$

Aus $P^{fg}_{\lambda+1} = P^{fg}_{\lambda}$ ergibt sich sofort $P^{fg}_{\xi} = P^{fg}_{\lambda}$ für jedes $\lambda \leqslant \xi < \alpha$. Nach der Definition von Q^{fg}, in Anbetracht der Monotonie des Systems $\{P^{fg}_{\xi} \mid \xi < < \alpha\}$ ist $Q^{fg} = P^{fg}_{\lambda}$ und daher gilt nach (6) die Behauptung des Hilfssatzes.

2.14 Definition. *Es seien f, $g \in G$. Wir bezeichnen mit $A^{fg} = \langle Q^{fg} \rangle \setminus Q^{fg}$, mit B^{fg} das durch A^{fg} in H erzeugte Ende und setzen $T^{fg} = H \setminus (Q^{fg} \cup B^{fg})$.*

Im Falle dass $A^{fg} \neq \emptyset$, bezeichnen wir mit h^* die auf A^{fg} reduzierte Funktion $h \in G$ und mit $\preceq^*$ die Relation des lexikographischen Produktes auf $G^* = \prod_{x \in A^{fg}} G_x$.

Die Mengen Q^{fg}, A^{fg}, B^{fg}, T^{fg} sind auf Bild 1 veranschaulicht.

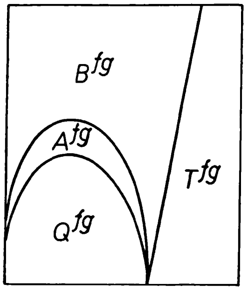

Bild 1.

2.15 Satz. *Es seien f, $g \in G$. Ist $f \sqsubseteq g$, dann gilt:*

$$x \in Q^{fg} \Rightarrow f(x) = g(x), \tag{7}$$

$$A^{fg} \neq \emptyset \Rightarrow f^* \preceq^* g^*. \tag{8}$$

Beweis. Nach 2.12 ist $Q^{fg} \subseteq R^{fg}$ und daher gilt nach 1.10 stets (7). Es sei $A^{fg} = \langle Q^{fg} \rangle \setminus Q^{fg} \neq \emptyset$. Da $f \sqsubseteq g$, existiert eine ganze Zahl $n \geqslant 0$ und $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1} \in G$ derart, dass $f = h_0 \preceq h_1 \preceq \ldots \preceq h_n = g$. Setzen wir $U = \langle Q^{fg} \rangle$, $V = U \setminus Q^{fg}$. Da Q^{fg} ein Anfang in R^{fg} ist, so sind die Voraussetzungen von 2.7 erfüllt und es ist $f^* = = h_0^* \preceq^* h_1^* \preceq^* \ldots \preceq^* h_n^* = g^*$. Nach 2.7 ist $\preceq^*$ eine Ordnungsrelation und daher ist $f^* \preceq g^*$, d. h. es gilt (8).

§ 3

In diesem Paragraph zeigen wir, dass die Bedingungen (7) und (8) aus 2.15 auch hinreichende Bedingungen für $f \sqsubseteq g$ sind.

3.1 Definition. *Es sei P eine teilweise geordnete Menge, $S \subseteq P$. Wir sagen, dass P koinitial mit S ist, wenn zu jedem $x \in P$ ein $y \in S$ existiert, derart, dass $y \leqslant x$.*

Wir werden den nachstehenden Hilfssatz, der eine direkte Folgerung des Hilfssatzes 1.9 aus [2] ist, brauchen.

3.2 Hilfssatz. *P sei eine teilweise geordnete Menge ohne minimale Elemente. Dann existieren zwei disjunkte Mengen, R, $S \subseteq P$ derrart, dass P koinitial mit R und mit S ist.*

Offenbar gelten folgende Hilfssätze:

3.3 Hilfssatz. *Es sei $T = X_1 \cup X_2$ eine teilweise geordnete Menge. X_i sei koinitial mit $O_i \subseteq X_i$ $(i = 1, 2)$. Dann ist T koinitial mit $O_1 \cup O_2$.*

3.4 Hilfssatz. *W sei eine teilweise geordnete Menge und $U \subseteq V \subseteq W$. Wenn W koinitial mit V und V koinitial mit U ist, dann ist W koinitial mit U.*

In den Hilfssätzen 3.5 — 3.9 werden wir voraussetzen, dass $f, g \in G$ sind. Anstatt Q^{fg}, A^{fg}, B^{fg}, T^{fg} werden wir bloss Q, A, B, T schreiben.

3.5 Hilfssatz. *Für $x \in T$ gilt $I_x \setminus Q = I_x \cap T$.*

Beweis. Es sei $x \in T$. Dann ist $x \notin B$ und in Anbetracht dessen, dass B ein Ende in H ist, so ist $I_x \cap B = \emptyset$. Daraus ergibt sich $I_x \setminus Q = I_x \setminus (Q \cup B) = = I_x \cap (H \setminus (Q \cup B) = I_x \cap T$.

3.6 Hilfssatz. *T hat keine minimalen Elemente.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass ein minimales Element x der Menge T existiert. Dann ist $I_x \cap T = \{x\}$ und nach 3.5 ist $I_x \setminus Q = I_x \cap T = \{x\}$. $I_x \setminus Q$ genügt also der Minimalbedingung (siehe 1.4) und daher ist nach 2.3 $x \in \langle Q \rangle$. Gleichzeitig ist $x \notin Q$ und daher ist $x \in \langle Q \rangle \setminus Q = A \subseteq B$ (2.14). Das ist jedoch ein Widerspruch mit $x \in T = H \setminus (B \cup Q)$.

3.7 Hilfssatz. *Zu jedem $x \in B$ existiert ein $z \in A$ derart, dass $z \leqslant x$ und $f(z) \neq \neq g(z)$.*

Beweis. Es sei $x \in B$. Nach der Definition von B existiert ein $a \in A$, $a \leqslant x$. Setzen wir voraus, dass $f(y) = g(y)$ für jedes $y \in I_a \setminus Q$ ist. Nach 2.5 und in Anbetracht dessen, dass $a \in A = \langle Q \rangle \setminus Q$, ist dann $a \in \langle Q \rangle^{fg}$. Aber nach 2.13 ist $\langle Q \rangle^{fg} = Q$, d. h. $a \in Q$. Das ist jedoch ein Widerspruch mit der Tatsache, dass $a \in A = \langle Q \rangle \setminus Q$ nicht in Q gehört. Also existiert ein $z \in A = \langle Q \rangle \setminus Q$, $z \leqslant a \leqslant x$ derart, dass $f(z) \neq g(z)$.

3.8 Hilfssatz. *In T existieren zwei disjunkte Mengen R und S mit der Eigenschaft, dass T koinitial mit R und mit S ist und dass $g(r)$ für kein $r \in R$ ein minimales Element von G und dass $f(s)$ für kein $s \in S$ ein minimales Element von G ist.*

Beweis. Setzen wir:

(9) $$K_{00} = \{x \in T \mid f(x) \text{ ist kein maximales Element von } G_x,\ g(x) \text{ ist kein minimales Element von } G_x\},$$

(10) $$K_{01} = \{x \in T \mid f(x) \text{ ist kein maximales Element von } G_x,\ g(x) \text{ ist ein minimales Element von } G_x\},$$

(11) $$K_{10} = \{x \in T \mid f(x) \text{ ist ein maximales Element von } G_x,\ g(x) \text{ ist kein minimales Element von } G_x\},$$

(12) $$K_{11} = \{x \in T \mid f(x) \text{ ist ein maximales Element von } G_x,\ g(x) \text{ ist ein minimales Element von } G_x\}.$$

In Anbetracht der Definitionen (9) — (12) bildet $\{K_{00}, K_{01}, K_{10}, K_{11}\}$ eine Zerlegung auf T, d. h. K_{00}, K_{01}, K_{10}, K_{11} sind untereinander disjunkt und $K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11} = T$. Bezeichnen wir mit U das durch K_{00} erzeugte

Ende, mit V die Menge der minimalen Elemente von K_{00}, mit W das durch V erzeugte Ende V. Weiter setzen wir: $X_1 = U \setminus W$ und $Y_1 = K_{00} \setminus W$ (die Situation ist auf Bild 2 veranschaulicht).

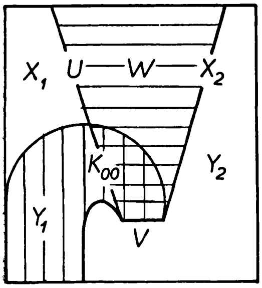

Bild 2.

Zuerst zeigen wir, dass $Y_1 = K_{00} \setminus W$ keine minimalen Elemente hat. Es sei $y \in Y_1$. Dann ist $y \notin W$ und umso eher ist $y \notin V$. Also ist y kein minimales Element von K_{00} und daher existiert ein $k \in K_{00}, k < y$, $k \notin W$, denn W ist ein Ende und aus $k \in W$ würde sich $y \in W$ ergeben. Also ist $k \in K_{00} \setminus W = Y_1$ und y ist kein minimales Element.

Die Menge Y_1 erfüllt also die Voraussetzung von 3.2. Nach 3.2 existieren zwei disjunkte Mengen $R_1 \subseteq Y_1$ und $S_1 \subseteq Y_1$ derart, dass Y_1 koinitial mit R_1 und mit S_1 ist. Es lässt sich leicht ableiten, dass X_1 koinitial mit Y_1 ist: Es sei $x \in X_1 = U \setminus W$. Da $x \in U$ ist und U das durch K_{00} erzeugte Ende ist, existiert $l \in K$, $l < x$. Da $x \notin W$ ist und W ein Ende ist, ist auch $l \notin W$, d. h. $l \in K_{00} \setminus W = Y_1$. X_1 ist also koinitial mit Y_1. Y_1 ist koinitial mit R_1 und S_1 und daher ist nach 3.4 auch X_1 koinitial mit R_1 und S_1. Dabei ist nach (9) $g(r)$ kein minimales Element von G_r für $r \in R_1 \subseteq Y_1 \subseteq K_{00}$ und $g(s)$ ist kein minimales Element von G_S für $s \in S_1 \subseteq Y_1 \subseteq K_{00}$.

Setzen wir $Y_2 = T \setminus U$. Zuerst zeigen wir, dass Y_2 ein Anfang in T ist. Es seien $y \in Y_2$, $t \in T$, $t < y$. U ist ein Ende in T und daher ergibt sich $t \notin U$ aus $y \notin U$. Es ist also $t \in T \setminus U = Y_2$ und daher ist Y_2 ein Anfang in T. Danach und nach 3.5 gilt für jedes $x \in Y_2$:

$$I_x \setminus Q = I_x \cap T = I_x \cap Y_2 \tag{13}$$

Y_2 ist disjunkt mit U und ist also auch disjunkt mit $K_{00} \subseteq U$. $\{K_{00}, K_{01}, K_{10}, K_{11}\}$ bilden eine Zerlegung auf T und daher ist $Y_2 \subseteq K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11}$. Wir beweisen nun indirekt, dass Y_2 koinitial mit $R_2 = Y_2 \cap K_{10}$ ist. Setzen wir voraus, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert ein $x \in Y_2$ derart, dass $I_x \cap R_2 = I_x \cap Y_2 \cap K_{10} = \emptyset$. Da $Y_2 \subseteq K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11}$, ist $I_x \cap Y_2 \subseteq K_{01} \cup K_{11}$. Nach (13) gilt $y \in K_{01} \cup K_{11}$ für jedes $y \in I_x \setminus Q$ und daher ist nach (10) und (12) $g(y)$ ein minimales Element von G_y. Nach 1.7 ist also $x \in [Q]_g$. Aber nach 2.13 ist $[Q]_g = Q$ und daher ist $x \in Q$. Dabei ist $x \in Y_2 \subseteq T = H \setminus (Q \cup B)$, was ein Widerspruch mit $x \in Q$ ist. Also ist Y_2 koinitial mit R_2.

Ähnlich zeigen wir, dass Y_2 koinitial mit $S_2 = Y_2 \cap K_{01}$ ist. Setzen wir voraus, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert ein $x \in Y_2$ derart, dass $I_x \cap S_2 = I_x \cap Y_2 \cap K_{01} = \emptyset$. Da $Y_2 \subseteq K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11}$ ist, so ist $I_x \cap Y_2 \subseteq K_{10} \cup K_{11}$. Nach (13) ist also $y \in I_x \cap Y_2 \subseteq K_{10} \cup K_{11}$ für jedes

$y \in I_x \setminus Q$, d. h. nach (11) und (12) ist $f(y)$ ein maximales Element von G_y. Nach 1.7 ist daher $x \in [Q]^f = Q$ (2.13), was ein Widerspruch mit $x \in Y_2 \subseteq T = H \setminus (Q \cup B)$ ist. Daher ist Y_2 koinitial mit S_2.

Nach (11) ist $g(r)$ kein maximales Element von G_r für $r \in R_2 \subseteq K_{10}$ und nach (10) ist $f(s)$ kein maximales Element von G_s für $s \in S_2 \subseteq K_{01}$. Setzen wir $X_2 = W \cup Y_2$. Wir zeigen, dass X_2 koinitial mit Y_2 ist. Es sei $w \in W$. Nach der Definition von W existiert ein $v \in V$ derart, dass $v \leqslant w$ ist. Nach 3.5 hat T keine minimalen Elemente und daher existiert zu $v \in T$ ein $t \in T$, $t < v$. Nach der Definition von V ist v ein minimales Element von K_{00}, daher gehört $t < v$ nicht in das durch K_{00} erzeugte Ende U. Also ist $t \in T \setminus U = Y_2$ und X_2 ist koinitial mit Y_2. Nach 3.4 ist weiter X_2 koinitial mit R_2 und mit S_2. Zu Beginn des Beweises haben wir festgestellt, dass X_1 koinitial mit R_1 und mit S_1 ist. Nach der Definition von X_1 und X_2 ist dabei $X_1 \cup X_2 = (U \setminus W) \cup W \cup Y_2 = U \cup Y_2 = U \cup (T \setminus U) = T$. Nach 3.3 ist also T koinitial mit $R = R_1 \cup R_2$ und mit $S = S_1 \cup S_2$. Wir zeigen, dass R und S disjunkt sind. Nach der Konstruktion sind R_1 und S_1 disjunkte Mengen und R_2, S_2 disjunkte Mengen. Weiter ist $R_1 \subseteq K_{00}$ disjunkt mit $S_2 \subseteq K_{01}$ und $R_2 \subseteq K_{10}$ disjunkt mit $S_1 \subseteq K_{00}$. Wie wir oben gezeigt haben, ist $g(r)$ kein minimales Element von G_r für $r \in R$ und $f(s)$ ist kein maximales Element von G_s für $s \in S$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

3.9 Hilfssatz. *Es gelte* (7) *und* (8) *aus* 2.15. *Dann existiert ein* $h \in G$ *mit der Eigenschaft*:

1) $f \preceq h \preceq g$,

2) $x \in H \setminus Q \Rightarrow$ *existiert* $y \leqslant x$ *derart, dass* $f(y) = h(y) = g(y)$ *nicht gilt.*

Beweis. R, S seien Mengen aus 3.8. Wir definieren $h \in G$ wie folgt: Für $x \in Q \cup B$ setzen wir $h(x) = f(x)$. Für $r \in R$ bzw. $s \in S$ wählen wir ein beliebiges Element $a_r \in G_r$, $a_r < g(r)$ bzw. $a_s \in G$, $a_s > f(s)$ und setzen $h(r) = a_r$ bzw. $h(s) = a_s$ und für $x \in T \setminus (R \cup S)$ wählen wir für $h(x)$ ein beliebiges Element von G_x.

Wir zeigen zuerst, dass $f \preceq h$ ist. Es sei $x \in H$, $f(x) \neq h(x)$. Nach der Definition von h ist dann $x \notin Q \cup B$, d. h. $x \in T$. Nach 3.8 existiert ein $s \in S$ derart, dass $s \leqslant x$. Dann ist $f(s) < a_s = h(s)$ und daher ist $f \preceq h$.

Nun zeigen wir, dass $h \preceq g$. Es sei $x \in H$ und $h(x) \neq g(x)$. Da $h(y) = f(y) = g(y)$ für $y \in Q$ (nach (7) und der Definition von h), so ist $x \notin Q$. Es ist also entweder a) $x \in B$ oder b) $x \in T$.

a) Es sei $x \in B$. Nach 3.7 existiert ein $z \in A$, $z \leqq x$ so, dass $f(z) \neq g(z)$. Dann ist $f^*(z) = f(z) \neq g(z) = g^*(z)$ (2.14). Nach (8) ist $f^* \preceq^* g^*$ und daher existiert ein $a \in A$ derart, dass $a \leqslant z \leqslant x$ und $f(a) = f^*(a) < g^*(a) = g(a)$. Nach der Definition von h für $h \in A \subseteq B$ ist $h(a) = f(a) < g(a)$.

b) Es sei $x \in T$. Nach 3.8 existiert ein $r \in R$ derart, dass $r \leqslant x$. Nach der Definition von h ist $h(r) = a_r < g(r)$.

Damit haben wir bewiesen, dass $h \preceq g$. Es gilt also (1).

Schliesslich beweisen wir 2). Es sei $x \in H \setminus Q$. Ist $x \in T$, dann existiert nach 3.8 ein $r \in R$ derart, dass $r \leqslant x$. Nach der Definition von h ist dann $h(r) = a_r < g(r)$ und daher gilt $f(r) = h(r) = g(r)$ nicht. Es sei also $x \notin T$. Dann ist $x \in B$ und nach 3.7 existiert ein $z \in A$ derart, dass $z \leqslant x$ und $f(z) \neq g(z)$ ist. Für $z \in A \subseteq B$ ist $h(z) = f(z) \neq g(z)$ und daher gilt $f(z) = h(z) = g(z)$ nicht. Es gilt also 2) und damit ist der Beweis beendet.

3.10 Satz. *Es seien $f, g \in G$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(I) $f \sqsubseteq g$,

(II) (7) $x \in Q^{fg} \Rightarrow f(x) = g(x)$,

(8) $A^{fg} \neq \emptyset \Rightarrow f^* \preceq {}^*g^*$.

Beweis. (I) $\Rightarrow$ (II). 2.15

(II) $\Rightarrow$ (I). Nach 3.9 existiert ein $h \in G$ derart, dass $f \preceq h \preceq g$. Also ist $f \sqsubseteq g$.

3.11 Bemerkung. Aus 3.9 und 3.10 ergibt sich der Satz 5.5 aus [2]. Die Relation $\preceq$ ist 1-transitiv (d. h. zu jedem $f, g \in G$, $f \sqsubseteq g$ existiert ein $h \in G$ derart, dass $f \preceq h \preceq g$). Day hat die angeführte Behauptung auch für den Fall bewiesen, dass die Relationen auf G_x nur transitive Relationen sind.

3.12 Satz. *Es seien $f, g \in G$, $f \sqsubseteq g$. Dann ist $Q^{fg} = R^{fg}$.*

Beweis. Nach 2.12 ist $Q^{fg} \subseteq R^{fg}$. $f \sqsubseteq g$ und so gilt nach 3.10 stets (7) und (8). Nach 3.9 existiert ein $h \in G$ so, dass $f \preceq h \preceq g$ und zu jeden $x \in H \setminus Q^{fg}$ existiert ein $y \leqslant x$ derart, dass $f(y) = h(y) = g(y)$ nicht gilt. Nach 1.9 ist dann $y \notin R^{fg}$. Da R^{fg} ein Anfang ist, ist auch $x \notin R^{fg}$. Es gilt also $R^{fg} \subseteq Q^{fg}$ und $R^{fg} = Q^{fg}$.

§ 4

Die Menge G mit einer transitiven und reflexiven Relation ist eine quasigeordnete Menge. Natürlich fragen wir nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$.

4.1 Hilfsastz. *Es seien $f, g \in G, f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$ und es sei Z ein Anfang in $R^{fg} \cap R^{gf}$. Dann ist $[Z]_f = [Z]_g$ und $[Z]^f = [Z]^g$.*

Beweis. Ergibt sich aus der Inklusion (4) in 2.2.

4.2 Hilfssatz. *Es mögen die Voraussetzungen von 4.1 gelten. Dann ist $\langle Z \rangle^{fg} = \langle Z \rangle$.*

Beweis. Setzen wir $V = \langle Z \rangle \setminus Z$. Wenn $V = \emptyset$ ist, dann gilt die Behauptung offenbar. Es sei also $V \neq \emptyset$. Für jedes $h \in G$ bezeichnen wir mit h' ähnlich wie in 2.7 die auf V reduzierte Funktion h. Weiter bezeichnen wir mit $\preceq'$ die Relation des lexikographischen Produktes auf $G' = \prod_{x \in V} G_x$. Nach 2.7 (für $U = \langle Z \rangle$) ist $f' \preceq' g'$. Da sich die Rollen von f und g vertauschen lassen, ist aus demselben Grunde $g' \preceq' f'$. Nach 2.7 ist $\preceq'$ eine Ordnungsrelation und daher ergibt sich aus $f' \preceq' g' \preceq' f'$ stets $f' = g'$. Das bedeutet, dass für jedes $z \in V = \langle Z \rangle \setminus Z$ stets $f(z) = f'(z) = g'(z) = g(z)$ gilt. Nach 2.5 ist also $\langle Z \rangle^{fg} = \langle Z \rangle$.

4.3 Hilfssatz. *Es seien $f, g \in G$ und $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$. Dann ist*

$$Q^{ff} = Q^{fg} = Q^{gf} = Q^{gg}. \tag{14}$$

Beweis. Wird durch transfinite Induktion mit Hilfe von 4.1, 4.2 und 2.9 bewiesen.

4.4 Hilfssatz. *Es gelten die Voraussetzungen von 4.3. Dann gilt*

$$Q^{ff} = Q^{gg}; \quad x \in Q^{ff} \Rightarrow f(x) = g(x). \tag{15}$$

Beweis. Nach (14) ist $Q^{ff} = Q^{gg}$. Nach 3.10 ergibt sich aus $f \sqsubseteq g$, dass $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in Q^{fg} = Q^{ff}$ (4.3).

Nun leiten wir ab, dass die Bedingung (15) auch eine hinreichende Bedingung für $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$ ist.

Aus der Definition 2.5 ist zu ersehen, dass folgendes gilt:

4.5 Hilfssatz. *Z sei ein Anfang in H und $f \in G$. Dann ist $\langle Z \rangle^{ff} = \langle Z \rangle$.*

4.6 Hilfssatz. *Für f, $g \in G$ gelte* (15). *Dann ist für jeden Anfang $Z \subseteq Q^{ff}$ stets $[Z]_g \subseteq [Z]_f$.*

Beweis. $Z \subseteq Q^{ff} = Q^{gg}$ und daher ist nach 1.8 und 2.13 $[Z]_g \subseteq [Q^{gg}]_g = Q^{gg}$. Es sei $x \in [Z]_g$. Da Q_{gg} ein Anfang ist (2.12), ist $I_x \subseteq Q^{gg}$ und umso eher $I_x \setminus Z \subseteq Q^{gg}$. Nach 1.7 ist $g(z)$ ein minimales Element von G_z für jedes $z \in I_x \setminus Z$. Nach (15) ist $f(z) = g(z)$ für jedes $z \in I_x \setminus Z \subseteq Q^{gg}$ und daher ist ebenfalls $f(z)$ ein minimales Element von G_z. Nach der Definition 1.7 ist also $x \in [Z]_f$. Damit ist bewiesen, dass $[Z]_g \subseteq [Z]_f$ ist.

4.7 Hilfssatz. *Für f, $g \in Q$ gelte* (15). *Dann ist $Q^{fg} \subseteq Q^{ff}$ und $A^{fg} = \emptyset$.*

Beweis. α und P_ξ^{fg} $(\nu < \alpha)$ mögen die gleiche Bedeutung wie in 2.9 haben. Durch transfinite Induktion beweisen wir, dass $P_\nu^{fg} \subseteq P_\nu^{ff}$ für jedes $\nu < \alpha$.

1) $P_0^{fg} = \emptyset = P_0^{ff}$.

2) Es sei $0 < \nu < \alpha$ und die Behauptung gilt für jedes $\xi < \nu$.

a) ν sei eine isolierte Ordnungszahl. Nach der induktiven Voraussetzung ist $P_{\nu-1}^{fg} \subseteq P_{\nu-1}^{ff} \subseteq Q^{ff}$. Nach 1.8 ist $[P_{\nu-1}^{fg}]^f \subseteq [P_{\nu-1}^{ff}]^f$. Nach 4.6 und 1.8 ist $[P_{\nu-1}^{fg}]_g \subseteq [P_{\nu-1}^{fg}]_f \subseteq [P_{\nu-1}^{ff}]_f$. Nach 2.9, 2.6 und 4.5 ist schliesslich $P_\nu^{fg} = \langle [P_{\nu-1}^{fg}]^f \cup$

$\cup [P^{fg}_{\nu-1}]_g\rangle^{fg} \subseteq \langle[P^{ff}_{\nu-1}]^f \cup [P^{ff}_{\nu-1}]_f\rangle^{fg} \subseteq \langle[P^{ff}_{\nu-1}]^f \cup [P^{ff}_{\nu-1}]_f\rangle = \langle[P^{ff}_{\nu-1}]^f \cup$
$\cup [P^{ff}_{\nu-1}]_f\rangle^{ff} = P^{ff}_\nu$,

b) λ sei eine Limeszahl. Dann ist $P^{fg}_\nu = \bigcup_{\xi<\nu} P^{fg}_\xi \subseteq \bigcup_{\xi<\nu} P^{ff}_\xi = P^{ff}_\nu$.

Damit ist der Beweis durch transfinite Induktion abgeschlossen. Es gilt also $Q^{fg} = \bigcup_{\xi<\alpha} P^{fg}_\xi \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} P^{ff}_\nu = Q^{ff}$.

Wir beweisen, dass $A^{fg} = \emptyset$. Aus $Q^{fg} \subseteq Q^{ff}$, 2.6, 4.5 und 2.13 ergibt sich, dass $\langle Q^{fg}\rangle \leqq \langle Q^{ff}\rangle = \langle Q^{ff}\rangle^{ff} = Q^{ff}$. Nach (15) ist also für jedes $x \in \langle Q^{fg}\rangle$ stets $f(x) = g(x)$ und daher ist nach 2.5 $\langle Q^{fg}\rangle^{fg} = \langle Q^{fg}\rangle$. Nach 2.13 ist $Q^{fg} = \langle Q^{fg}\rangle^{fg} = \langle Q^{fg}\rangle$ und daher ist $A^{fg} = \langle Q^{fg}\rangle \setminus Q^{fg} = \emptyset$.

4.9 Satz. *Es seien $f, g \in G$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(A) $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$,
(B) $Q^{ff} = Q^{gg}$; $x \in Q^{ff} \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Beweis. (A) $\Rightarrow$ (B). 4.4.
(B) $\Rightarrow$ (A). Nach 4.7 ist $Q^{fg} \subseteq Q^{ff}$. Daher ist $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in Q^{fg}$. Ebenfalls nach 4.7 ist $A^{fg} = \emptyset$ und es gilt also (II) aus 3.10. Nach 3.10 gilt (I) $f \sqsubseteq g$. Die Rollen von f und g können wir austauschen und aus demselben Grunde gilt auch $g \sqsubseteq f$. Also gilt (A).

Nun zeigen wir die Bedingungen, unter denen $\sqsubseteq$ eine universale Relation ist (d. h. $f \sqsubseteq g$ für jedes $f, g \in G$).

4.10 Satz. *Es seien $f, g \in G$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*
(i) *$\sqsubseteq$ ist eine universale Relation,*
(ii) *$Q^{ff} = \emptyset$ für jedes $f \in G$,*
(iii) a) *H hat keine minimalen Elemente,*
b) *es existiert kein nichtleerer Anfang von Z in H derart, dass G_x wenigstens ein maximales Element für jedes $x \in Z$ hat und es existiert auch kein nichtleerer Anfang Z in H derart, dass G_x wenigstens ein minimales Element für jedes $x \in Z$ hat.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $f \in G$. Für jedes $x \in H$ wählen wir $g(x) \in G_x$ so, dass $g(x) \neq f(x)$ (1.3). Für ein so definiertes $g \in G$ gilt nach (i) stets $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$, d. h. es gilt die Behauptung (A) aus 4.9. Nach 4.9 gilt (B). Für jedes $x \in H$ ist $f(x) \neq g(x)$ und daher ist notwendig $Q^{ff} = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Es sei $f \in G$. Nach 2.4 gehört jedes minimale Element $x \in H$ in $\langle\emptyset\rangle = \langle\emptyset\rangle^{ff}$ (4.5) und gehört daher in Q^{ff}. Da $Q^{ff} = \emptyset$, hat H keine minimalen Elemente.

Z sei ein Anfang in H solcher Art, dass G_x für jedes $x \in Z$ ein maximales Element hat. Für jedes $x \in Z$ setzen wir $g(x)$ gleich irgendeinem maximalen Element von G_x und für $x \in H \setminus Z$ wählen wir für $g(x)$ ein beliebiges Element von G_x. Nach 1.7 ist $Z \subseteq [\emptyset]^g$ und daher ist $Z \subseteq Q^{gg} = \emptyset$. Also ist $Z = \emptyset$.

Analog lässt sich beweisen, dass jeder Anfang von Z mit der Eigenschaft: „$x \in Z \Rightarrow G_x$ hat ein minimales Element", leer ist. Es gilt also (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $f \in G$. Nach 1.7 sind $[\emptyset]^f$ bzw. $[\emptyset]_f$ Anfänge in H derart, dass für jedes $x \in [\emptyset]^f$ stets $f(x)$ ein maximales, bzw. minimales Element von G_x ist. Nach (iii) ist daher $[\emptyset]^f = [\emptyset]_f = \emptyset$. H hat keine minimalen Elemente und daher genügt I_x der Minimalbedingung für kein $x \in H$. Es ist also $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ und $P_1^{ff} = \langle[\emptyset]^f \cup [\emptyset]_f\rangle^{ff} = \langle\emptyset \cup \emptyset\rangle = \langle\emptyset\rangle = \emptyset = P_0^{ff}$. Daraus ergibt sich, dass $P_\xi^{ff} = \emptyset$ für jedes $\xi < \alpha$ und also $Q^{ff} = \emptyset$. Es gilt also (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Offenbar ist (B) aus 4.9 für jedes f, $g \in G$ erfüllt und daher gilt nach 4.9 (A) $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$, d. h. $\sqsubseteq$ ist eine universale Relation.

4.11 Beispiel. C sei die Menge aller realen Zahlen mit natürlicher Ordnung. Es sei $H = C$ und $G_x = C$ für jedes $x \in C$. Dann ist die Relation $\sqsubseteq$ eine universale Relation.

§ 5

G mit der Relation $\sqsubseteq$ ist ein quasigeordnete Menge. Auf G kann man in üblicher Weise die Äquivalenzrelation definieren:

5.1 Definition. *Auf G definieren wir die Äquivalenzrelation $\equiv$ wie folgt:*

(16) $$f \equiv g \Rightarrow f \sqsubseteq g \sqsubseteq f.$$

Die Bedingungen für $f \sqsubseteq g$ gibt der Satz 4.9.

Offenbar gilt:

5.2 Bemerkung. $\tilde{G}$ sei eine Teilmenge von G derart, dass $\tilde{G}$ aus jeder Klasse untereinander äquivalenter Elemente von G gerade ein Element enthält. (d. h. $\tilde{G}$ ist ein System von Klassenrepräsentanten). Dann ist $\tilde{G}$ mit der Relation $\sqsubseteq$ eine teilweise geordnete Menge.

5.3 Bemerkung. $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ seien zwei Systeme von Klassenrepräsentanten der Äquivalenzrelation $\equiv$ auf G. Dann sind $(\tilde{G}_1, \sqsubseteq)$ und $(\tilde{G}_2, \sqsubseteq)$ isomorphe, teilweise geordnete Mengen.

5.4 Bemerkung. 5.2 und 5.3 zeigen, dass es möglich ist, mit Hilfe der Relation der transitiven Hülle des lexikographischen Produktes eine teilweise geordnete Teilmenge von G zusammenzustellen. Ähnlich wie im Falle der Kardinalpotenz handelt es sich nicht um die teilweise Ordnung von G, sondern nur um die teilweise Ordnung irgendeiner Teilmenge von G.

Im Spezialfall lässt sich die Konstruktion von $\tilde{G}$ einfacher beschreiben.

5.5 Satz. *Es möge ein $h \in G$ mit folgender Eigenschaft (*) existieren: Zu jedem Ende $K \subseteq H$ ohne minimale Elemente und zu einem beliebigen $k \in K$ existieren*

$r, s \in K, r \leqslant k, s \leqslant k$ so, dass $h(r)$ kein maximales Element von G_r und $h(s)$ kein minimales Element von G_s ist. Zu jedem $f \in G$ reihen wir das folgendermassen definierte $g = \varphi(f)$ zu:

(17) $$g(x) = f(x) \text{ für } x \in Q^{ff}, \; g(x) = h(x) \text{ für } x \in H \backslash Q^{ff}.$$

Dann ist die Menge $\tilde{G} = \varphi^1(G)$ ein System von Klassenrepräsentanten der Äquivalenzrelation $\equiv$ auf G und $(\tilde{G}, \sqsubseteq)$ ist eine teilweise geordnete Menge.

Beweis. Es sei $f \in G$ und $g = \varphi(f)$. Wir beweisen, dass $Q^{ff} = Q^{gg}$. Bezeichnen wir $K = H \backslash Q^{ff}$. Nach 4.7 (für $f = g$) ist $A^{ff} = \emptyset$ und daher ist $B^{ff} = \emptyset$ und $T^{ff} = H \backslash (B^{ff} \cup Q^{ff}) = H \backslash Q^{ff} = K$. Nach 3.6 hat K keine minimalen Elemente. Da Q^{ff} ein Anfang ist (2.12), ist offenbar K ein Ende ohne minimale Elemente.

Z sei ein Anfang in Q^{ff}. Wir beweisen, dass $[Z]_g \subseteq Q^{ff}$ und $[Z]^g \subseteq Q^{ff}$ ist. Wenn nämlich $k \in K = H \backslash Q^{ff}$, dann existieren nach (*) $r, s \in K$, $r \leqslant k$, $s \leqslant k$ derart, dass $g(r) = h(r)$ kein maximales Element von G_r und $h(s) = g(s)$ kein minimales Element von G_s ist. Das bedeutet aber nach 1.7, dass $k \notin [Z]_g$ und $k \notin [Z]^g$. Da für $x \in Q^{ff}$ stets $g(x) = f(x)$, bekommen wir

(18) $$[Z]_g = [Z]_f, \quad [Z]^g = [Z]^f.$$

Mit Hilfe von (18) beweisen wir durch transfinite Induktion, dass für jedes $\xi < \alpha$ stets $P^{gg}_\xi = P^{ff}_\xi$ ist.

1) $P^{gg}_0 = \emptyset = P^{ff}_0$.

2) Es sei $0 < \nu < \alpha$ und die Behauptung gelte für jedes $\xi < \nu$.

a) ν sei isoliert. Nach der Vorasussetzung $P^{gg}_{\nu-1} = P^{ff}_{\nu-1}$, (18), und 4.5 haben wir $P^{gg}_\nu = \langle [P^{gg}_{\nu-1}]_g \cup [P^{gg}_{\nu-1}]^g \rangle^{gg} = \langle [P^{ff}_{\nu-1}]_g \cup [P^{ff}_{\nu-1}]^g \rangle = \langle [P^{ff}_{\nu-1}]_f \cup [P^{ff}_{\nu-1}]^f \rangle^{ff} = P^{ff}_\nu$.

b) ν sei eine Limeszahl. Dann ist $P^{gg}_\nu = \bigcup_{\xi<\nu} P^{gg}_\xi \subseteq \bigcup_{\xi<\nu} P^{ff}_\xi = P^{ff}_\nu$.

Damit ist der Beweis durch transfinite Induktion beendet. Es gilt also $Q^{ff} = Q^{gg}$. Nach der Definition von g für $x \in Q^{ff}$ gilt $f(x) = g(x)$. Die Behauptung (B) aus 4.9 ist damit erfüllt und nach 4.9 gillt daher (A), d. h. $f \sqsubseteq g \sqsubseteq f$. Ist $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_1$, so ist nach 4.9 $f_1(x) = f_2(x)$ für jedes $x \in Q^{f_1 f_1} = Q^{f_2 f_2}$. Nach Definition ist dann $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, denn für $x \in H \backslash Q^{f1\,f1}$ ist $f_1(x) = h(x) = f_2(x)$. Damit ist der Satz bewiesen.

5.6 Bemerkung. Die Bedingung (*) kann man offenbar auch so formulieren: Setzen wir $U = \{x \in H \mid G_x$ enthält ein Element, das nicht minimal ist$\}$ und $V = \{x \in H \mid G_x$ enthält ein Element, das nicht maximal ist$\}$. Die Bedingung (*) gilt gerade dann, wenn jedes Ende K in H ohne minimale Elemente koinitial mit $K \cap U$ und mit $K \cap V$ ist.

Speziell gilt (*) dann, wenn jedes Ende K in H ohne minimale Elemente koinitial mit $K \cap U \cap V$ ist.

5.7 Beispiel. Es möge G_x für jedes $x \in H$ ein Element a_x enthalten, das weder minimal noch maximal ist. Setzen wir $h(x) = a_x$ für jedes $x \in H$. Offenbar erfüllt h die Bedingung (*). Wir definieren nach 5.5 für jedes $f \in G$ die Funktion $g = \varphi(f)$ so, dass wir für $x \in Q^{ff}$ stets $g(x) = f(x)$ setzen und für $x \in H \backslash Q$ setzen wir $g(x) = h(x)$. Nach 5.5 ist $G = \varphi^1(G)$ eine teilweise geordnete Menge.

5.8 Beispiel. H möge zwei disjunkte dichte Teilmengen U und V enthalten (d. h. für jedes x, $y \in H$, $x < y$ existieren u_1, $u_2 \in U$ und v_1, $v_2 \in V$ derart, dass $x \leqslant u_1 < u_2 \leqslant y$ und $x \leqslant v_1 < v_2 \leqslant y$). Für kein $x \in U \cup V$ sei G_x eine Gegenkette. Für jedes $x \in U \cup V$ wählen wir a_x, $b_x \in G$ so, dass $a_x < b_x$. Für jedes $x \in U$ setzen wir $h(x) = a_x$, für jedes $x \in V$ setzen wir $h(x) = b_x$ und für $x \in H \backslash (U \cup V)$ wählen wir als $h(x)$ ein beliebiges Element von G_x. Dann erfüllt h die Bedingung (*).

Speziell können wir, wenn $H = C$ (wobei C die Menge aller nach der Grösse geordneten realen Zahlen ist) und kein G_x eine Gegenkette bildet, als U die Menge aller rationalen Zahlen annehmen und als V die Menge aller irrationalen Zahlen.

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948.

[2] Day M. M., *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945), 1—43.

[3] Novák V., *On the lexicographic product of ordered sets*, Czechosl. Math. J. *15*(*90*) (1965), 270—282.

[4] Sekanina M., *On a pover of ordered sets*, Archivum Math. *1* (1965), 75—82.

[5] Szász G., *Einführung in die Verbandstheorie*, Teubner, Leipzig 1962.

Eingegangen am 2. 5. 1966.

Katedra matematiky
elektrotechnické fakulty
Vysokého učení technického
Brno