Matematicko-fyzikálny časopis

Alois Urban

Zvýšení styku křivek promítání

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 7 (1957), No. 4, 207--234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126682

MATEMATICKO-FYZIKALNY ČASOPIS SAV, VII, 4 — 1957

ZVÝŠENÍ STYKU KŘIVEK PROMÍTÁNÍM

ALOIS URBAN

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty strojního inženýrství ČVUT v Praze

I. Úvod

Problém zvýšení styku křivek promítáním je poměrně starý. První výsledky byly známy již koncem minulého století, kdy francouzský geometr Halphen [6] ukázal, že dvě křivky k_1, k_2 mající ve společném bodě A styk řádu $s - 1$ ($s \geq 1$) promítají se z bodů jisté roviny, t. zv. hlavní roviny, do křivek, jež mají styk řádu s.

Teprve mnohem později v polovině třicátých let téměř současně Bompiani [1] a Čech [4] ukázali, že za jistých předpokladů existuje v hlavní rovině hlavní přímka, z jejíž bodů se dané křivky promítají do křivek o styku řádu $s + 1$, a na hlavní přímce hlavní bod, z něhož se promítají do křivek o styku řádu $s + 2$.

Současně byla ukázána pěkná geometrická konstrukce hlavní roviny a hlavní přímky [4]. Je-li P libovolná plocha procházející oběma křivkami k_1 a k_2, tečná rovina plochy P ve společném bodě A obou křivek je hlavní rovina. Není-li (za předpokladu $s \geq 2$) společná tečna obou křivek ve společném bodě asymptotickou tečnou plochy P, hlavní přímka je k ní sdružená tečna plochy P.

Nalezené výsledky byly poměrně brzy na to jednak doplněny Bompianim pro dvě protínající se křivky [2] a později i pro dvě křivky bez společného bodu [3], jednak zobecněny Čechem pro dotýkající se křivky ($s \geq 2$) v prostoru dimense $n \geq 3$ [5]; současně byly podány, s výjimkou případu protínajících se křivek, některé geometrické konstrukce hlavních přímek a hlavních bodů.

Úkolem této práce je ukázat geometrickou konstrukci hlavních elementů právě i pro protínající se křivky ($s = 1$). Podrobnější studium vlastností styku křivek [7, 8] ukazuje jednak, že případ $s = 1$ je nutno s analytického hlediska projednávat zvlášť, jednak, že řešení tohoto případu je poněkud složitější než v případě $s > 1$.

V práci je nejprve ve 3. odst. novou metodou nalezeno analytické řešení problému; na to v dalších dvou odstavcích navazuje několik geometrických řešení. Za základní konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů je možno označit jejich konstrukci užitím jistých rozvinutelných ploch ležících v kongruenci určené oběma danými křivkami (odst. 4), neboť téže metody lze užít pro jakékoliv dvě křivky (ať již mají styk řádu $s - 1 \geq 0$ nebo jsou bez společného bodu). Další konstrukce (odst. 5) užívá kvadratických případně kubických ploch, které mají s oběma danými křivkami v jejich společném bodě styk vhodně voleného řádu. Konečně je uvedena konstrukce (odst. 5), která je geometricky nejtěsněji spojena s předloženým problémem. Promítací kuželové plochy daných křivek jsou nahrazeny kvadratickými, případně kubickými kuželovými plochami, které s danými křivkami mají v jejich společném bodě styk vhodného řádu.

2. Analytické podmínky pro dvojici protínajících se křivek

Nechť v trojrozměrném projektivním prostoru S_3, který je vztažený k systému homogenních souřadnic x_i ($i = 0, 1, 2, 3$), jsou dány dvě křivky k_1, k_2 o parametrických rovnicích

$$k_1 \quad x_i = x_i(w), \qquad k_2 \quad y_i = y_i(v), \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

kde $x_i(w)$, $(y_i(v))$ jsou analytické funkce parametru $w(v)$ definované v jistém otevřeném intervalu W (V). Pro stručnost budeme místo rovnic (2.1) psát jejich vyjádření ve vektorovém tvaru

$$k_1 \quad x = x(w), \qquad k_2 \quad y = y(v). \tag{2.2}$$

Předpokládejme, že obě křivky mají společný bod A, který nechť je jednoduchý na obou křivkách. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že bod A na křivce k_1(k_2) přísluší parametru $w = 0$ $(v = 0)$.

Jestliže zavedeme označení

$$\left[\frac{\mathrm{d}^r x(w)}{\mathrm{d}w^r}\right]_{w=0} = x_r \quad \left[\frac{\mathrm{d}^r y(v)}{\mathrm{d}v^r}\right]_{v=0} = y_r \qquad (r = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.3}$$

(přitom bod x_r má souřadnice x_{0r}, x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}), vektorové funkce $x(w)$, $y(v)$ v rovnicích (2.2) lze rozvinout v potenční řady

$$\text{a)} \qquad k_1 \quad x = x_0 + wx_1 + \frac{w^2}{2} x_2 + \frac{w^3}{3!} x_3 + \frac{w^4}{4!} x_4 + \dots \tag{2.4}$$

$$\text{b)} \qquad k_2 \quad y = y_0 + vy_1 + \frac{v^2}{2} y_2 + \frac{v^3}{3!} y_3 + \frac{v^4}{4!} y_4 + \dots$$

Protože faktor úměrnosti homogenních souřadnic v (2.1) je možno ještě vhodně volit, můžeme předpokládat přímo

$$x_0 = y_0. \tag{2.5}$$

Z předpokladu, že bod A je obyčejný na obou křivkách, plyne

$$(x_0, x_1) \neq 0, \qquad (y_0, y_1) \neq 0; \tag{2.6}$$

přitom symbol $(x_0, x_1) \neq 0$ značí, že matice

$$\begin{pmatrix} x_{00}, & x_{10}, & x_{20}, & x_{30} \\ x_{01}, & x_{11}, & x_{21}, & x_{31} \end{pmatrix}$$

má nejvyšší možnou hodnost; obdobně je tomu u symbolu $(x_0, x_1, y_1) \neq 0$ atd.

Předpokládejme nyní, že křivky k_1, k_2 se v bodě A právě protínají, t. j. že mají v bodě A styk řádu právě 0; pak je nutně

$$(x_0, x_1, y_1) \neq 0. \tag{2.7}$$

Tečny křivek k_1, k_2 v bodě A určují tedy společnou tečnou rovinu obou křivek, která se nazývá *hlavní rovina* křivek k_1, k_2 v bodě A [6].

Je-li z libovolný bod prostoru S_3 neležící v hlavní rovině bodu A, jest

$$(x_0, x_1, y_1, z) \neq 0, \tag{2.8}$$

a tedy body x_0, x_1, x_1, z můžeme vzít za vrcholy lokálního souřadnicového čtyrstěnu. Nechť je

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 + \lambda z, & y_2 &= \lambda'_0 x_0 + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 y_1 + \lambda' z, \\ x_3 &= \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mu z, & y_3 &= \mu'_0 x_0 + \mu'_1 x_1 + \mu'_2 y_1 + \mu' z, \\ x_4 &= \nu_0 x_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 y_1 + \nu z, & y_4 &= \nu'_0 x_0 + \nu'_1 x_1 + \nu'_2 y_1 + \nu' z. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dosadíme-li (2.9) do (2.4), dostaneme

$$\text{a)} \qquad x = x_0 \left[1 + \frac{\lambda_0}{2} w^2 + \frac{\mu_0}{3!} w^3 + \frac{\nu_0}{4!} w^4 + (.)\right] +$$
$$+ x_1 \left[w + \frac{\lambda_1}{2} w^2 + \frac{\mu_1}{3!} w^3 + \frac{\nu_1}{4!} w^4 + (.)\right] + y_1 \left[\frac{\lambda_2}{2} w^2 + \frac{\mu_2}{3!} w^3 + \frac{\nu_2}{4!} w^4 + (.)\right] +$$
$$+ z \left[\frac{\lambda}{2} w^2 + \frac{\mu}{3!} w^3 + \frac{\nu}{4!} w^4 + (.)\right]. \tag{2.10}$$

$$\text{b)} \quad y = x_0 \left[1 + \frac{\lambda'_0}{2} v^2 + \frac{\mu'_0}{3!} v^3 + \frac{\nu'_0}{4!} v^4 + (.)\right] + x_1 \left[\frac{\lambda'_1}{2} v^2 + \frac{\mu'_1}{3!} v^3 + \frac{\nu'_1}{4!} v^4 + (.)\right] +$$
$$+ y_1 \left[v + \frac{\lambda'_2}{2} v^2 + \frac{\mu'_2}{3!} v^3 + \frac{\nu'_2}{4!} v^4 + (.)\right] + z \left[\frac{\lambda'}{2} v^2 + \frac{\mu'}{3!} v^3 + \frac{\nu'}{4!} v^4 + (.)\right].$$

kde (.) vždy značí souhrn členů, z nichž lze vytknout alespoň w^5 nebo v^5.

Rovnice (2.10) neudávají nejobecnější tvar rovnic křivek k_1, k_2, jež v bodě A mají styk řádu 0. Jak známo [4, 5, 7, 8], dostaneme je z rovnic (2.4), resp. (2.10), jestliže provedeme transformaci parametru w

$$w = F(v) = a_1 v + \frac{a_2}{2} v^2 + \frac{a_3}{3!} v^3 + \frac{a_4}{4!} v^4 + (.), \quad a_1 \neq 0 \tag{2.11}$$

a současně souřadnice x násobíme nenulovým faktorem

$$\varrho = 1 + b_1 v + \frac{b_2}{2} v^2 + \frac{b_3}{3!} v^3 + \frac{b_4}{4!} v^4 + (\,.\,). \tag{2.12}$$

Místo rovnice (2.10a) dostaneme pak rovnici křivky k_1 ve tvaru

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \varrho(v) x(F(v)) = \\
&= x_0 \Big[1 + b_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_0 a_1^2 + b_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_0 h_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3) v^3 + \\
&+ \frac{1}{4!} (\lambda_0 h_2 + \mu_0 h_3 + \nu_0 a_1^4 + b_4) v^4 + (\,.\,) \Big] + x_1 \Big[a_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_1 a_1^2 + \\
&+ 2a_1 b_1 + a_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_1 h_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_1 h_2 + \\
&+ \mu_1 h_3 + \nu_1 a_1^4 + 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 + 4a_3 b_1 + a_4) v^4 + (\,.\,) \Big] + y_1 \Big[\frac{1}{2} \lambda_2 a_1^2 v^2 + \\
&+ \frac{1}{3!} (\lambda_2 h_1 + \mu_2 a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4) v^4 + (\,.\,) \Big] + z \Big[\frac{1}{2} \lambda a_1^2 v^2 + \\
&+ \frac{1}{3!} (\lambda h_1 + \mu a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda h_2 + \mu h_3 + \nu a_1^4) v^4 + (\,.\,) \Big].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

kde pro stručnost jsme zavedli označení

$$h_1 = 3(a_1 a_2 + a_1^2 b_1), \quad h_2 = 4a_1 a_3 + 3a_2^2 + 12 a_1 a_2 b_1 + 6a_1^2 b_2, \tag{2.14}$$
$$h_3 = 2(3a_1^2 a_2 + 2a_1^3 b_1).$$

3. Analytické řešení problému

Zvolme libovolný střed promítání S a libovolnou průmětnu ξ, která neinciduje s S a pro kterou tedy platí $(S, \xi) \neq 0$; symbol (S, ξ) je známé zkrácené označení pro $\sum_{i=0}^{3} s_i \xi_i$, kde $s_i(\xi_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, jsou souřadnice středu S (průmětny ξ). Vhodnou volbou faktoru úměrnosti homogenních souřadnic můžeme souřadnice normalisovat tak, že

$$(S, \xi) = 1. \tag{3.1}$$

Při této volbě najdeme pro průměty K_1, K_2 křivek k_1, k_2

$$K_1 \quad X = \tilde{x} + \lambda S, \qquad K_2 \quad Y = y + \mu S, \tag{3.2}$$

kde λ, μ určíme užitím podmínek incidence $(X, \xi) = (Y, \xi) = 0$; jest

$$\lambda = -(\tilde{x}, \xi), \qquad \mu = -(y, \xi) \tag{3.3}$$

a tedy rovnice průmětů K_1, K_2 mají tvar

$$K_1 \quad X = \tilde{x} - (\tilde{x}, \xi) S, \qquad K_2 \quad Y = y - (y, \xi) S. \tag{3.4}$$

Z nalezených rovnic je především patrno, že průměty K_1, K_2 křivek k_1, k_2 mají společný průmět A' bodu A. Jest totiž $X_0 = Y_0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby průměty K_1, K_2 měly v bodě A' styk řádu $\sigma - 1$ ($\sigma \geq 1$ celé číslo) jest, aby bylo možno najít čísla a_ν, b_ν ($\nu = 1, \dots, \sigma - 1$; $a_1 \neq 0$) tak, aby bylo

$$X_\nu = Y_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, \sigma - 1), \tag{3.5}$$

tedy, jak plyne dosazením (3.4) do (3.5), aby existoval bod S vyhovující podmínkám

$$\varrho_\nu S = \tilde{x}_\nu - y_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, \sigma - 1), \tag{3.6}$$

kde $\varrho_\nu = (x_\nu - y_\nu, \xi)$; za $\tilde{x}_\nu$ a y_ν je třeba sem dosadit z (2.13) a (2.10b). Přitom pro $\nu = 0$ podmínka (3.6) je splněna identicky pro každé S. Užitím (3.6) snadno dokážeme (Bompiani [2]):

Křivky K_1, K_2 mají v bodě A' styk řádu 1 právě tehdy, je-li S bodem hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A, ale neležícím na jejich tečnách v A.

Důkaz plyne z rovnice

$$\varrho_1 S = b_1 x_0 + a_1 x_1 - y_1, \tag{3.7}$$

na níž se v tomto případě redukují rovnice (3.6).

Dále platí (Bompiani, [2]):

Jestliže oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A, existují v hlavní rovině dvě různé přímky procházející bodem A, z jejichž bodu ($\neq A$) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 2. Obě přímky oddělují harmonicky tečny křivek k_1, k_2 v bodě A.

Jestliže právě jedna oskulační rovina křivek k_1, k_2 v bodě A splývá s jejich hlavní rovinou v bodě A, neexistují body, z nichž by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek, jež by v A' měly styk řádu vyššího než 1.

Jestliže oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A, pak z každého bodu ($\neq A$) hlavní roviny se promítají křivky k_1, k_2 do křivek, které mají v bodě A' styk řádu 2. Není-li hlavní rovina pro žádnou z křivek k_1, k_2 stacionární, existují v ní tři vzájemně různé přímky, z jejichž každého bodu ($\neq A$) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v bodě A' styk řádu 3. Trojice těchto přímek je apolární ke dvojici tečen křivek k_1, k_2 v bodě A.

Důkaz. K rovnici (3.7) připojíme rovnici (3.6) pro $\nu = 2$, t. j. rovnici

$$\varrho_2 S = (\lambda_0 a_1^2 + b_2 - \lambda_0')x_0 + (\lambda_1 a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2 - \lambda_1')x_1 + (\lambda_2 a_1^2 - \lambda_2')y_1 + \\ + (\lambda a_1^2 - \lambda')z. \tag{3.8}$$

Z (3.7) a (3.8) plyne, že nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval střed S, z něhož by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek majících v bodě A' styk alespoň 2, jest, aby $a_1 \neq 0$ a aby matice

$$\begin{pmatrix} b_1, & a_1, & -1, & 0 \\ \lambda_0 a_1^2 + b_2 - \lambda_0', & \lambda_1 a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2 - \lambda_1', & \lambda_2 a_1^2 - \lambda_2', & \lambda a_1^2 - \lambda' \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

měla hodnost 1. K tomu je nutné a stačí, aby existovalo $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici

$$\lambda a_1^2 - \lambda' = 0 \tag{3.10}$$

a aby platilo

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad a_2 = \lambda_2' a_1 + \lambda_1' - \lambda_2 a_1^3 - \lambda_1 a_1^2 - 2a_1 b_1, \\ &\text{b)} \qquad b_2 = \lambda_2' b_1 + \lambda_0' - \lambda_2 a_1^2 b_1 - \lambda_0 a_1^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Za předpokladu $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$, t. j. za předpokladu, že oskulační roviny (x_0, x_1, x_2) a (x_0, y_1, y_2) křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny v bodě A, najdeme z (3.10)

$$a_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \quad (i = 1, 2;\ \varepsilon^{(1)} = +1,\ \varepsilon^{(2)} = -1). \tag{3.12}$$

Zvolíme-li za a_1 jedno z čísel (3.12), volíme-li dále b_1 libovolně a a_2, b_2 t. k. aby platilo (3.11), pak bod

$$b_1 x_0 + a_1^{(i)} x_1 + y_1 \quad (i = 1, 2) \tag{3.13}$$

je středem promítání, z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek mající v A' styk řádu 2. Body (3.13) vyplní (s výjimkou bodu A) dvě různé přímky hlavní roviny spojující bod A s body $a_1^{(1)} x_1 + y_1$, $a_1^{(2)} x_1 + y_1$, jež oddělují harmonicky body x_1, y_1. Tedy obě přímky oddělují harmonicky tečny křivek k_1, k_2 v bodě A.

Jestliže je buď $\lambda = 0$, $\lambda' \neq 0$, nebo $\lambda \neq 0$, $\lambda' = 0$, t. j. jestliže právě jedna oskulační rovina křivek k_1, k_2 v bodě A splývá s jejich hlavní rovinou v bodě A, neexistuje $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici (3.10), a tedy neexistuje střed promítání, z něhož by se dané křivky promítaly do křivek majících styk řádu 2.

Předpokládejme nyní $\lambda = \lambda' = 0$ (pak je již nutně $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_2' \neq 0$), t. j. předpokládejme, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A. Rovnice (3.10) je pak splněna identicky pro každé a_1. Volíme-li při libovolném $a_1 \neq 0$ a libovolném b_1 čísla a_2, b_2 podle (3.11), má matice (3.9) hodnost 1 a tedy z každého bodu ($\neq A$) hlavní roviny křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v A' styk řádu 2.

K rovnicím (3.7) a (3.8) připojme ještě rovnici (3.6) pro $r = 3$, t. j. rovnici

$$\begin{aligned} g_3 S \equiv{} & (\lambda_0 h_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3 - \mu_0') x_0 + (\lambda_1 h_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3 - \mu_1') x_1 + \\ & + (\lambda_2 h_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu_2') y_1 + (3\lambda(a_1 a_2 + a_1^2 b_1) + \mu a_1^3 - \mu') z. \end{aligned} \tag{3.14}$$

v níž je ještě třeba podle předpokladu položit $\lambda = 0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval střed promítání, z něhož by se dané křivky promítaly do křivek majících v bodě A' styk řádu alespoň 3, jest, aby matice

$$\begin{pmatrix} b_1, & a_1, & -1, & 0 \\ \lambda_0 a_1^2 + b_2 - \lambda_0', & \lambda_1 a_1^2 + 2a_1b_1 + a_2 - \lambda_1', & \lambda_2 a_1^2 - \lambda_2', & \lambda a_1^2 - \lambda' \\ \lambda_0 h_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3 - \mu_0', & \lambda_1 h_1 + \mu_1 a_1^3 + 3a_1b_2 + 3a_2b_1 + a_3 - \mu_1', & \lambda_2 h_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu_2', & 3\lambda(a_1a_2 + a_1^2 b_1) + \mu a_1^3 - \mu' \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

(v níž $\lambda = \lambda' = 0$) měla hodnost 1 a aby $a_1 \neq 0$. K tomu je nutné a stačí, aby existovalo nenulové řešení rovnice

$$\mu a_1^3 - \mu' = 0 \tag{3.16}$$

a aby kromě rovnic (3.11) platily ještě rovnice

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1\mu_2' + \mu_1' - a_1h_1\lambda_2 - h_1\lambda_1 - a_1^4\mu_2 - a_1^3\mu_1 - 3a_1b_2 - 3a_2b_1, \\ b_3 &= b_1\mu_2' + \mu_0' - b_1h_1\lambda_2 - h_1\lambda_0 - a_1^3 b_1\mu_2 - a_1^3\mu_0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Předpokládáme-li, že hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A není pro žádnou z křivek k_1, k_2 stacionární, jest $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$, a tedy existuje vždy $a_1 \neq 0$ vyhovující rovnici (3.16); jejím řešením najdeme

$$a_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \sqrt[3]{\frac{\mu'}{\mu}}, \quad \left(i = 1, 2, 3;\ \varepsilon^{(1)} = 1,\ \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right). \tag{3.18}$$

Zvolíme-li za a_1 některé řešení v (3.18), volíme-li dále b_1 libovolně, a_2, b_2 podle (3.11) a a_3, b_3 podle (3.17), pak z bodu (3.13) (kam za $a_1^{(i)}$ dosadíme z (3.18)) křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3. Přímky promítající body (3.13) z bodu A tvoří, jak se snadno zjistí, trojici přímek apolární s dvojicí tečen křivek k_1, k_2 v A.

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána. Sestrojené přímky v hlavní rovině se nazývají *hlavní přímky* (Bompiani, [2]).

Konečně platí věta (Bompiani, [2]):

Jestliže oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny křivek v bodě A, existuje na každé z hlavních přímek bod ($\neq A$), z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3.

Jestliže hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A je nestacionární oskulační rovinou každé z křivek k_1, k_2 v bodě A, existuje na každé ze tří hlavních přímek bod ($\neq A$), z něhož se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 4. Tyto body jsou kolineární právě tehdy, když při vyjádření (2.9) *jest*

$$\mu\lambda_1' - \mu'\lambda_2 = 0. \tag{3.19}$$

Důkaz. Předpokládáme-li nejprve, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v A jsou různé od hlavní roviny křivek v bodě A, t. j. je-li $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$, můžeme bod z v (2.9) volit na průsečnici obou oskulačních rovin (ale $\neq A$); volíme tedy $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval bod S promítající křivky k_1, k_2 do křivek majících v bodě A' styk řádu 3, jest, aby $a_1 \neq 0$ a aby matice (3.15), v níž položíme $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$, měla hodnost 1. K tomu je nutné a stačí, aby platila rovnice (3.12), rovnice

$$3\lambda(a_1 b_1 + a_2)a_1 + \mu a_1^3 - \mu' = 0 \tag{3.20}$$

a rovnice (3.11) a (3.17), v nichž je třeba položit $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$. Z rovnic (3.20) a (3.11a) snadno najdeme

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_2' - \lambda_1 a_1 - \frac{1}{3\lambda a_1^2}(\mu' - \mu a_1^3), \\ a_2 &= \lambda_2' a_1 + \lambda_1 a_1^2 + \frac{2}{3\lambda a_1}(\mu' - \mu a_1^3). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Zvolíme-li nyní a_1 tak, aby vyhovovalo rovnici (3.12), určíme-li b_1, a_2 užitím (3.21), b_2 z (3.11b) a a_3, b_3 podle (3.17), pak křivky k_1, k_2 se promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 3 právě ze dvou bodů

$$\begin{aligned} &\left[\lambda\lambda'(\lambda_2'\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_1\lambda'^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(\mu'\lambda^{\frac{3}{2}} - \mu\lambda'^{\frac{3}{2}})\right] x_0 + \lambda\lambda'^{\frac{3}{2}} x_1 - \lambda^{\frac{3}{2}}\lambda' y_1, \\ &\left[\lambda\lambda'(\lambda_2'\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda_1\lambda'^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(\mu'\lambda^{\frac{3}{2}} + \mu\lambda'^{\frac{3}{2}})\right] x_0 - \lambda\lambda'^{\frac{3}{2}} x_1 - \lambda^{\frac{3}{2}}\lambda' y_1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

jež po jednom leží na hlavních přímkách křivek k_1, k_2 v bodě A.

Nechť nyní oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s hlavní rovinou křivek k_1, k_2 v bodě A a nechť oskulační roviny nejsou stacionární. Pak v (2.9) je $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$.

K rovnicím (3.7), (3.8) a (3.14) připojme ještě rovnici

$$\begin{aligned} \varrho_4 S = {} & (\lambda_0 h_2 + \mu_0 h_3 + \nu_0 a_1^3 + b_4 - \nu_0')x_0 + (\lambda_1 h_2 + \mu_1 h_3 + \nu_1 a_1^4 + 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 + {} \\ & + 4a_3 b_1 + a_4 - \nu_1')x_1 + (\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4 - \nu_2')y_1 + (\mu h_3 + \nu a_1^3 - \nu')z. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval bod S, z něhož by se křivky k_1, k_2 promítaly do křivek majících v A' styk řádu 4, jest, aby matice

$$\left(\begin{matrix} b_1, & a_1, \\ b_2 + \lambda_0 a_1^2 - \lambda_0', & a_2 + \lambda_1 a_1^2 + 2a_1 b_1 - \lambda_1', \\ b_3 - B_3, & a_3 - A_3, \\ b_1 - B_4, & a_4 - A_4, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} -1 & ,\ 0 \\ \lambda_2 a_1^2 - \lambda_2' & ,\ 0 \\ \lambda_2 h_1 + \mu_2 a_1^3 - \mu_2' & ,\ \mu a_1^3 - \mu' \\ \lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4 - \nu_2', & \mu h_3 + \nu a_1^3 - \nu' \end{array}\right) \tag{3.24}$$

(v níž A_i ($i = 3,4$) je funkcí $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, \ldots, b_{i-1}$ a B_i ($i = 3,4$) funkcí $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, \ldots, b_{i-2}$) měla hodnost 1 a přitom aby $a_1 \neq 0$. To nastane právě tehdy, když a_1 je řešením rovnice (3.16), jestliže platí rovnice (3.11), (3.17) a

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 2\mu(3a_1^2 a_2 + 2a_1^3 b_1) + \nu a_1^4 - \nu' = 0, \\ \text{b)} & a_1 = A_4 - a_1(\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4 - \nu_2'), \\ \text{c)} & b_1 = B_4 - b_1(\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4 - \nu_2'). \end{array} \tag{3.25}$$

Z rovnic (3.11a) a (3.25a) najdeme

$$b_1 = \frac{1}{8a_1^3\mu}(-6\lambda_1\mu a_1^4 + 6\lambda_1'\mu a_1^2 - 6\lambda_2\mu a_1^5 + 6\lambda_2'\mu a_1^3 + \nu a_1^4 - \nu'). \tag{3.26}$$

Postupným dosazením b_1 z (3.26) do (3.11), (3.17) a (3.25b, c) určíme a_α, b_α ($\alpha = 2, 3, 4$) jednoznačně jako funkce parametru a_1. Jestliže výsledek dosazení řešení $a_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) rovnice (3.16) do pravé strany (3.26) označíme $b_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), pak z předchozího plyne

$$b_1^{(i)} = \frac{1}{8}(-6\varepsilon^{(i)}\lambda_1\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} + 6\varepsilon^{(i)}\lambda_1'\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{-\frac{1}{3}} - 6\varepsilon^{(i)2}\lambda_2\mu^{-\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}} +$$
$$+ 6\lambda_2' + \varepsilon^{(i)}\nu\mu^{-\frac{4}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} - \nu'\mu'^{-1}). \tag{3.27}$$

Přitom

$$b_1^{(i)}x_2 + a_1^{(i)}x_1 - y_1 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.28}$$

jsou body, a to jediné, z nichž se křivky k_1, k_2 promítají do křivek majících v průmětu A' bodu A styk řádu 4.

Body (3.28) jsou kolineární právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & b_1^{(1)}, & 1 \\ a_1^{(2)}, & b_1^{(2)}, & 1 \\ a_1^{(3)}, & b_1^{(3)}, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.29}$$

Po dosazení z (3.18) a (3.26) najdeme odtud již dokazovaný vztah (3.19).

Nalezené body jak v prvém, tak i v druhém případě se nazývají *hlavní body* (Bompiani [2]).

4. Základní konstrukce hlavních elementů

Předchozí výsledky je možno interpretovat geometricky; užijeme přitom netriviálních rozvinutelných přímkových ploch přímkové kongruence $\mathfrak{K}$, pro kterou k_1, k_2 jsou fokálními křivkami. Přitom triviální rozvinutelnou přímkovou plochou rozumíme každou kuželovou plochu, jejíž vrchol je na jedné z křivek k_1, k_2 a jejíž řídicí křivkou je druhá křivka.

Nechť P je netriviální přímková plocha ležící v kongruenci $\mathfrak{K}$ procházející bodem A, pro kterou body křivek k_1, k_2 nejsou singulární. Povrchové přímky plochy P protínají pak fokální křivky k_1, k_2 kongruence $\mathfrak{K}$ v bodech o parametrech u, v odpovídajících si v analytické korespondenci, která je nutně tvaru

$$u = \Phi(v) = \lambda_1 v + \frac{\lambda_2}{2} v^2 + \frac{\lambda_3}{3!} v^3 + \ldots \quad (\lambda_1 \neq 0). \tag{4.1}$$

Jestliže obráceně je dána analytická korespondence (4.1) mezi body o parametrech u, v křivek k_1, k_2, pak spojnice bodů, které si odpovídají v korespondenci (4.1), vytvoří netriviální přímkovou plochu P ležící v kongruenci $\mathfrak{K}$. Její přímku jdoucí společným bodem A obou křivek k_1, k_2 určíme jako limitní polohu přímky

$$p(v) = (y(v), x(\Phi(v))) \quad (v \neq 0) \tag{4.2}$$

pro $v \to 0$. Dosadíme-li (4.1) do (2.10) a užijeme-li (2.10) k úpravě (4.2), najdeme

$$p(v) = (x_0, \lambda_1 x_1 - y_1) v + v^2 (\,.\,), \tag{4.3}$$

a tedy

$$p(0) = \lim_{v \to 0} \frac{p(v)}{v} = (x_0, \lambda_1 x_1 - y_1).$$

Odtud již plyne věta, udávající geometrickou konstrukci hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A; tato věta je speciálním případem obecnější věty, jež platí pro každou plochu procházející křivkami k_1, k_2 (Čech [4], [5]).

Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A je tečná rovina v bodě A každé netriviální přímkové plochy P kongruence $\mathfrak{K}$.

Pro hlavní přímky dokážeme:

Přímka netriviální rozvinutelné plochy P kongruence $\mathfrak{K}$ procházející společným bodem A křivek k_1, k_2 je hlavní přímkou křivek k_1, k_2 v bodě A. Obráceně: každá hlavní přímka křivek k_1, k_2 v bodě A je přímkou netriviální rozvinutelné plochy kongruence $\mathfrak{K}$.

Důkaz. Přímková plocha, jejíž tvořící přímky jsou (4.2) a (4.4), t. j. plocha

a) $$X(u, v) = y(v) + u x(\Phi(v)), \quad v \neq 0,$$

b) $$X(u, 0) = u x_0 - \lambda_1 x_1 + y_1 \tag{4.5}$$

je rozvinutelná, jestliže podél každé její tvořící přímky tečné roviny splývají: přímka $p(v)$, tečna křivky k_1 v bodě $x(\Phi(v))$ a tečna křivky k_2 v bodě $y(v)$ leží pak v jedné rovině. Jest proto pro rozvinutelnou plochu pro každé v (a tedy i pro $v = 0$)

$$(x, y, x', y') = 0, \tag{4.6}$$

kde čárkou je označena derivace podle parametru v. Dosadíme-li sem (2.10) [w je dáno funkcí $\Phi(v)$ v (4.1)], dostaneme po delším výpočtu (po vykrácení determinantem $(x_0, x_1, y_1, z) \neq 0$)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} x_1 v^2(\lambda x_1^2 - \lambda') + v^3\Big[-\frac{1}{2} x_2\lambda' + \lambda x_1^2 x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1'\lambda - \lambda_1\lambda')x_1^2 - \frac{1}{2}(\lambda_2\lambda' - \lambda_2'\lambda)x_1^3 + \\ &+ \frac{1}{3}\mu x_1^4 - \frac{1}{3}\mu' x_1\Big] + v^4\Big[x_2\Big(\frac{5}{6}\mu x_1^3 - \frac{1}{3}\mu'\Big) - \lambda_1\Big(\frac{1}{12}\mu x_1^5 - \frac{1}{3}\mu' x_1^2\Big) + \frac{1}{4}\lambda_1'\mu x_1^3 - \\ &- \frac{1}{4}\lambda_2\mu' x_1^3 + \frac{1}{3}\lambda_2'\Big(\mu x_1^4 - \frac{1}{4}\mu' x_1\Big) - \frac{1}{8}\nu x_1^5 - \frac{1}{8}\nu' x_1 + \lambda(.) + \lambda'(.)\Big] + v^5(.) = 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Koeficienty při jednotlivých mocninách parametru v jsou nutně rovny nule: tím dostáváme podmínky pro koeficienty korespondence (4.1), a tedy i speciálně pro $x_1 \neq 0$, x_2.

Předpokládejme nejprve, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od hlavní roviny; pak je $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$. Bod z zvolíme ještě na průsečnici oskulačních rovin, t. j. zvolíme $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$. Rovnice pro x_1, x_2 jsou tedy

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad \lambda x_1^2 - \lambda' = 0,\\ &\text{b)}\quad \frac{1}{2} x_2\lambda' + \lambda x_1^2 x_2 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda' x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2'\lambda x_1^3 + \frac{1}{3}\mu x_1^4 - \frac{1}{3}\mu' x_1 = 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Odtud již plyne

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad x_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}},\\ &\text{b)}\quad x_2^{(i)} = \lambda^{-2}\lambda'^{-\frac{1}{2}}\Big[\lambda\lambda'(\lambda_1\lambda'^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{(i)}\lambda_2'\lambda^{\frac{1}{2}}) - \frac{2}{3}(\mu\lambda'^{\frac{3}{2}} - \varepsilon^{(i)}\mu'\lambda^{\frac{3}{2}})\Big].\\ &\qquad (i = 1, 2;\quad \varepsilon^{(1)} = +1,\quad \varepsilon^{(2)} = -1).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Z rovnice (4.8a) je zřejmé, že v kongruenci $\mathfrak{K}$ leží dvě netriviální rozvinutelné plochy (procházející bodem A a pro něž regulární body křivek k_1, k_2 nejsou singulární). Jejich přímky jdoucí bodem A jsou přímky (4.5b), kde x_1 je dáno podmínkami (4.9a) a tedy podle (3.12) a (3.13) jsou to hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A.

Předpokládejme nyní, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s hlavní rovinou a nejsou stacionární: pak je $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$. Rovnice (4.5) se redukuje na rovnici

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3} x_1 v^3(\mu x_1^3 - \mu') + v^4\Big[x_2\Big(\frac{5}{6}\mu x_1^3 - \frac{1}{3}\mu'\Big) + \lambda_1\Big(\frac{1}{12}\mu x_1^5 - \frac{1}{3}\mu' x_1^2\Big) + \\ &+ \frac{1}{4}\lambda_1'\mu x_1^3 - \frac{1}{4}\lambda_2\mu x_1^3 + \frac{1}{3}\lambda_2'\Big(\mu x_1^4 - \frac{1}{4}\mu' x_1\Big) + \frac{1}{8}\nu x_1^5 - \frac{1}{8}\nu' x_1\Big] + v^5(.) = 0.\end{aligned} \tag{4.10}$$

která platí identicky pro všechna v. Odtud pro koeficienty $\varkappa_1 \neq 0$, $\varkappa_2, \ldots$ korespondence (4.1) plyne

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \mu\varkappa_1^3 - \mu' = 0,\\
&\text{b)}\quad \varkappa_2\left(\frac{5}{6}\mu\varkappa_1^3 - \frac{1}{3}\mu'\right) = \lambda_1\left(\frac{1}{3}\mu'\varkappa_1^3 - \frac{1}{12}\mu\varkappa_1^5\right) - \frac{1}{4}\lambda_1'\mu\varkappa_1^3 + \frac{1}{4}\lambda_2\mu\varkappa_1^4 -\\
&\qquad - \frac{1}{3}\lambda_2'\varkappa_1\left(\mu\varkappa_1^3 - \frac{1}{4}\mu'\right) - \frac{1}{8}\nu\varkappa_1^5 + \frac{1}{8}\nu'\varkappa_1
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varkappa_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\mu'^{\frac{1}{3}}\mu^{-\frac{1}{3}},\\
&\text{b)}\quad \varkappa_2^{(i)} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon^{(i)2}\mu^{-\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}}\left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\nu\mu^{-1}\right) - \varepsilon^{(i)}\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}}\left(\lambda_2' - \frac{1}{2}\nu'\mu'^{-1}\right) + \lambda_2\mu'\mu^{-1} - \lambda_1'\right\},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$\left(i = 1, 2, 3;\quad \varepsilon^{(1)} = 1,\quad \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

V tomto případě v kongruenci $\mathfrak{K}$ leží tři netriviální rozvinutelné plochy (resp. pláště), které procházejí bodem A a pro které regulární body křivek k_1, k_2 nejsou singulární. Přímky těchto ploch jdoucí bodem A jsou přímky (4.5b), kde $\varkappa_1$ je dáno podmínkami (4.12a); jsou to hlavní přímky křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A, jak plyne z (3.12) a (3.18).

Pro geometrickou konstrukci hlavních bodů platí věta:

Bod hrany vratu netriviální rozvinutelné plochy P kongruence $\mathfrak{K}$ na hlavní přímce křivek k_1, k_2 v bodě A je hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A. Obráceně: každý hlavní bod křivek k_1, k_2 v bodě A je bodem hrany vratu netriviální rozvinutelné plochy P kongruence $\mathfrak{K}$.

Důkaz. Nechť

$$u = u(v) = \beta_0 + \beta_1 v + \frac{\beta_2}{2}v^2 + v^3(.) \tag{4.13}$$

je rovnice hrany vratu netriviální rozvinutelné plochy P (která prochází bodem A a nemá regulární bod křivek k_1, k_2 za singulární bod) kongruence $\mathfrak{K}$.

Po dosazení (4.13) do (4.5a) najdeme

$$
\begin{aligned}
X(v) &= X(\beta_0 + \beta_1 v + v^2(.), v) =\\
&= x_0(1 + \beta_0) + v(\beta_1 x_0 + \beta_0\varkappa_1 x_1 + y_1) + v^2(.).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Protože vylučujeme případy rozvinutelných ploch kongruence, pro něž je bod A singulární, platí ve (4.14) nutně $\beta_0 = -1$ a tedy pro bod hrany vratu na tvořící přímce rozvinutelné plochy P najdeme

$$X(0) = \lim_{v\to 0}\frac{X(v)}{v} = \beta_1 x_0 - \varkappa_1 x_1 + y_1. \tag{4.15}$$

kde, za našich předpokladů o oskulačních rovinách křivek k_1, k_2 v bodě A koeficient $\varkappa_1$ je dán buď podmínkou (4.8a), nebo (4.12a). Zbývá ještě určit β_1.

V bodě hrany vratu rozvinutelné plochy je tečná rovina

$$(X(u, v), y(v), x(\Phi(v)), y'(v) + u(v)x'(\Phi(v))) = 0 \tag{4.16}$$

neurčitá, a tedy matice (kde $h_1 = \varkappa_2 + \lambda_1\varkappa_1^2$)

$$\left(\begin{array}{ll}
1 + \frac{\lambda_0'}{2}v^2 + (.), & \frac{\lambda_1'}{2}v^2 + (.), \\
1 + \frac{\lambda_0}{2}v^2 + (.), & \varkappa_1 v + \frac{1}{2}h_1 v^2 + (.), \\
\lambda_0' v + (.) + (\beta_0 + \beta_1 v + (.))(\lambda_0\varkappa_1^2 v + (.)), & \lambda_1' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (.))(\varkappa_1 + h_1 v + (.)), \\
v + \frac{\lambda_2'}{2}v^2 + (.), & \frac{\lambda'}{2}v^2 + (.) \\
\frac{\lambda_2}{2}\varkappa_1^2 v^2 + (.), & \frac{\lambda}{2}\varkappa_1^2 v^2 + (.) \\
1 + \lambda_2' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (.))\lambda_2\varkappa_1^2 v, & \lambda' v + (\beta_0 + \beta_1 v + (.))\lambda\varkappa_1^2 v
\end{array}\right) \tag{4.17}$$

musí mít hodnost menší než 3. K tomu je nutné a stačí, aby všechny třířadové determinanty matice (4.17) byly rovny nule. Speciálně musí být rovný nule determinant z prvků 1., 2. a 3. sloupce matice (4.17):

$$0 = \begin{array}{ll}
1 + \frac{\lambda_0'}{2}v^2 + (.), & \frac{\lambda_1'}{2}v^2 + (.), \\
1 + \frac{\lambda_0}{2}v^2 + (.), & \varkappa_1 v + \frac{1}{2}(\varkappa_2 + \lambda_1\varkappa_1^2)v^2 + (.), \\
(\lambda_0' + \lambda_0\beta_0\varkappa_1^2)v + (.), & \beta_0\varkappa_1 + (\lambda_1' + \lambda_1\beta_0\varkappa_1^2 + \beta_0\varkappa_2 + \beta_1\varkappa_1)v + (.),
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
v + \frac{\lambda_2'}{2}v^2 + (.) \\
\frac{\lambda_2}{2}\varkappa_1^2 v^2 + (.) \\
1 + (\lambda_2' + \lambda_2\beta_0\varkappa_1^2)v + (.)
\end{array} \tag{4.18}$$

$$v\varkappa_1(1 + \beta_0) + v^2\left\{\beta_1\varkappa_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta_0\right)\varkappa_2 + \lambda_1\varkappa_1^2\left(\frac{1}{2} + \beta_0\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\lambda_1' + \frac{1}{2}\lambda_2\beta_0\varkappa_1^3 + \lambda_2'\varkappa_1\left(\frac{1}{2}\beta_0 + 1\right)\right\} + v^3(.).$$

Rovnice (4.18) platí identicky pro všechna v; vzhledem k předpokladu $a_1 \neq 0$, najdeme tedy odtud

a) $\beta_0 = -1$,

b) $$\beta_1 = \frac{1}{2\varkappa_1}(\varkappa_2 + \lambda_1\varkappa_1^2 - \lambda_1' + \lambda_2\varkappa_1^3 - \lambda_2'\varkappa_1). \tag{4.19}$$

Nechť $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$ (t. j. nechť oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A jsou různé od jejich hlavní roviny v bodě A). Zvolíme-li bod $z \neq A$ na průsečnici obou oskulačních rovin ($\lambda_2 = \lambda_1' = 0$), pak po dosazení (4.9) do (4.19b) dostaneme

$$\beta_1^{(i)} = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon^{(i)}\lambda_1\lambda'^{\frac{1}{2}} - \lambda_2'\lambda^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\varepsilon^{(i)}\lambda'^{-\frac{3}{2}}\lambda'^{-1}(\mu\lambda'^{\frac{3}{2}} - \varepsilon^{(i)}\mu'\lambda^{\frac{3}{2}}) \tag{4.20}$$

$$(i = 1, 2;\ \varepsilon^{(1)} = +1,\ \varepsilon^{(2)} = -1).$$

Odtud je patrno, že body (4.15) (kam dosadíme za $\varkappa_1$ z (4.9) a za β_1 z (4.20)), t. j. body $-\lambda^{\frac{3}{2}}\lambda'(\beta_1^{(i)}x_0 - \varkappa_1^{(i)}x_1 + y_1)$, $i = 1, 2$, jsou hlavní body (3.22).

Nechť $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$ (t. j. nechť oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stacionární a splývají s hlavní rovinou křivek k_1, k_2 v bodě A). Po dosazení (4.12) do (4.19b) najdeme

$$\beta_1^{(i)} = \frac{3}{4}(\varepsilon^{(i)}\lambda_1\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{(i)2}\lambda_1'\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{-\frac{1}{3}} - \varepsilon^{(i)2}\lambda_2\mu^{-\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}} - \lambda_2') - \frac{1}{8}(\varepsilon^{(i)}\nu\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} - \nu'\mu'^{-1}). \tag{4.21}$$

$$\left(i = 1, 2, 3;\ \varepsilon^{(1)} = 1,\ \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Tedy body (4.15) (kam ještě dosadíme za $\varkappa_1$ z (4.9a) a za β_1 z (4.21)), t. j. body $-\lambda^{\frac{3}{2}}\lambda'(\beta_1^{(i)}x_0 - \varkappa_1^{(i)}x_1 + y_1)$, $i = 1, 2, 3$, jsou hlavní body (3.28), kde $a_1^{(i)}$ a $b_1^{(i)}$ jsou dány vztahy (3.18) a (3.27).

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána.

5. Další konstrukce hlavních elementů

Konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů křivek k_1, k_2 v bodě A můžeme rovněž podat užitím kvadratických a kubických ploch, které mají s danými křivkami k_1, k_2 v bodě A styk vhodně voleného řádu.

Pro analytické vyjádření užijeme téhož lokálního souřadnicového systému o vrcholech x_0, x_1, y_1, z, kterého jsme užili v odst. 2. Je-li X bod prostoru, platí pro něj

$$X = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z. \tag{5.1}$$

Rovnici libovolné kvadriky Q můžeme pak psát ve tvaru

$$Q \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \tag{5.2}$$

kde a_{ik} jsou konstanty, nikoliv všechny současně rovny nule.

Pro společné body křivky $x(u)$, resp. $y(v)$ (o rovnicích (2.10a, b)) s kvadrikou (5.2) snadno najdeme rovnice

$$a_{00} + 2a_{01}u + (\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{01} + \lambda_2 a_{02} + \lambda a_{03} + a_{11})u^2 + \Big[a_{00}(*) + a_{01}(*) + a_{02}(*) + \frac{\mu}{3}a_{03} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda a_{13}\Big]u^3 + \Big[a_{00}(*) + a_{01}(*) + a_{02}(*) + \left(\frac{\lambda\lambda_0}{2} + \frac{\nu}{12}\right)a_{03} + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu_1}{3}\right)a_{11} + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3}\right)a_{12} + \left(\frac{\lambda\lambda_1}{2} + \frac{\mu}{3}\right)a_{13} + \frac{\lambda_2^2}{4}a_{22} + \frac{\lambda_2\lambda}{2}a_{23} + \frac{\lambda^2}{4}a_{33}\Big]u^4 + u^5(*) = 0. \tag{5.3}$$

$$a_{00} + 2a_{02}v + (\lambda_0' a_{00} + \lambda_1' a_{01} + \lambda_2' a_{02} + \lambda' a_{03} + a_{22})v^2 + \Big[a_{00}(*) + a_{01}(*) + a_{02}(*) + \frac{\mu'}{3}a_{03} + \lambda_1' a_{12} + \lambda_2' a_{22} + \lambda' a_{23}\Big]v^3 + \Big[a_{00}(*) + a_{01}(*) + a_{02}(*) + \left(\frac{\lambda_0'\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{12}\right)a_{03} + \frac{\lambda_1'^2}{4}a_{11} + \left(\frac{\lambda_1'\lambda_2'}{2} + \frac{\mu_1'}{3}\right)a_{12} + \frac{\lambda'\lambda_1'}{2}a_{13} + \left(\frac{\lambda_2'^2}{4} + \frac{\mu_2'}{3}\right)a_{22} + \left(\frac{\lambda'\lambda_2'}{2} + \frac{\mu'}{3}\right)a_{23} + \frac{\lambda'^2}{4}a_{33}\Big]v^4 + v^5(*) = 0. \tag{5.4}$$

Z rovnic (5.3) a (5.4) plyne, že nutná a postačující podmínka pro to, aby kvadrika (5.2) měla s křivkami (2.10) v bodě A styk řádu $s - 1$ ($s = 2, 3, 4, 5$), jest, aby měla styk řádu $s - 2$ a aby ještě platilo

a) $s = 2: \; a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0;$

b) $s = 3: \; a_{11} = -\lambda a_{03}, \quad a_{22} = -\lambda' a_{03};$

c) $s = 4: \; \left(\frac{\mu}{3} - \lambda_1\lambda\right)a_{03} + \lambda_2 a_{12} + \lambda a_{13} = 0,$

$$\left(\frac{\mu'}{3} - \lambda_2'\lambda'\right)a_{03} + \lambda_1' a_{12} + \lambda' a_{23} = 0; \tag{5.5}$$

d) $s = 5: \; \left(\frac{\lambda\lambda_0}{2} + \frac{\nu}{12} - \frac{\lambda\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda\mu_1}{3} - \frac{\lambda'\lambda_2^2}{4}\right)a_{03} + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3}\right)a_{12} + \left(\frac{\lambda\lambda_1}{2} + \frac{\mu}{3}\right)a_{13} + \frac{\lambda\lambda_2}{2}a_{23} + \frac{\lambda^2}{4}a_{33} = 0,$

$$\left(\frac{\lambda'\lambda_0'}{2} + \frac{\nu'}{12} - \frac{\lambda\lambda_1'^2}{4} - \frac{\lambda'\mu_2'}{3} - \frac{\lambda'\lambda_2'^2}{4}\right)a_{03} + \left(\frac{\lambda_1'\lambda_2'}{2} + \frac{\mu_1'}{3}\right)a_{12} + \frac{\lambda'\lambda_1'}{2}a_{13} + \left(\frac{\lambda'\lambda_2'}{2} + \frac{\mu'}{3}\right)a_{23} + \frac{\lambda'^2}{4}a_{33} = 0.$$

Dokážeme nyní větu:

Nechť oskulační roviny křivek k_1, k_2 v jejich společném bodě A nejsou stacionární a nechť jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A. Nechť Q_{s-1} ($s = 2, 3, 4$) je kvadrika, která nemá v A singulární bod a která má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk řádu $s - 1$.

Tečná rovina kvadriky Q_1 v bodě A je hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A.

Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A protíná kvadriky Q_2 v přímkách, které tvoří páry involuce, jejíž samodružné přímky jsou hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A.

Přímka polárně sdružená s průsečnicí oskulačních rovin křivek k_1, k_2 v bodě A vzhledem ke kvadrice Q_3 protíná hlavní přímky v hlavních bodech křivek k_1, k_2 v bodě A.

Důkaz. Podle předpokladu o oskulačních rovinách křivek k_1, k_2 v bodě A jest $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$; bod z ($\neq A$) souřadnicového systému zvolme na průsečnici obou oskulačních rovin, tedy zvolme $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$.

Tvrzení o hlavní rovině je speciálním případem známé věty (Čech [4]) a plyne okamžitě z toho, že pro kvadriku Q_1 platí (5.5a).

Rovnice kvadriky Q_2 jest

$$(2\xi_0\xi_3 - \lambda\xi_1^2 - \lambda'\xi_2^2)a_{03} + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_3^2 = 0 \tag{5.6}$$

$$(a_{03} \neq 0).$$

Její tečná rovina v bodě A, t. j. rovina $\xi_3 = 0$, ji protíná v dvojici přímek

$$\lambda a_{03}\xi_1^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \lambda' a_{03}\xi_2^2 = 0 \tag{5.7}$$

různé od dvojice tečen křivek k_1, k_2 v bodě A ($a_{03} \neq 0$), jež závisí na parametru $a_{12} : a_{03}$ a je párem involuce, jejíž samodružné přímky jsou

$$\sqrt{\lambda}\xi_1 \pm \sqrt{\lambda'}\xi_2 = 0, \tag{5.8}$$

což jsou, jak plyne porovnáním s (3.12) a (3.13), hlavní přímky dvojice křivek k_1, k_2 v bodě A.

Přímka polárně sdružená s průsečnicí oskulačních rovin křivek k_1, k_2 v bodě A vzhledem k libovolné kvadrice Q_1 je $a_{03}\xi_0 + a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 = 0$, a tedy za předpokladu, že daná kvadrika je Q_3,

$$\lambda\lambda'\xi_0 + \lambda'\left(\lambda_1\lambda - \frac{\mu}{3}\right)\xi_1 + \lambda\left(\lambda_2'\lambda' - \frac{\mu'}{3}\right)\xi_2 = 0. \tag{5.9}$$

Na této přímce však leží hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A, jak se snadno přesvědčíme dosazením souřadnic hlavních bodů (3.22) do (5.9).

Mezi kvadrikami Q_{s-1} ($s = 2, 3, 4$) existují také kuželové plochy. Dokážeme za předpokladu, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stacionární a jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A, že pro ně platí:

Nutná a postačující podmínka, aby bod prostoru byl vrcholem kuželové plochy Q_1, resp. Q_2, resp. Q_3, jest, aby byl různý od bodu A a ležel v hlavní rovině, resp. na hlavní přímce, resp. aby byl hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A.

Důkaz tvrzení je důsledkem definice hlavních elementů křivek k_1, k_2 v bodě A.

O správnosti tvrzení věty se můžeme však také přesvědčit přímým výpočtem. Pro souřadnice $\overset{0}{\xi}_0, \overset{0}{\xi}_1, \overset{0}{\xi}_2, \overset{0}{\xi}_3$ vrcholu $V \neq A$ kuželové plochy Q_1, pro kterou tedy v (5.2) je nutně $a_{03} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, platí

$$\overset{0}{\xi}_0 : \overset{0}{\xi}_1 : \overset{0}{\xi}_2 : \overset{0}{\xi}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} : -a_{03} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : a_{03} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} : 0; \qquad (5.10)$$

je to bod ($\neq A$) hlavní roviny.

Dosadíme-li do (5.10) jednak z (5.5b) $a_{11} = -\lambda a_{03}$, $a_{22} = -\lambda' a_{03}$, jednak $a_{12} = \varepsilon^{(i)}\sqrt{\lambda\lambda'}\, a_{03}$ ($i = 1, 2$; $\varepsilon^{(1)} = 1$, $\varepsilon^{(2)} = -1$), dostaneme (vzhledem k tomu, že $\lambda \neq 0$, $\lambda' \neq 0$):

$$\overset{0}{\xi}_0 : \overset{0}{\xi}_1 : \overset{0}{\xi}_2 : \overset{0}{\xi}_3 = \frac{1}{a_{03}} \left(a_{23} - \varepsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\, a_{13} \right) : \varepsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} : -1 : 0; \qquad (5.11)$$

je to bod ($\neq A$) hlavní přímky.

Jestliže konečně volíme kuželovou plochu Q_3, t. j. jestliže dosadíme do (5.10) ještě za a_{13} a a_{23} z (5.5c) (při současné volbě $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$) najdeme jako vrcholy takových ploch Q_3 hlavní body (3.22).

Dokázaná věta umožňuje snadnou konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů:

Konstrukce 1. Nechť h_i je jednoduchá oskulační kuželosečka křivky k_i ($i = 1, 2$) v bodě A (tedy nechť h_i má s k_i v bodě A styk 2. řádu) a nechť kuželosečky h_1, h_2 se protínají kromě v bodě A ještě v dalším bodě B ($\neq A$) průsečnice oskulačních rovin křivek k_1, k_2 sestrojených v jejich společném bodě A. Kuželosečky h_1, h_2 leží pak na dvou jednoduchých kuželových plochách. Spojnice jejich vrcholů s bodem A jsou hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A.

Zvolíme-li za h_i ($i = 1, 2$) kuželosečku mající s křivkou k_i v bodě A styk 3. řádu, pak vrcholy jednoduchých kuželových ploch určených kuželosečkami h_1, h_2 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A.

Jinou konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů v případě kdy oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stacionární a jsou různé od hlavní roviny křivek k_1, k_2 v bodě A, dostaneme užitím obou předchozích vět.

Konstrukce 2. Nechť Q je libovolná jednoduchá kvadrika mající s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 2. řádu. Oskulační rovina křivky k_i ($i = 1, 2$) v bodě A je podle předpokladu různá od tečné roviny kvadriky Q v bodě A. Protože tečny křivek k_1, k_2 neleží na Q, protíná oskulační rovina křivky k_i

$(i = 1, 2)$ v bodě A kvadriku Q v jednoduché kuželosečce h_i, která má s křivkou k_i v bodě A styk 2. řádu. Můžeme tedy kuželoseček h_1, h_2 užít k sestrojení hlavních přímek křivek k_1, k_2 v bodě A podle konstrukce I.

Zvolíme-li speciálně za Q jednoduchou kvadriku mající s křivkami k_i $(i = 1, 2)$ v bodě A styk 3. řádu, pak kuželosečka h_i $(i = 1, 2)$, v níž oskulační rovina křivky k_i v bodě A protíná Q, má s k_i v bodě A styk 3. řádu a tedy vrcholy jednoduchých kuželových ploch určených kuželosečkami k_1, k_2 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A.

Poznámka. Je-li P libovolná plocha, na níž leží dané křivky k_1, k_2 (nebo mají-li křivky k_1, k_2 v bodě A s plochou P styk alespoň 3. řádu), pak kvadrika Q mající v A s křivkami k_1, k_2 styk 3. řádu je Darbouxova kvadrika plochy P v bodě A.

Pro křivky k_1, k_2 mající v bodě A nestacionární oskulační roviny splývající s hlavní rovinou platí věta (Bompiani [2]; následující znění je formálně obecnější):

Nechť nestacionární oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají s jejich hlavní rovinou v bodě A.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby existovala kvadrika Q_3, jež nemá v A singulární bod a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk třetího řádu, jest, aby hlavní body křivek k_1, k_2 byly kolineární.

Důkaz. Za našich předpokladů, t. j. za předpokladu $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$, plyne z (5.5a, b, c) pro Q_3

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad a_{00} = a_{01} = a_{02} = a_{11} = a_{22} = 0, \\ &\text{b)} \quad \frac{\mu}{3} a_{03} + \lambda_2 a_{12} = 0, \quad \frac{\mu'}{3} a_{03} + \lambda_1' a_{12} = 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nutná a postačující podmínka, aby existovala nesložená kvadrika Q_3, jest, aby existovalo nenulové řešení rovnic (5.12b), t. j. aby platila rovnice $\mu\lambda_1' - \lambda_2\mu' = 0$. Je to rovnice (3.19) vyjadřující podmínku kolineárnosti tří hlavních bodů křivek k_1, k_2 v bodě A.

Poznámka. Za předpokladu, že hlavní body jsou kolineární, existuje svazek kvadrik, které mají s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk řádu 4. Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z rovnic (5.12a) a z podmínek

$$a_{13} = \frac{3}{\mu}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} + \frac{\mu_2}{3} - \frac{\nu\lambda_2}{4\mu}\right) a_{12}, \quad a_{23} = \frac{3}{\mu'}\left(\frac{\lambda_1'\lambda_2'}{2} + \frac{\mu_1'}{3} - \frac{\nu'\lambda_1'}{4\mu'}\right) a_{12}, \tag{5.13}$$

jež jsou důsledkem rovnic (5.5d) pro případ $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$.

Geometrickou konstrukci hlavních přímek a hlavních bodů v případě křivek k_1, k_2 se společnou nestacionární oskulační rovinou v bodě A udáme užitím kubické plochy.

Nechť je dána kubická plocha; její rovnice v souřadnicovém systému o vrcholech x_0, x_1, y_1, z je

$$K \equiv \sum_{i,j,k=0}^{3} a_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k = 0, \tag{5.14}$$

kde a_{ijk} jsou konstanty, jež nejsou současně rovny nule. Pro její průsečíky a křivkami $x = x(w)$ a $y = y(v)$ danými rovnicemi (2.10), v nichž nyní podle předpokladu je $\lambda = \lambda' = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu' \neq 0$, najdeme

$$a_{000} + 3a_{001}w + \frac{3}{2}[\lambda_0 a_{000} + \lambda_1 a_{001} + \lambda_2 a_{002} + 2a_{011}]w^2 + \Big[a_{000}(*) + a_{001}(*) + a_{002}(*) + \frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_1 a_{011} + 3\lambda_2 a_{012} + a_{111}\Big]w^3 + \Big[a_{000}(*) + a_{001}(*) + a_{002}(*) + \frac{\nu}{8}a_{003} + 3\left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu_1}{3}\right)a_{011} + \left(\frac{3}{2}\lambda_1\lambda_2 + \mu_2\right)a_{012} + \mu a_{013} + \frac{3}{4}\lambda_2^2 a_{022} + \frac{3}{2}\lambda_1 a_{111} + \frac{3}{2}\lambda_2 a_{112}\Big]w^4 + w^5(*) = 0. \tag{5.15}$$

$$a_{000} + 3a_{002}v + \frac{3}{2}[\lambda_0' a_{000} + \lambda_1' a_{001} + \lambda_2' a_{002} + 2a_{022}]v^2 + \Big[a_{000}(*) + a_{001}(*) + a_{002}(*) + \frac{1}{2}\mu' a_{003} + 3\lambda_1' a_{012} + 3\lambda_2' a_{022} + a_{222}\Big]v^3 + \Big[a_{000}(*) + a_{001}(*) + a_{002}(*) + \frac{\nu'}{8}a_{003} + \frac{3}{4}\lambda_1'^2 a_{011} + \left(\frac{3}{2}\lambda_1'\lambda_2' + \mu_1'\right)a_{012} + 3\left(\frac{\lambda_0'}{2} + \frac{\lambda_2'^2}{4} + \frac{\mu_2'}{3}\right)a_{022} + \mu' a_{023} + \frac{3}{2}\lambda_1' a_{122} + \frac{3}{2}\lambda_2' a_{222}\Big]v^4 + v^5(*) = 0. \tag{5.16}$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha K měla s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk řádu $s - 1$ ($s = 3, 4, 5$), jest, aby měla styk řádu $s - 2$ a aby kromě toho byly splněny rovnice

a) $s = 3$: $a_{000} = a_{001} = a_{002} = a_{011} = a_{022} = 0$;

b) $s = 4$: $\frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012} + a_{111} = 0$,

$$\frac{1}{2}\mu' a_{003} + 3\lambda_1' a_{012} + a_{222} = 0; \tag{5.17}$$

c) $s = 5$: $\frac{\nu}{8}a_{003} + \left(\frac{3}{2}\lambda_1\lambda_2 + \mu_2\right)a_{012} + \mu a_{013} + \frac{3}{2}\lambda_1 a_{111} + \frac{3}{2}\lambda_2 a_{112} = 0$,

$$\frac{\nu'}{8}a_{003} + \left(\frac{3}{2}\lambda_1'\lambda_2' + \mu_1'\right)a_{012} + \mu' a_{023} + \frac{3}{2}\lambda_1' a_{122} + \frac{3}{2}\lambda_2' a_{222} = 0.$$

Užitím podmínek (5.17) dokážeme větu:

Nechť oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A nejsou stacionární a nechť splývají s hlavní rovinou křivek k_1, k_2 v bodě A.

Nechť K_3 je kubická plocha, která nemá v A singulární bod, má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a má v A ovální bod (t. j. její tečná rovina v A protíná plochu v trojici přímek jdoucích bodem A).

Hlavní rovina křivek k_1, k_2 v bodě A protíná kubické plochy K_3 v trojicích přímek, jež náleží síti trojic přímek, jejíž splývající trojice jsou hlavní přímky křivek k_1, k_2 v bodě A.

Nechť K_4 je kubická plocha, která nemá v A singulární bod, má s křivkami k_1, k_2 v A styk 4. řádu a jejíž tečná rovina v A ji protíná v jediné (trojnásob počítané) přímce p.

Přímka singulárních bodů prvé poláry bodu A vzhledem ke kubické ploše K_4 protíná hlavní přímku p v hlavním bodě křivek k_1, k_2 v A.

Důkaz. Z podmínek styku (5.17a, b) najdeme, že nutná a postačující podmínka pro to, aby kubická plocha K měla s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a neměla v bodě A singulární bod, jest, aby rovnice (5.14) byla tvaru

$$\begin{gathered} a_{333}\xi_3^3 + \xi_3^2 u_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2) + 3\xi_3\xi_0(a_{003}\xi_0 + 2a_{013}\xi_1 + 2a_{023}\xi_2) + \xi_3 u_2(\xi_1, \xi_2) + \\ + 6a_{012}\xi_0\xi_1\xi_2 + \left(\frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012}\right)\xi_1^3 + 3a_{112}\xi_1^2\xi_2 + 3a_{122}\xi_1\xi_2^2 \\ + \left(\frac{1}{2}\mu' a_{003} + 3\lambda_1' a_{012}\right)\xi_2^3 = 0, \end{gathered} \tag{5.18}$$

kde

$$a_{003} \neq 0 \tag{5.19}$$

a kde u_i ($i = 1, 2$) jsou homogenní formy i-tého stupně ve vyznačených proměnných.

Z rovnice (5.18) je okamžitě zřejmé, že nutná a postačující podmínka, aby plocha (5.18) byla plochou K_3, t. j. aby její tečná rovina $\xi_3 = 0$ v bodě A ji protínala v trojici přímek jdoucích bodem A, jest, aby

$$a_{012} = 0. \tag{5.20}$$

Plocha K_3 je pak proťata tečnou rovinou $\xi_3 = 0$ v trojici přímek

$$\frac{1}{2}\mu a_{003}\xi_1^3 - 3a_{112}\xi_1^2\xi_2 - 3a_{122}\xi_1\xi_2^2 + \frac{1}{2}\mu' a_{003}\xi_2^3 = 0, \tag{5.21}$$

jež náleží lineární dvojparamtrické soustavě přímkových trojic, v níž existují právě tři různé trojice splývajících přímek; dostaneme je, položíme-li v (5.21)

$$a_{112} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(i)}\mu^{\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}}a_{003}, \quad a_{122} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(i)2}\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}}a_{003}, \tag{5.22}$$

$$\left(i = 1, 2, 3;\ \varepsilon^{(1)} = 1,\ \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nalezené přímky mají rovnici

$$\mu^{\frac{1}{3}}\xi_1 + \varepsilon^{(i)}\mu'^{\frac{1}{3}}\xi_2 = 0; \tag{5.23}$$

jsou to tedy hlavní přímky (3.13), (3.18) křivek k_1, k_2 v bodě A.

Nechť nyní K_4 je kubická plocha K (5.18), která je rovinou $\xi_3 = 0$ protata v trojnásob počítané přímce (jež je nutně hlavní přímkou) a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 4. řádu; její rovnice je

$$\begin{aligned} &a_{333}\xi_3^3 + \xi_3^2\mu_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) + 3\xi_3\xi_0(a_{003}\xi_0 + 2a_{013}\xi_1 + \\ &+ 2a_{023}\xi_2) + \xi_3\mu_2(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2}(\xi_1\mu^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{(i)}\xi_2\mu'^{\frac{1}{3}})^3 a_{003} = 0, \end{aligned} \tag{5.24}$$

v níž kromě podmínek (5.19), (5.20) a (5.22) platí ještě (5.17c).

Prvá (kvadratická) polára bodu A vzhledem k ploše (5.24) je tedy

$$\xi_3(a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 + \xi_3(*)) = 0; \tag{5.25}$$

rozpadá se zřejmě na rovinu $\xi_3 = 0$ a na další rovinu různou od $\xi_3 = 0$. Singulární body prvé poláry (5.25) vyplní přímku

$$a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 = 0. \tag{5.26}$$

Rovnici (5.26) můžeme po dosazení z (5.17c) a po vykrácení $a_{003} \neq 0$ upravit na tvar

$$8\xi_0 + (6\lambda_1 + 6\lambda_2\varepsilon^{(i)}\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} - \nu\mu^{-1})\xi_1 + (6\lambda_1'\varepsilon^{(i)2}\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{-\frac{1}{3}} + 6\lambda_2' - \nu'\mu'^{-1})\xi_2 = 0. \tag{5.27}$$

Snadno se přesvědčíme, že přímka (5.27) protíná hlavní přímku (5.23) v hlavním bodě (3.28) (kde $a_1^{(i)}$, $b_1^{(i)}$ jsou dány podmínkami (3.18) a (3.27)).

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána.

Jinou geometrickou konstrukci hlavních elementů, v případě kdy nestacionární oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě A splývají, je možno uvést užitím kubických kuželových ploch, které mají vhodně volený styk s danými křivkami k_1, k_2 v bodě A. Platí:

Nechť K_{s-1} ($s = 3, 4, 5$) je kubická kuželová plocha, která nemá vrchol v bodě A a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A, jejichž nestacionární oskulační roviny v bodě A splývají, styk řádu $s - 1$.

Nutná a postačující podmínka, aby bod prostoru byl vrcholem kuželové plochy K_2, resp. K_3, resp. K_4, jest, aby byl různý od bodu A a ležel v hlavní rovině, resp. na hlavní přímce, resp. aby byl hlavním bodem křivek k_1, k_2 v bodě A.

Důkaz. Kubická plocha K (5.14) je jednoduchou kuželovou plochou právě tehdy, když existuje právě jedno řešení rovnic

$$\sum_{k=0}^{3} a_{ijk}\xi_k = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \tag{5.28}$$

Za předpokladu, že daná kubická plocha má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 2. řádu, platí pro koeficienty a_{ijk} rovnice (5.17a).

Aby kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_2, musí nutně existovat řešení rovnic (5.28) různé od bodu $(1; 0; 0; 0)$, a tedy musí existovat nenulové řešení tří rovnic (5.28) pro $ij = 00, 01, 02$:

$$\begin{aligned} a_{003}\xi_3 &= 0, \\ a_{012}\xi_2 + a_{013}\xi_3 &= 0, \\ a_{012}\xi_1 + \qquad + a_{023}\xi_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

K tomu je nutné a stačí, aby determinant soustavy (5.29) byl nulový, t. j. aby $a_{003}a_{012}^2 = 0$. Vzhledem k tomu, že bod A musí být jednoduchým bodem plochy K_2, jest $a_{003} \neq 0$, a tedy z předchozí podmínky plyne

$$a_{012} = 0. \tag{5.30}$$

Z rovnic (5.29) již plyne, že všechny kubické kuželové plochy K_2 mají svůj vrchol v hlavní rovině $\xi_3 = 0$ křivek k_1, k_2 v bodě A. Užitím rovnic (5.28) se snadno ukáže, že také obráceně každý bod (různý od A) roviny $\xi_3 = 0$ je vrcholem kubické kuželové plochy K_2. Je-li $(\xi_0; \xi_1; \xi_2) \neq (1; 0; 0)$ libovolný pevný bod roviny $\xi_3 = 0$, pak totiž rovnice (5.28) spolu s rovnicemi (5.17a) a (5.30) představují 13 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk}, jež jsou vázány jedinou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby zvolený bod byl jediným řešením soustavy rovnic (5.28).

Aby kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_3, musí být jednak plochou K_2, jednak musí splňovat podmínky styku 3. řádu s křivkami k_1, k_2 v bodě A, a tedy pro koeficienty a_{ijk} její rovnice musí kromě (5.17a), (5.30) platit ještě podmínky (5.17b). Rovnice (5.28) musí mít řešení $(\xi_0; \xi_1; \xi_2; 0) \neq (1; 0; 0; 0)$, a tedy speciálně rovnice (5.28) pro $ij = 11, 12, 22$

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\mu a_{003}\xi_1 + a_{112}\xi_2 &= 0, \\ a_{112}\xi_1 + a_{122}\xi_2 &= 0, \\ a_{122}\xi_1 - \tfrac{1}{2}\mu' a_{003}\xi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

musí mít nenulové řešení. Vzhledem k podmínce $a_{003} \neq 0$, nutná a postačující podmínka, aby rovnice (5.31) měly nenulové řešení, je splnění rovnic

$$a_{112} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(i)}\mu^{\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}}a_{003}, \quad a_{122} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(i)2}\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}}a_{003},$$
$$\left(i = 1, 2, 3;\ \varepsilon^{(1)} = 1,\ \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \tag{5.32}$$

Nalezené podmínky jsou však podmínky (5.22), a tedy kubické kuželové plochy K_3 mají své vrcholy na hlavních přímkách křivek k_1, k_2 v bodě A.

Snadno se uváží, že obráceně každý bod hlavní přímky (různý od bodu A) je vrcholem kubické kuželové plochy K_3. Při daném bodu $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 ; 0) \neq (1 : 0 : 0 : 0)$ ležícím na hlavní přímce rovnice (5.28) spolu s rovnicemi (5.17a, b), (5.30) a (5.32) představují 14 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk}, jež jsou vázány jedinou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby zvolený bod byl jediným řešením soustavy rovnic (5.28).

Aby konečně kubická plocha (5.14) byla kuželovou plochou K_4, musí být jednak kuželovou plochou K_3, jednak musí mít s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 4. řádu. Tedy pro koeficienty a_{ijk} její rovnice kromě (5.17a, b), (5.30) a (5.32) musí ještě platit (5.17c). Souřadnice vrcholu kuželové plochy K_4 musí vyhovovat rovnicím (5.28), a tedy speciálně také rovnici pro $ij = 03$, t. j. rovnici

$$a_{003}\xi_0 + a_{013}\xi_1 + a_{023}\xi_2 = 0, \tag{5.33}$$

kde

$$\begin{aligned} a_{013} &= \frac{1}{8}(6\lambda_1 + 6\lambda_2 \varepsilon^{(i)} \mu^{-\frac{1}{3}} \mu'^{\frac{1}{3}} - \nu\mu^{-1}) a_{003}, \\ a_{023} &= \frac{1}{8}(6\lambda_1' \varepsilon^{(i)2} \mu^{\frac{1}{3}} \mu'^{-\frac{1}{3}} + 6\lambda_2' - \nu'\mu'^{-1}) a_{003}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Protože rovnice (5.33) s koeficienty (5.34) je rovnicí (5.27), vrcholy kuželových ploch K_4 jsou hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A. Obráceně každý hlavní bod je vrcholem kuželové plochy K_4. Dosadíme-li totiž souřadnice hlavního bodu do (5.28), dostaneme spolu s (5.17a, b, c), (5.30) a (5.32) celkem 15 lineárních homogenních rovnic pro 20 homogenních proměnných a_{ijk}, které jsou vázány jedinou nerovností $a_{003} \neq 0$. Je tedy možno určit a_{ijk} tak, aby hlavní bod byl jediným řešením soustavy (5.28). Tím je věta dokázána.

Závěrem uvedeme ještě jednu větu, která udává geometrickou podmínku pro kolineárnost hlavních bodů křivek k_1, k_2, které ve společném bodě A mají splývající nestacionární oskulační roviny.

Nutná a postačující podmínka, aby hlavní body křivek k_1, k_2 v bodě A byly kolineární, jest, aby existovala kubická plocha, pro niž bod A není singulární, která má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu a která prochází tečnami obou křivek k_1, k_2 v bodě A.

Důkaz. Z rovnice (5.18), která spolu s podmínkou (5.19) určuje kubickou plochu, jež nemá v A singulární bod a má s křivkami k_1, k_2 v bodě A styk 3. řádu, plyne, že tečny $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ a $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ křivek k_1, k_2 v bodě A na ní leží právě tehdy, když

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu a_{003} + 3\lambda_2 a_{012} &= 0, \\ \frac{1}{2}\mu' a_{003} + 3\lambda_1' a_{012} &= 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Rovnice (5.35) jsou dvě lineární homogenní rovnice pro neznámé a_{003}, a_{012}. Vzhledem k podmínce (5.19) musí (5.35) mít nenulové řešení. K tomu je však nutné a stačí, aby determinant soustavy byl nulový

$$\mu\lambda_1' - \mu'\lambda_2 = 0; \qquad (5.36)$$

to však je již známá rovnice (3.19) pro kolineárnost hlavních bodů.

LITERATURA

1. Bompiani E., Sul contatto di due curve sghembe, Memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna, sv. 3(8), 1925–1926. 2. Bompiani E., Invarianti d'intersezione di due curve sghembe, Rendiconti dei Lincei, XIV, serie 6a, 2° sem., sv. 11, 1931. 3. Bompiani E., Sulle curve sghembe, Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936. 4. Čech E., Projektivní diferenciální geometrie, Praha 1926. 5. Čech E., Propriétés projectives du contact I. Spisy vydávané přírod. fak. Masarykovy univ., Brno 1928, č. 91. 6. Halphen, Sur les invariants différentiels des courbes gauches, Journal de l'École Polytechnique, Paris, XXVIII, 1. 1880. 7. Urban A., Styk křivek v projektivním prostoru. Sborník I. vědecké konference ČVUT, fakulta strojní, 1956. 8. Urban A., Théorème fondamental de la théorie du contact des courbes, Чех. мат. журнал 1957, sv. 7(82), č. 2.

Došlo 27. 3. 1957.

AUGMENTATION DU CONTACT DES COURBES PAR PROJECTION

ALOIS URBAN

Résumé

Les premiers résultats dans la solution du problème d'augmentation du contact des courbes par projection sont dûs à Halphen [6], qui a trouvé, que les projections de deux courbes ayant, à un point commun, un contact d'ordre $s - 1$ ($s \geq 1$), des points d'un plan, appelé plan principal, ont le contact d'ordre s.

Plus tard, Bompiani [1] et Čech [4], [5] ont démontré qu'il existe (sous certaines suppositions) dans le plan principal une droite principale et un point principal (appartenant à la droite principale) tels que les projectiones des courbes données ont le contact d'ordre $s + 1$ où $s + 2$ lorsque le centre de la projection est situé sur la droite où dans le point en vue.

Le problème était résolu par Bompiani [2], [3], même pour les courbes n'ayant aucun point commun et pour les courbes rencontrantes l'une l'autre ($s = 1$). Dans le dernier cas, la construction géométrique n'était pas donnée

Dans ce Mémoire on s'occupe du problème d'augmentation du contact des courbes se coupantes. On déduit les résultats analytiques déjà connus par une méthode nouvelle, qui permet en même temps de donner une construction géométrique de tous les points projetant les courbes données dans les courbes ayant un contact plus grand que 0. En outre, quelques autres constructions géométriques des droites principales et des points principaux sont dévéloppées.

Étant données, dans un espace S_3, deux courbes

$$c_1 \equiv x = x(w), \qquad c_2 \equiv y = y(v), \tag{1}$$

ayant au point commun A, correspondant aux valeurs $w = 0$ et $v = 0$, un contact d'ordre précisément 0, les points $x_0 = y_0$, x_1, y_1 $\left(\left[\dfrac{d^r x(w)}{dw^r}\right]_{w=0} = x_r, \left[\dfrac{d^r y(v)}{dv^r}\right]_{v=0} = y_r\right)$ déterminent un plan (le plan principal) tangent au point A simultanément les courbes c_1, c_2.

Si l'on choisit un point z de telle manière que les points x_0, x_1, y_1, z soient linéairement indépendants, on peut écrire

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 + \lambda z, & y_2 &= \lambda'_0 x_0 + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 y_1 + \lambda' z, \\ x_3 &= \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mu z, & y_3 &= \mu'_0 x_0 + \mu'_1 x_1 + \mu'_2 y_1 + \mu' z, \\ x_4 &= \nu_0 x_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 y_1 + \nu z, & y_4 &= \nu'_0 x_0 + \nu'_1 x_1 + \nu' y_1 + \nu' z. \end{aligned} \tag{2}$$

En dévéloppant les fonctions (1) en séries, en faisant usage de (2), en introduisant la correspondance analytique

$$w = F(v) = a_1 v + \frac{a_2}{2} v^2 + \frac{a_3}{3!} v^3 + \frac{a_4}{4!} v^4 + \ldots, \quad c_1 \neq 0, \tag{3}$$

et en multipliant les fonctions x par le facteur

$$\varrho = 1 + b_1 v + \frac{b_2}{2} v^2 + \frac{b_3}{3!} v^3 + \frac{b_4}{4!} v^4 + \ldots \tag{4}$$

(Čech [5], Urban [7], [8]), on obtient en définitive

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \varrho(v) x(F(v)) = x_0 \Big| & 1 + b_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_0 a_1^2 + b_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_0 h_1 + \mu_0 a_1^3 + b_3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_0 h_2 + \\ & \mu_0 h_3 + \nu_0 a_1^4 + b_4) v^4 + \ldots \Big| + x_1 \Big| a_1 v + \frac{1}{2} (\lambda_1 a_1^2 + 2 a_1 b_1 + a_2) v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_1 h_1 + \mu_1 a_1^3 + \\ & 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 + a_3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_1 h_2 + \mu_1 h_3 + \nu_1 a_1^4 + 4 a_1 b_3 + 6 a_2 b_2 + 4 a_3 b_1 + a_4) v^4 + \ldots \Big| + \\ & y_1 \Big| \frac{1}{2} \lambda_2 a_1^2 v^2 + \frac{1}{3!} (\lambda_2 h_1 + \mu_2 a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda_2 h_2 + \mu_2 h_3 + \nu_2 a_1^4) v^4 + \ldots \Big| + z \Big| \frac{1}{2} \lambda a_1^2 v^2 + \\ & \frac{1}{3!} (\lambda h_1 + \mu a_1^3) v^3 + \frac{1}{4!} (\lambda h_2 + \mu h_3 + \nu a_1^4) v^4 + \ldots \Big|. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y = x_0 \Big| & 1 + \frac{\lambda'_0}{2} v^2 + \frac{\mu'_0}{3!} v^3 + \frac{\nu'_0}{4!} v^4 + \ldots \Big| + x_1 \Big| \frac{\lambda'_1}{2} v^2 + \frac{\mu'_1}{3!} v^3 + \frac{\nu'_1}{4!} v^4 + \ldots \Big| + \\ & y_1 \Big| v + \frac{\lambda'_2}{2} v^2 + \frac{\mu'_2}{3!} v^3 + \frac{\nu'_2}{4!} v^4 + \ldots \Big| + z \Big| \frac{\lambda'}{2} v^2 + \frac{\mu'}{3!} v^3 + \frac{\nu'}{4!} v^4 + \ldots \Big| \end{aligned}$$

où $h_1 = 3(a_1 a_2 + a_1^2 b_1)$, $h_2 = 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 + 12 a_1 a_2 b_1 + 6 a_1^2 b_2$, $h_3 = 2(3 a_1^2 a_2 + 2 a_1^3 b_1)$.

Étant donné n'importe quel centre de projection S et plan de projection ξ, dont les coordonnées sont assujetties à la condition $(S, \xi) = 1$, les projections C_1, C_2 des courbes c_1, c_2 sont données par les équations

$$C_1 \equiv X = \tilde{x} - (\tilde{x}, \xi) S, \qquad C_2 \equiv Y = y - (y, \xi) S. \tag{6}$$

On trouve, des relations

$$X_r = Y_r \; (r = 0, 1, 2, \ldots, \sigma - 1) \tag{7}$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les projections C_1, C_2

aient un contact d'ordre $\sigma + 1$ $(\sigma \geqq 1)$ au projection A' du point A, qu'il existe des nombres a_r, b_r, $(r = 1, \ldots, \sigma + 1;\ a_1 \neq 0)$ tels que les équations

$$g_r S = \tilde{x}_r + y_r \quad (r = 0, 1, \ldots, \sigma + 1) \tag{8}$$

sont satisfaites.

On peut déduire des conditions (8) (Bompiani [2]):

Théorème 1. *Les courbes C_1, C_2 ont au point A' un contact d'ordre 1 lorsque et seulement lorsque S est un point du plan principal, qui n'appartient pas aux tangentes des courbes c_1, c_2 au point A.*

L'équation du plan principal est

$$g_1 S = b_1 x_0 + a_1 x_1 + y_1. \tag{9}$$

Théorème 2. *Si les plans osculateurs des courbes c_1, c_2 au point A sont différents du plan principal, il y a, au plan principal, deux droites distinctes (droites principales) passantes par le point A; les courbes c_1, c_2 se projettent des points $(\neq A)$ de cettes droites aux courbes ayant au point A' un contact d'ordre 2. Les deux couples des droites principales et des tangentes des courbes c_1, c_2 au point A sont harmoniques. Sur chaque droite est situé un tel point (point principal), que les projections C_1, C_2 des courbes c_1, c_2 de ces points ont un contact d'ordre 3.*

Les droites principales sont données par l'équation (9), où $a_1 = \pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}$. Si nous choisissons z sur la droite d'intersection des plans osculateurs, les points principaux sont

$$\left|\lambda\lambda'(\lambda\,\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_1\lambda'^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(\mu'\lambda^{\frac{3}{2}} - \mu\lambda'^{\frac{3}{2}})\right| x_0 + \lambda\lambda'^{\frac{3}{2}} x_1 + \lambda^{\frac{3}{2}}\lambda' y_1.$$

Théorème 3. *Si les plans osculateurs des courbes c_1, c_2 au point A et le plan principal sont confondus, les courbes c_1, c_2 se projettent de chaque point $(\neq A)$ du plan principal dans les courbes ayant au point A' un contact d'ordre 2. Si le plan principal n'est pas stationnaire pour aucune des courbes c_1, c_2, il y a dans le plan principal trois droites distinctes (les droites principales) passantes par le point A, des points desquelles $(\neq A)$ les courbes c_1, c_2 se projettent dans les courbes ayant au point A' un contact d'ordre 3. Les trois droites principales forment un triple des droites apolaire par rapport au couple des tangentes des courbes c_1, c_2 au point A. Sur chaque droite principale il y a un point (point principal); les courbes c_1, c_2 se projettent de ce point dans les courbes ayant un contact d'ordre 4. Les points principaux sont colinéaires alors et alors seulement si l'équation $\mu\lambda_1' - \mu'\lambda_2 = 0$ est vraie.*

Les droites principales sont données par l'équation (9), où on doit poser pour a_1 l'un des nombres $a_1^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\sqrt[3]{\frac{\mu'}{\mu}}\left(\varepsilon^{(1)} = 1,\ \varepsilon^{(2)} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^{(3)} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$. En choisissant un des nombres $a_1^{(i)}(i = 1, 2, 3)$, les points principaux sont donnés par (9), où on pose b_1 égal à

$$b_1^{(i)} = \frac{1}{8}(-6\varepsilon^{(i)}\lambda_1\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} + 6\varepsilon^{(i)}\lambda_1'\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{-\frac{1}{3}} - 6\varepsilon^{(i)2}\lambda_2\mu^{-\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}} + 6\lambda_2' - \varepsilon^{(i)}\nu\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} - \nu'\mu'^{-1}).$$

Pour donner l'interprétation géométrique des résultats trouvés, nous rappelons que la correspondance analytique

$$u = \Phi(v) = \varkappa_1 v + \frac{\varkappa_2}{2}v^2 + \ldots,\ \varkappa_1 \neq 0, \tag{10}$$

détermine une surface réglée dans la congruence des droites donnée par les courbes focales c_1, c_2. Sa génératrice $p(0)$ passante par le point A est donnée par l'expression $p(v) = (y(v), x(\Phi(v))) = (x_0, \varkappa_1 x_1 + y_1)v + v^2(.)$ pour $v \to 0$

$$p(0) = \lim_{v \to 0} \frac{p(v)}{v} = (x_0, \varkappa_1 x_1 + y_1). \tag{11}$$

Si la surface (10) est dévéloppable, la condition que les plans tangents aux points $x(\Phi(v))$ et $y(v)$ de la droite $p(v)$ sont confondus ($v \neq 0$) nous donne l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \varkappa_1 v^2(\lambda \varkappa_1^2 + \lambda') + v^3 \Big| -\frac{1}{2} \varkappa_2 \lambda' + \lambda \varkappa_1^2 \varkappa_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1' \lambda + \lambda_1 \lambda') \varkappa_1^2 + \frac{1}{2}(\lambda_2 \lambda' + \lambda_2' \lambda) \varkappa_1^3 + \\ &\frac{1}{3} \mu \varkappa_1^4 + \frac{1}{3} \mu' \varkappa_1 \Big| + v^4 \Big| \varkappa_2 \left(\frac{5}{6} \mu \varkappa_1^3 - \frac{1}{3} \mu'\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{12} \mu \varkappa_1^5 + \frac{1}{3} \mu' \varkappa_1^2\right) + \frac{1}{4} \lambda_1' \mu \varkappa_1^3 + \\ &\frac{1}{4} \lambda_2 \mu' \varkappa_1^3 + \frac{1}{3} \lambda_2' \left(\mu \varkappa_1^4 + \frac{1}{4} \mu' \varkappa_1\right) + \frac{1}{8} \nu \varkappa_1^5 + \frac{1}{8} \nu' \varkappa_1 + \lambda(.) + \lambda'(.) \Big| + v^5(.) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

valable identiquement pour chaque v. En supposant que les plans osculateurs des courbes c_1, c_2 au point A et le plan principal sont distincts (et en choisissant $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$) nous trouvons $\varkappa_1 = \sqrt{-\frac{\lambda'}{\lambda}}$; en supposant que les plans osculateurs ne sont pas stationnaires, mais sont confondus avec le plan principal ($\lambda = \lambda' = 0$), nous obtenons $\varkappa_1 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\mu'}{\mu}}$, $\varepsilon^3 = 1$. En comparant les résultats trouvés avec les théorèmes 2 et 3, nous obtenons:

Théorème 4. *Chaque droite principale au point A des courbes c_1, c_2 (et seulement une telle droite) est la droite de la surface dévéloppable (qui n'est pas un cône projetant une courbe donnée du point d'autre courbe donnée) appartenante au congruence des droites déterminée par les courbes c_1, c_2.*

Si

$$u = u(v) = \beta_0 + \beta_1 v + \frac{\beta_2}{2} v^2 + v(.) \tag{13}$$

est l'équation de l'arête de rebroussement de la surface dévéloppable, son point $X(v)$ sur la droite $p(v)$ est donné par $X(v) = v(\beta_1 x_0 + \varkappa_1 x_1 + y_1) + v^2(.)$ et c'est pourquoi le point $X(0)$ sur $p(0)$ est déterminé par

$$X(0) = \lim_{v \to 0} \frac{X(v)}{v} = \beta_1 x_0 + \varkappa_1 x_1 + y_1. \tag{14}$$

Le plan tangent de la surface dévéloppable au point de l'arête de rebroussement étant indéterminé, nous trouvons l'équation

$$\begin{aligned} v \varkappa_1(1 + \beta_0) + v^2 \Big\{ &\beta_1 \varkappa_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta_0\right) \varkappa_2 + \lambda_1 \varkappa_1^2 \left(\frac{1}{2} + \beta_0\right) + \frac{1}{2} \lambda_1' + \frac{1}{2} \lambda_2 \beta_0 \varkappa_1^3 + \\ &+ \lambda_2' \varkappa \left(\frac{1}{2} \beta_0 + 1\right) \Big\} + v^3(.) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

valable identiquement pour chaque v. On en peut déterminer β_1. En supposant que les plans osculateurs des courbes c_1, c_2 au point A et le plan principal sont distincts, on obtient (en choisissant $\lambda_2 = \lambda_1' = 0$)

$$\beta_1 = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon \lambda_1 \lambda'^{\frac{1}{2}} - \lambda_2' \lambda^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} \varepsilon \lambda^{-\frac{3}{2}} \lambda'^{-1}(\mu \lambda'^{\frac{3}{2}} + \varepsilon \mu' \lambda^{\frac{3}{2}}), \quad \varepsilon^2 = 1;$$

en supposant que tous les deux plans osculateurs (qui ne sont pas stationnaires) et le plan principal sont confondus, on obtient

$$\beta_1 = -\frac{3}{4}(\varepsilon\lambda_1\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2\lambda_1'\mu^{\frac{1}{3}}\mu'^{-\frac{1}{3}} + \varepsilon^2\lambda_2\mu^{-\frac{2}{3}}\mu'^{\frac{2}{3}} + \lambda_2') + \frac{1}{8}(\varepsilon r\mu^{-\frac{1}{3}}\mu'^{\frac{1}{3}} + r'\mu'^{-1}),\ \varepsilon^3 = 1.$$

En comparant les résultats trouvés avec les théorèmes 2 et 3, nous trouvons:

Théorème 5. *Chaque point principal au point A des courbes c_1, c_2 (et seulement un tel point) est le point de l'arête de rebroussement de la surface dévéloppable (qui n'est pas un cône projetant une courbe donnée du point d'autre courbe donnée) appartenante au congruence des droites déteminée par les courbes c_1, c_2.*

En utilisant des cônes quadratiques et cubiques ayant avec des courbes données c_1, c_2 au point A un contact d'ordre convenablement choisi, on a trouvé encore quelques constructions ultérieures des droites principales et des points principaux.

On peut démontrer particulièrement la construction suivante (en supposant que les plans osculateurs des courbes données au point A ne sont pas stationnaires et sont différents du plan principal): Si les courbes c_1, c_2 sont situées sur une surface $\varkappa$, on détermine une quadrique Q ayant avec la surface $\varkappa$ au point A un contact d'ordre 3. Les plans osculateurs des courbes c_1, c_2 au point A rencontrent la quadrique Q aux coniques h_1, h_2. Les droites joignantes les sommets des cônes déterminés par h_1, h_2 avec le point A sont les droites principales, les sommets des cônes sont les points principaux.