

Matematicko-fyzikálny časopis

K. K. Ponomarev

Матричный прием расчета колебаний стержевых систем

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 11 (1961), No. 3, 192--202

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126686>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

МАТРИЧНЫЙ ПРИЕМ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖЕВЫХ СИСТЕМ

К. К. ПОНОМАРЕВ, СССР, г. Москва

Расчету колебаний стержневых систем посвящались работы различных авторов [1], [2], [3], [5] и многих других. Из известных методов решения наибольшее распространение получил метод деформаций, напр. [6], [7], обладающий рядом несомненных преимуществ: простое выражение уравнений колебаний неразрезных балок с различной длиной пролета и переменной жесткостью, балок на упругих опорах, рамных систем с подвижными опорами и т. д.

В статье излагается матричный прием расчета колебаний стержневых систем особенно удобный при программировании задач этого класса на счетно-вычислительных машинах. При ручном способе вычисления метод наиболее эффективен при большом количестве пролетов различной длины, многократного изменения жесткости, необходимости варьирования исходных параметров и высокой степени статической неопределимости, так как в этих случаях достигается большая шаблонность расчета.

1. Как известно, уравнение свободных колебаний прямого стержня постоянного сечения

$$y^{(IV)} - \frac{\lambda^4}{l^4} y = 0,$$

где:

$$\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} \cdot l^4,$$

μ — масса балки,

ω — частота собственных колебаний,

l — длина пролета.

Решение этого уравнения совместно с первыми тремя производными образует систему, которая в матричной записи, проводя расчет слева направо:

$$\begin{array}{c}
 Y_k \\
 \varphi_k \\
 M_k \\
 Q_k
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 \psi_1 & -l\psi_2 & -\frac{l^2}{EI}\psi_3 & -\frac{l^3}{EI}\psi_4 \\
 -\frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 & \frac{l}{EI}\psi_2 & \frac{l^4}{EI}\psi_3 \\
 -\frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4 EI}{l}\psi_4 & \psi_1 & l\psi_2 \\
 -\frac{\lambda^4 EI}{l^3}\psi_2 & \frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 Y_0 \\
 \varphi_0 \\
 M_0 \\
 Q_0
 \end{array}
 \quad (1)$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\lambda}{l} x + \cos \frac{\lambda}{l} x \right); & \psi_2 &= \frac{1}{2\lambda} \left(\sinh \frac{\lambda}{l} x + \sin \frac{\lambda}{l} x \right) \\
 \psi_3 &= \frac{1}{2\lambda^2} \left(\cosh \frac{\lambda}{l} x - \cos \frac{\lambda}{l} x \right); & \psi_4 &= \frac{1}{2\lambda^3} \left(\sinh \frac{\lambda}{l} x - \sin \frac{\lambda}{l} x \right)
 \end{aligned}$$

функция Крылова,

y — прогиб,

φ — угол поворота,

M — изгибающий момент,

Q — поперечная сила.

Индексом „0“ обозначается начальное сечение стержня (один из концов), индексом „ k “ — любое промежуточное k -тое сечение.

При наличии жестких опор 0 и k (однопролетная защемленная, шарнирно-опертая или с одного конца защемленная, а с другого-шарнирно опертая балка) $Y_0 = Y_k = 0$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы (1), получаем выражение

$$Q_0 = \frac{-EI\psi_2\varphi_0 - l\psi_3M_0}{l^2\psi_4},$$

исключая которое из второго и третьего уравнений системы, имеем:

$$\begin{aligned}
 \{Y_k\} &\equiv \begin{bmatrix} \varphi_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_4}, & \frac{l}{EI} \left(\psi_2 - \frac{\psi_3^2}{\psi_4} \right) \\ \frac{EI}{l} \left(\lambda^4\psi_4 - \frac{\psi_2^2}{\psi_4} \right), & \psi_1 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \equiv \\
 &\equiv [L] \cdot \{Y_0\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Матрица пролета $[L]$ упрощается введением следующих функций Прагера:

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda = 2^2 \frac{\lambda^3}{3!} - 2^4 \frac{\lambda^7}{7!} + 2^6 \frac{\lambda^{11}}{11!} - \dots + \dots \\
 B(\lambda) &= 2 \sinh \lambda \sin \lambda = 2^2 \frac{\lambda^2}{2!} - 2^4 \frac{\lambda^6}{6!} + 2^6 \frac{\lambda^{10}}{10!} - \dots + \dots \\
 C(\lambda) &= \cosh \lambda \cos \lambda - 1 = -2^2 \frac{\lambda^4}{4!} + 2^4 \frac{\lambda^8}{8!} - 2^6 \frac{\lambda^{12}}{12!} + \dots - \dots
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

После элементарных алгебраических преобразований уравнений (2) матрица пролета принимает вид:

$$[L] = \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} A(\lambda), & -\frac{l}{\lambda EI} \cdot C(\lambda) \\ B(\lambda) \cdot \frac{\lambda EI}{l}, & A(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

причем функция

$$\sin \lambda - \sinh \lambda = -2 \left[\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^7}{7!} + \frac{\lambda^{11}}{11!} + \dots \right].$$

Уравнение (2) записывается тогда в нижеследующем виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[A(\lambda) \varphi_0 - \frac{l}{\lambda EI} C(\lambda) M_0 \right], \\
 M_1 &= \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[\frac{\lambda EI}{l} B(\lambda) \varphi_0 + A(\lambda) M_0 \right].
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

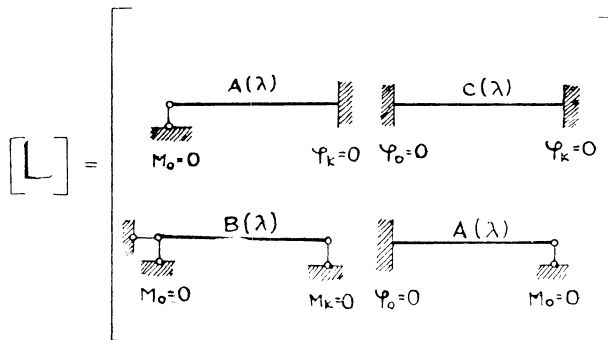


Рис. 1.

Матрица (4) содержит уравнения колебаний для четырех возможных комбинаций опирания (рис. 1). Необходимо только, согласно данным граничным условиям, вычеркнуть одну строку и один столбец, а оставшийся элемент приравнять нулю.

Тривиальную величину $\lambda = 0$, как не имеющую практического значения, исключаем из расстроения и, таким образом, знаменатель $\sin \lambda - \sinh \lambda$ никогда не равен нулю.

Корни функций А, В, С находятся по формулам приведенным в таблице 1.

Таблица 1

корни	Функция	$A(\lambda) = 0$	$B(\lambda) = 0$	$C(\lambda) = 0$
λ_1		3,9265	3,1416	4,7299
λ_2		7,0685	6,2832	7,8531
λ_3		10,2102	9,4248	10,9956
·		·	·	·
·		·	·	·
·		·	·	·
λ_n		$\approx \frac{1}{4} \pi + n\pi$	$n\pi$	$\approx \frac{1}{2} \pi + n\pi$

Напряженное и деформированное состояние в любом n -ом сечении колеблющейся балки выражается соотношением

$$\{Y_n\} = [L_n] \cdot [L_{n-1}] \cdot \dots \cdot [L_2] \cdot [L_1] \cdot \{Y_0\},$$

где $[L_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — матрица колебаний отдельных пролетов, или для случая равнопролетной балочной системы

$$\{Y_n\} = [L]^n \cdot \{Y_0\}. \quad (6)$$

Вводя новые функции $\hat{B} = (\lambda EI/l)(B/A)$, $\hat{C} = [l/(\lambda EI)](C/A)$, $\hat{B} \hat{C} = BC/A^2 = D$, равенство (4) примет вид

$$[L] = \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{C} \\ \hat{B}, & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

или

$$[L]^n = \frac{A^n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} \begin{bmatrix} T_n, & -\hat{C} S_n \\ \hat{B} S_n, & T_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где функции

$$\begin{aligned} T_n &= C_0^n - C_2^n D + C_4^n D^2 - \dots + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i}^n (-D)^i; \\ S_n &= C_1^n - C_3^n D + C_5^n D^2 - \dots + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i+1}^n (-D)^i; \end{aligned} \quad (8a)$$

здесь: $C_m^n = n!/[m!(n-m)!]$ — число сочетаний из n элементов по m .

Условия колебаний для различных граничных условий, согласно (8), будут:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \varphi_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad A^n \frac{T_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} &= 0; \\
 2. \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad -\hat{C} A^n \frac{S_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} &= 0; \\
 3. \quad M_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad \hat{B} A^n \frac{S_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} &= 0; \\
 4. \quad M_0 = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad A^n \frac{T_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} &= 0.
 \end{aligned} \tag{8б}$$

Как известно, реактивный момент при повороте опоры $M_n = -\mu \varphi_n$. Используя (8) образуем вспомогательное выражение

$$-\frac{M_n}{\varphi_n} = \bar{K}_n, \quad (\varphi_n \neq 0), \tag{9}$$

представляющее в простейшем случае характеристику приведенной упруго вращающейся опоры в точке n .

Для защемленной опоры $-\bar{K}_a^{(n)} = -T_n/(\hat{C}S_n)$ а для шарнирной $-\bar{K}_b^{(n)} = \hat{B}S_n/T_n$.

В частном случае однопролетной балки при $T_1 = S_1 = 1$:

$$-\bar{K}_a^{(1)} = -\frac{1}{\hat{C}} = -\frac{A\lambda}{C} \cdot \frac{EI}{l}; \quad -\bar{K}_b^{(1)} = \hat{B} = \frac{B\lambda}{A} \cdot \frac{EI}{l}.$$

Раскрывая эти неопределенные выражения (при $\lambda = 0$) с помощью правила Лопитала, после трехкратного дифференцирования, получаем

$$\bar{K}_a^{(1)} = -4 \frac{EI}{l}; \quad \bar{K}_b^{(1)} = -3 \frac{EI}{l}.$$

II. Рассмотрим колебания одноярусной рамы открытого контура (рис. 2).

Горизонтальный ригель рамы принимаем за основной стержень. Отсекаем все ответвления и заменяем их действие приведенными упругими опорами, сводя, таким образом, задачу к расчету колебаний неразрезной балки.

Так как между изгибающими моментами непосредственно левее и правее опоры условие сопряжения

$$M_i^{np} = M_i^{pr} = \mu_i \varphi_i,$$

то матрицу пролета необходимо слева умножить на матрицу перехода

$$[F_i] = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -\mu_i, & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

что дает: $\{Y_i\} = [F_i][L_i] \cdot \{Y_{i-1}\} = [L_i^*] \cdot \{Y_{i-1}^*\}$ или:

$$\{Y_{i-1}^*\} \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \{Y_{i-1}\}$$

$$[Y_i] = \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{C}_i, & 0 \\ \hat{B}_i, & 1, & \\ & & -\mu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} - \hat{C}_i M_{i-1} \\ \hat{B}_i \varphi_{i-1} + M_{i-1} - \mu_i \varphi_i \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{[L_i^*]} = \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \{Y_i\},$$

где $\varphi_i = \varphi_{i-1} - \hat{C}_i M_{i-1}$.

Такое перемножение возможно ввиду того, что третий элемент первой строки матрицы $[L_i^*]$ нуль и в первой строке произведения получается всегда линейная зависимость, представляющая первый элемент последующей матрицы столбца $\{Y_i\}$ (или третий элемент дополненной матрицы-столбца).

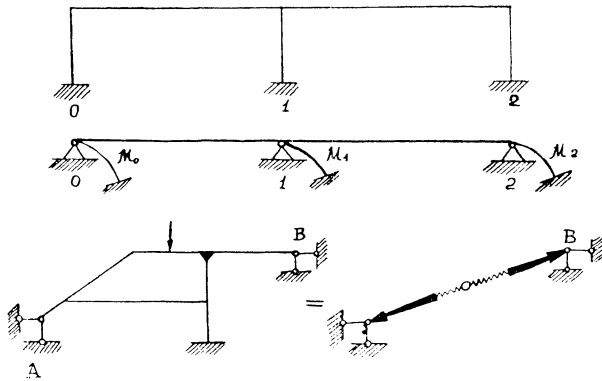


Рис. 2.

Дальнейший расчет ничем уже не отличается от расчета колебаний неразрезной балки.

Расчет колебаний рам замкнутого контура сводится к следующему.

Перерезаем раму в двух сечениях (опорах) A , B (рис. 2-б) и определяем линейную зависимость моментов M_A , M_B и углов поворота φ_A и φ_B в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_{AB}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Здесь: $[K_{Aи}]$ — матрица приведенной двухсторонней упругой опоры (приведенной упругости всей системы). Величина M_A взята с минусом, т. к. нагрузка инерции колеблющегося участка рамы передается на концы интервала.

Для однопролетной балки, обозначив концы через 0, k и используя для этой цели равенство (7), матрица приведенной упругой опоры

$$\begin{bmatrix} -M_o \\ M_k \end{bmatrix} = [K_{ok}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\tilde{C}} \begin{bmatrix} \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{A} & -1 \\ -1 & \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_o \end{bmatrix} \quad (12)$$

Таким образом, раму замкнутого контура разбиваем на некоторое число n неразрезных стержней. Прямолинейные связи, соединяющие эти стержни, должны быть балками. Приведенные двухсторонние упругие опоры которых заданы уравнением (12). Каждый из n стержней рассчитывается обычным путем, как балка со свободными неизвестными начальными параметрами усилий и деформаций, связанных друг с другом зависимостью (12). Следовательно, ввиду наличия граничных условий на „правом“ конце стержня следует приравнять нулю определитель k -го порядка, что дает искомое уравнение колеба-

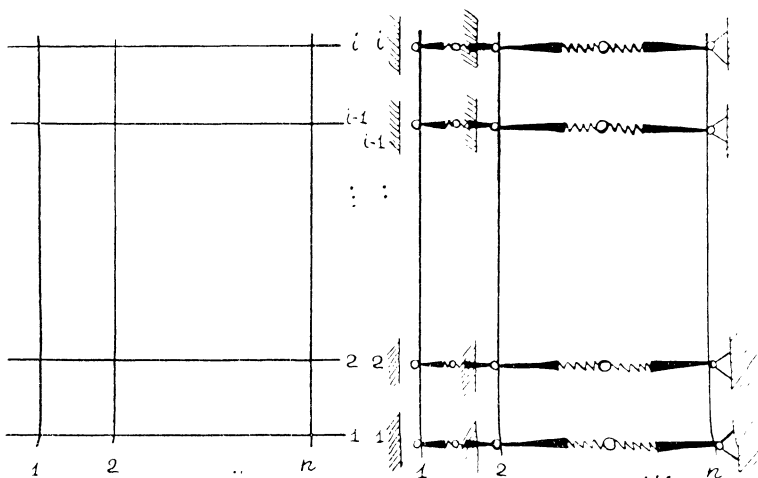


Рис. 3.

ний. Особенно четкий расчет получается при прямоугольной схеме рамы и топологически ей эквивалентной заменяющей системе (рис. 3).

В этом случае расширенная матрица (7) определяет матрицу приведенной упругости n -го порядка:

$$L_i] = \begin{pmatrix} A_1 g(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -A_1 \hat{C}_1 g(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 g(\lambda_2) & \dots & 0 & 0 & \dots & -A_2 \hat{C}_2 g(\lambda_2) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n g(\lambda_n) & -A_n \hat{C}_n g(\lambda_n) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_n \hat{B}_n g(\lambda_n) & A_n g(\lambda_n) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2 \hat{B}_2 g(\lambda_2) & 0 & 0 & \dots & A_2 g(\lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 \hat{B}_1 g(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 g(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} [K], \quad (13)$$

в которой мы для удобства записи положили $g(\lambda) = 1/(\sin \lambda - \sinh \lambda)$ и блоч-матрица $[K]$ содержит все одно- и двухсторонние приведенные упругие опоры.

В случае однородной системы матрица (13) вырождается в

$$[L_i] = \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} [E], & -\hat{C}[U], & 0 \\ \hat{B}, & [E], & [K_i] \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$[E] = \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{bmatrix}, \quad [U] = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1 \\ 0, \dots, 1, 0 \\ \dots \\ 1, \dots, 0, 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Определить наименьшие собственные частоты колебаний стальной рамы круглого поперечного сечения радиусом 3 см (рис. 4).

Согласно данным граничным условиям (8-б) при наличии трех пролетов ($n = 3$), уравнение колебаний

$$A^3 \cdot \frac{T_3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем: $A(\lambda) = 0$ или (табл. 1) $\lambda_1 = 3,93$; $\lambda_2 = 7,07$.

Далее, согласно (8-а): $T_3 = 0$; $T_3 = 1 - 3D = 0$ или $D = BC/A^2 = 1/3$.

Решая последнее равенство графически, получаем

$$\lambda_3 = 3,26 \text{ и } \lambda_4 = 4,61.$$

Частота колебаний определяется из выражения

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} \cdot l^4 = \frac{\omega^2 F \gamma l^4}{g \cdot EI},$$

где F — площадь поперечного сечения, а остальные обозначения прежние;

γ — объемный вес стали $7,8 \text{ т/м}^3$.

Так как момент инерции круга $I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{Fr^2}{4}$, а μ — погонная масса балки, то

$$\omega^2 = \frac{981 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3^2}{7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 300^4} \lambda^4 = 73,3 \lambda^4 \text{ сек}^{-2},$$

или $\omega = 8,561 \lambda^2 \text{ сек}^{-1}$.

Число колебаний в минуту

$$f = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 8,561}{3,14} \lambda^2 = 81,8 \lambda^2 \text{ (кол/мин.)}$$

Таким образом, наименьшее число колебаний

$$\begin{aligned} f_1 &= 81,8 \cdot 3,26^2 = 870 \text{ кол/мин;} \\ f_2 &= 81,8 \cdot 3,93^2 = 1270 \text{ кол/мин;} \\ f_3 &= 81,8 \cdot 4,61^2 = 1720 \text{ кол/мин;} \\ f_4 &= 81,8 \cdot 7,07^2 = 4120 \text{ кол/мин.} \end{aligned}$$

Пример 2. Найти минимальные собственные частоты колебаний рамы (рис. 5-а).

Эквивалентная система с приведенными упругими опорами показана на рис. 5-б.

Так как $-K_b^{(1)} = \hat{B}$, а $-K_a^{(1)} = -1/\hat{C}$, то используя общеизвестную формулу реактивного момента вращающейся опоры $M_i = -\mu_i \varphi_i$, составляем три матрицы пролетов $[L_i]$. Принимая во внимание равенство $BC = D$, получаем записывая произведение двух матриц в форме

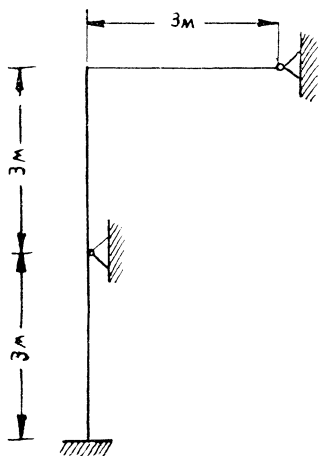


Рис. 4.

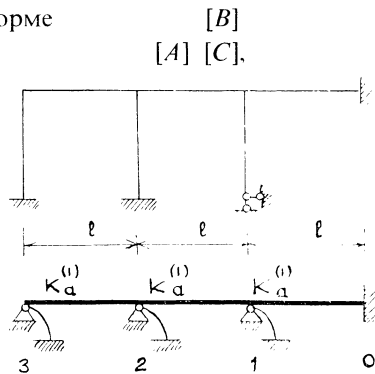


Рис. 5.

если $[C] = [B] \cdot [A]$:

$$\begin{aligned}
 [L_1] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[\begin{array}{c|c} 1, -\hat{C} & 0 \\ \hat{B}, 1 & \hat{B} \end{array} \right] \begin{array}{c} M_0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{c} -\hat{C} \\ 1-D \end{array} \right] \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda}, \\
 [L_2] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[\begin{array}{c|c} 1, -\hat{C} & 0 \\ \hat{B}, 1 & -\frac{1}{\hat{C}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -C(2-D) \\ 3-3D \end{array} \right] \frac{A^2}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^2}, \\
 [L_3] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[\begin{array}{c|c} 1, -\hat{C} & 0 \\ B, 1 & -\frac{1}{\hat{C}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -\hat{C}(5-4D) \\ 8-9D+D^2 \end{array} \right] \frac{A^3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} = \left[\begin{array}{c} \varphi_3 \\ M_3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

На опоре 3: $M_3 = 0$. Следовательно, выражение

$$M_3 = \frac{A^3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} \cdot (8 - 9D + D^2) \equiv 0$$

при $A \neq 0$ дает уравнение $8 - 9D + D^2 = 0$, корни которого

$$D_1 = 1; D_2 = 8.$$

Решая его графически, получаем:

$$\lambda_1^{(1)} = 3,40; \quad \lambda_1^{(2)} = 3,65; \quad \lambda_2^{(1)} = 4,45; \quad \lambda_2^{(2)} = 4,20.$$

Дальнейший числовой расчет аналогичен примеру 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Крылов А. Н., Собрание трудов, том. X, Изд. АН СССР, 1948.
- [2] Гогенемзер К. и Прагер В., *Динамика сооружений*, ОНТИ, 1936.
- [3] Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., *Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике*, ИЛ, Москва 1950.
- [4] Ржанецкий А. Р., *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва 1955.
- [5] Филлипов А. П., *Колебания упругих систем*, Изд. АН УССР, Киев 1956.
- [6] Koloušek V., *Stavebná dynamika spojitých nosníků a rámových soustav*, Praha 1950.
- [7] Koloušek V., *Statické a dynamické řešení spojitých soustav o stejných polích*. Nové příspěvky k teorii stavebních konstrukcí, Bratislava 1959.
- [8] Chrapan J., *Príspevok k teórii ohybu tenkej tyče*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 10 (1960), 167—177.

Поступило 26. 11. 1960.

DIE BERECHNUNG DER SCHWINGUNGEN EINES STABSYSTEMS MITTELS MATRIZEN

K. K. Ponomarjow

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Methode zur Berechnung eines schwingenden Stabsystems mittels Matrizen entwickelt, wobei die Methode von Anfangsparametern Verwendung findet. Die Lösung der Gleichung freier Schwingungen eines geraden Stabes sowie die ersten drei Ableitungen erfüllen die Matrizenrelation: $\{Y_k\} = [L]\{Y_0\}$, wobei $\{Y\}$ die Spannungszustand-Matrix im Anfangsquerschnitt bzw. in einem k -ten Querschnitt, sowie $[L]$ die Spannweite-Matrix des Systems bedeutet.

Betrachten wir einen engeren Kreis von Aufgaben, z. B. ein Balkensystem mit starren Stützen, so wird die Grundabhängigkeit noch mehr vereinfacht, da die Spannweite-Matrix dann nur noch von zweiter Ordnung ist. Beim Vorhandensein von n Spannweiten, bekommen wir den Spannungs- sowie Deformationszustand in einem beliebigen n -ten Querschnitt der schwingenden Systems als Produkt von Spannweite-Matrizen.

Die Methode findet auch bei der Berechnung von schwingenden Rahmen beliebiger geometrischer Form Verwendung, wobei die dazugehörigen Berechnungen durch Beispiele erläutert werden. Für die oben betrachteten Aufgaben eignet sich diese Methode besonders gut zur Programmierung für elektronische Rechenmaschinen.