Tibor Šalát

O istých priestoroch radov s Bairovskou metrikou

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 7 (1957), No. 4, 193--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126680

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VII ČÍSLO 4

O ISTÝCH PRIESTOROCH RADOV S BAIROVSKOU METRIKOU

TIBOR ŠALÁT
Katedra matematiky Univerzity Komenského v Bratislave

Nech

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

je rad s kladnými členmi. Nech

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \tag{2}$$

je postupnosť, v ktorej pre každé prirodzené n je $\varepsilon_n = 1$ alebo -1.

Označme znakom X množinu všetkých radov x, kde

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$

X je zrejme nespočítateľná množina mohutnosti kontinua. Ďalej definujme na množine $X \times X$ funkciu $\varrho(x, y)$ takto: Ak $x, y \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots,$$
$$y = \varepsilon'_1 a_1 + \varepsilon'_2 a_2 + \ldots + \varepsilon'_n a_n + \ldots,$$

potom $\varrho(x, y) = 0$, ak $x = y$, ak však $x \neq y$, potom $\varrho(x, y) = \frac{1}{k}$, kde k je najmenší index s vlastnosťou: $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$. V práci [3] je dokázané, že takto definovaná funkcia je metrikou na X. O priestore (X, ϱ) je taktiež v [3] dokázané, že je to kompaktný priestor. Metrika $\varrho(x, y)$ je zrejme analogická s metrikou Bairovho priestoru.

V prvých dvoch odsekoch tejto práce budeme predpokladať, že rad (1) konverguje. V treťom odseku podáme isté zovšeobecnenie výsledkov práce [4] pre divergentné rady.

I.

Nech (1) je konvergentný rad. Pre každé $x \in X$ $S(x)$ značí súčet radu x. $S(x)$ je funkcia definovaná na celom priestore X. V práci [3] je dokázané, že $S(x)$ je spojitá na (X, ϱ). Označme znakom W množinu všetkých tých reálnych čísel, z ktorých každé je súčtom nejakého radu $x \in X$, teda $W = S(X)$. Zrejme $W \subset \langle -A, A \rangle$, kde A je súčet radu (1).

V tomto odseku budeme vyšetrovať podmienky, za ktorých je $S(x)$ prostým (alebo homeomorfným) zobrazením.

Pre stručnosť vyjadrovania zavedieme toto pomenovanie: Postupnosť $\{\eta_l\}_l$, kde index l prebieha nejakú spočítateľnú množinu prirodzených čísel a η_l je pre každé l jedným z čísel $0, 1, -1$, budeme nazývať postupnosťou typu (η).

Dokážeme túto pomocnú vetu:

Lemma 1. *Nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby funkcia $S(x)$ bola prostá na X, je, aby pre každé prirodzené k a pre každú postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu (η) platil výrok: Rad*

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+n}a_{k+n} + \ldots$$

má nenulový súčet.

Dôkaz.

1. Nech funkcia $S(x)$ nie je prostá na (X, ϱ). Potom existujú dva rôzne rady $x, y \in X$ také, že platí: $S(x) = S(y)$. Nech

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots \tag{3}$$

$$y = \varepsilon'_1 a_1 + \varepsilon'_2 a_2 + \ldots + \varepsilon'_n a_n + \ldots \tag{4}$$

Nech $\varrho(x, y) = \dfrac{1}{k}$, $k \geq 1$. Potom rad

$$2\varepsilon_k a_k + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon'_{k+1})a_{k+1} + \ldots + (\varepsilon_{k+n} - \varepsilon'_{k+n})a_{k+n} + \ldots,$$

ktorý vznikol odčítaním radov (3), (4), má nulový súčet a ten istý súčet má zrejme aj rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+n}a_{k+n} + \ldots,$$

kde $\eta_l = \dfrac{\varepsilon_l - \varepsilon'_l}{2\varepsilon_k}$. Pritom η_l nadobúda jednu z hodnôt $0, 1, -1$.

2. Nech existuje prirodzené číslo k a postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu (η) taká, že platí: Rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \eta_{k+n}a_{k+n} + \ldots$$

má nulový súčet. Zostrojme rady

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k + \varepsilon_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+n}a_{k+n} + \ldots, \tag{5}$$

$$y = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} - a_k + \varepsilon'_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \varepsilon'_{k+n}a_{k+n} + \ldots \tag{6}$$

také, aby $x, y \in X$ a aby pre každé $l = k + 1, k + 2, \ldots$ platilo $\eta_l = \dfrac{\varepsilon_l - \varepsilon'_l}{2}$.

To je zrejme možné. Ak totiž $\eta_l = 0$, kladieme $\varepsilon_l = \varepsilon'_l = 1$, ak $\eta_l = 1$, kladieme $\varepsilon_l = 1$, $\varepsilon'_l = -1$ a konečne, ak $\eta_l = -1$, kladieme $\varepsilon_l = -1$, $\varepsilon'_l = 1$. Rady (5), (6) sú dva rôzne body priestoru (X, ϱ) a pritom zrejme $S(x) = S(y)$.

Označme v ďalšom znakom R_k zvyšok po k-tom člene v rade (1).

Veta 1.

a) *Nech aspoň pre jedno prirodzené číslo k platí $a_k = R_k$. Potom $S(x)$ nie je prostá funkcia.*

b) *Nech pre všetky prirodzené čísla k platí $a_k > R_k$. Zobrazenie $S(x)$ je vtedy prosté, dokonce homeomorfné.*

c) *Nech existuje prirodzené číslo n s vlastnosťou takou, že pre všetky prirodzené $k \geq n$ je $a_k \leq R_k$. Potom $S(x)$ nie je prostá funkcia.*

Dôkaz.

a) Z podmienky $a_k = R_k$ vyplýva, že rad

$$a_k + \eta_{k+1}a_{k+1} + \dots + \eta_{k+j}a_{k+j} + \dots,$$

$\eta_l = -1$ pre každé $l = k+1, k+2, \dots$ má nulový súčet, a teda podľa lemmy 1 $S(x)$ nie je prosté zobrazenie.

b) Pre každé prirodzené k a pre každú postupnosť $\{\eta_l\}_l$ typu (η) platí:

$$a_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \eta_l a_l \geq a_k - R_k > 0,$$

v dôsledku toho rad $a_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \eta_l a_l$ má nenulový súčet a tvrdenie vyplýva zase z lemmy. Zobrazenie $S(x)$ je teda podľa lemmy 1 prosté. Keďže $S(x)$ je podľa dokázaného a podľa [3] spojité prosté zobrazenie priestoru (X, ϱ) na W (W s euklidovskou metrikou), je $S(x)$ podľa známych viet o spojitých zobrazeniach kompaktných priestorov homeomorfným zobrazením priestoru (X, ϱ) na W. (Pozri [1], str. 135.)

c) Nech existuje prirodzené číslo n také, že pre všetky prirodzené $k \geq n$ platí $a_k \leq R_k$. Potom podľa [3] existuje taká postupnosť $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ typu (2), že súčet radu $\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k a_k$ je nula. Potom rad $a_n + \sum_{l=n+1}^{\infty} \eta_l a_l$, kde $\eta_l = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_n}$ pre každé $l = n+1, n+2, \dots$, má nulový súčet a postupnosť $\{\eta_l\}_l$ je zrejme postupnosťou typu (η). Z lemmy 1 vyplýva správnosť tvrdenia.

2.

V tomto odseku budeme zase predpokladať, že rad (1) konverguje.

Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo k v rade (1) platí $a_k > R_k$. Podľa vety 1 je $S(x)$ prosté (dokonce homeomorfné) zobrazenie priestoru (X, ϱ) na množinu W. V práci [5] je dokázané, že $\mu(W) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot R_n$ aj v [5] vidíme, že ku každému nezápornému číslu x možno zostrojiť rad $\sum_{1}^{\infty} a_n$ taký, že k tomuto radu príslušná množina W má mieru $\mu(W) = x$.

V tomto odseku sa budeme zaoberať štúdiom mier niektorých špeciálnych podmnožín množiny W.

Nech $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_k^0$ je pevne zvolená konečná postupnosť, ktorej členy sú 1 alebo -1. Označme znakom $M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_k^0 \end{pmatrix}$ množinu všetkých tých čísel $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, kde

$$x = \varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \ldots + \varepsilon_k^0 a_k + \varepsilon_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+n} a_{k+n} + \ldots,$$

pričom postupnosť $\{\varepsilon_l\}_{l=k+1}^{\infty}$ prebieha všetky možné postupnosti, ktorých členy sú 1, resp. -1.

Veta 2. *Pre mieru $\mu(M)$ množiny $M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots k \\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_k^0 \end{pmatrix}$ platí, že $\mu(M) = \frac{1}{2^k}\mu(W)$.*

Dôkaz. Zrejme $\mu(M) = \mu(W_{k+1})$, kde W_{k+1} je množina všetkých tých reálnych čísel, ktoré sú súčtami radov tvaru

$$\varepsilon_{k+1} a_{k+1} + \varepsilon_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \varepsilon_{k+n} a_{k+n} + \ldots,$$

kde $\varepsilon_l = 1$ alebo -1 pre každé $l = k+1, k+2, \ldots$. Podľa [5] je $\mu(W_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} R_n^*$, kde R_n^* je zvyšok po n-tom člene v rade

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n} + \ldots$$

Teda

$$R_n^* = a_{k+n+1} + a_{k+n+2} + \ldots + a_{k+n+l} + \ldots = R_{k+n},$$

takže

$$\mu(M) = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} . R_{k+n} = \frac{1}{2^k} \lim_{n\to\infty} 2^{k+n+1} . R_{k+n} = \frac{1}{2^k} . \mu(W).$$

Tým je dôkaz hotový.

Tento výsledok možno ľahko zovšeobecniť. Nech $j_1, j_2, \ldots j_k$ sú prirodzené čísla, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Nech $\varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \ldots \varepsilon_{jk}^0$ je pevne zvolená konečná postupnosť, ktorej členy sú 1, resp. -1. Označme znakom $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \ldots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$ množinu všetkých tých čísel $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, kde

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_{j1-1} a_{j1-1} + \varepsilon_{j1}^0 a_{j1} + \ldots + \varepsilon_{jk-1} a_{jk-1} + \varepsilon_{jk}^0 a_{jk} + \varepsilon_{jk+1} a_{jk+1} + \ldots,$$

pričom $\varepsilon_l = 1$ alebo -1 pre všetky indexy $l \neq j_1, j_2, \ldots j_k$.

Veta 3. *Pre mieru $\mu(M)$ množiny $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots j_k \\ \varepsilon_{j1}^0, \varepsilon_{j2}^0, \ldots \varepsilon_{jk}^0 \end{pmatrix}$ platí $\mu(M) = \frac{1}{2^k} . \mu(W)$.*

Dôkaz. Zrejme platí, že

$$M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_{j1}, \varepsilon^0_{j2}, \dots, \varepsilon^0_{jk}\end{pmatrix} = \bigcup_{(\varepsilon^0_1 \dots \varepsilon^0_{j_1-1}, \varepsilon^0_{j_1+1}, \dots \varepsilon^0_{j_k-1})} M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j_1, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_1, \varepsilon^0_2, \dots, \varepsilon^0_{j1}, \dots, \varepsilon^0_{jk}\end{pmatrix}.$$

Zjednotenie vpravo treba brať cez všetky možné konečné postupnosti $(\varepsilon^0_1 \dots \varepsilon^0_{j_1-1}, \varepsilon^0_{j_1+1}, \dots \varepsilon^0_{j_k-1})$, ktorých členy sú 1 alebo -1. Teda ide o zjednotenie 2^{j_k-k} množín. Tieto množiny sú po dvoch disjunktné. Skutočne, nech jedna z nich patrí k postupnosti

$$\varepsilon^0_1, \dots \varepsilon^0_{j_1-1}, \varepsilon^0_{j_1+1}, \dots \varepsilon^0_{j_k-1} \tag{a}$$

a druhá k postupnosti

$$\bar{\varepsilon}^0_1, \dots \bar{\varepsilon}^0_{j_1-1}, \bar{\varepsilon}^0_{j_1+1}, \dots \bar{\varepsilon}^0_{j_k-1} \tag{b}$$

a nech (a), (b) sú dve rôzne postupnosti. Nech l je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou: $\varepsilon^0_l \neq \bar{\varepsilon}^0_l$ a nech $\varepsilon^0_l = 1$ a $\bar{\varepsilon}^0_l = -1$ (v opačnom prípade je dôkaz analogický). Vtedy zrejme všetky prvky množiny prislúchajúcej k postupnosti (a) ležia vpravo od čísla $\varepsilon^0_1 a_1 + \dots + \varepsilon^0_{l-1} a_{l-1}$, kdežto všetky prvky množiny prislúchajúcej k postupnosti (b) ležia vľavo od čísla $\varepsilon^0_1 a_1 + \dots + \varepsilon^0_{l-1} a_{l-1}$.

Preto

$$\mu(M) = \sum_{(\varepsilon^0_1, \dots \varepsilon^0_{j_1-1}, \varepsilon^0_{j_1+1} \dots \varepsilon^0_{j_k-1})} \mu\left(M\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_1, \varepsilon^0_2, \dots, \varepsilon^0_{j_k}\end{pmatrix}\right) = 2^{j_k-k}\frac{1}{2^{j_k}}\cdot\mu(W) = \frac{1}{2^k}\cdot\mu(W).$$

Tým je dôkaz hotový.

Poznámka. Pri pevnom k je množina W zjednotením množín $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_{j1}, \varepsilon^0_{j2}, \dots, \varepsilon^0_{jk}\end{pmatrix}$, teda

$$W = \bigcup_{(\varepsilon^0_{j1}, \dots, \varepsilon^0_{jk})} M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_{j1}, \varepsilon^0_{j2}, \dots, \varepsilon^0_{jk}\end{pmatrix}$$

Vpravo sa sčituje cez všetky konečné postupnosti $(\varepsilon^0_{j1}, \varepsilon^0_{j2}, \dots, \varepsilon^0_{jk})$, ktorých členy sú 1, resp. -1.

Nech $x \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n + \dots \tag{7}$$

Nech $f(n, x)$ značí počet členov $+1$ v postupnosti $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, podobne $g(n, x)$ značí počet členov -1 v tej istej postupnosti. Teda pre každé prirodzené číslo n platí $f(n, x) + g(n, x) = n$.

Pre stručnosť budeme hovoriť, že rad (7) je znamienkovým rozvojom čísla w (vzhľadom na rad (1)), ak $w = S(x)$.

Zaveďme ďalej označenie

$$D^*(f, x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad D^*(f, x) = \liminf_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n},$$

$$D^*(g, x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{g(n, x)}{n}, \quad D^*(g, x) = \liminf_{n \to \infty} \frac{g(n, x)}{n}.$$

Čísla $D^*(f, x)$, resp. $D^*(g, x)$ budeme nazývať hornou hustotou čísel 1, resp. -1 v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, podobne čísla $D^*(f, x)$, resp. $D^*(g, x)$ dolnou hustotou čísel 1, resp. -1 v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$. Zrejme $D^*(f, x) \in \langle 0, 1 \rangle$, podobne pre $D^*(f, x)$, $D^*(g, x)$, $D^*(g, x)$.

Platí veta:

Veta 4. *Nech W^* je množina všetkých tých $w = S(x) \in W$, pre ktoré nie je splnená aspoň jedna z nasledujúcich nerovností:*

$$D^*(f, x) \leq \frac{1}{2}, \quad D^*(f, x) \geq \frac{1}{2}.$$

Potom pre mieru $\mu(W^*)$ množiny W^* platí: $\mu(W^*) = 0$.

Poznámka.

a) Analogické tvrdenie platí aj pre čísla $D^*(g, x)$, $D^*(g, x)$ a je jednoduchým dôsledkom vyslovenej vety.

b) Teda podľa vyslovenej vety pre skoro všetky čísla $w = S(x) \in W$ platí

$$D^*(f, x) \leq \frac{1}{2} \leq D^*(f, x).$$

Dôkaz vety.

Zrejme $W^* = W_1^* \cup W_2^*$, kde W_1^* je množina všetkých $w \in W$, pre ktoré platí: $w = S(x)$ a $D^*(f, x) < \frac{1}{2}$, W_2^* je množina všetkých tých $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, $D^*(f, x) > \frac{1}{2}$. Ukážeme, že $\mu(W_1^*) = 0$, podobne sa dá dokázať, že $\mu(W_2^*) = 0$ a potom aj $\mu(W^*) = 0$.

Nech τ je pevne zvolené kladné číslo, $0 < \tau < \frac{1}{2}$. Nech N je pevne zvolené prirodzené číslo. Označme znakom $W_1^*(\tau, N)$ množinu všetkých tých $w \in W$, pre ktoré platí $w = S(x)$, a pre všetky $n \geq N$ je $\frac{f(n, x)}{n} < \tau$. Teda $f(n, x) \leq [\tau n]$ pre všetky $n \geq N$. Teda v znamienkovom rozvoji čísla w, t. j. v x

$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$ je na prvých n miestach ($n \geq N$) najviac $[\tau n]$ členov rovných $+1$. Myslime si n pevne zvolené. Zrejme

$$W_1^*(\tau, N) \subset \bigcup_{(\varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_n^0)} M\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, n\\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0\end{pmatrix},$$

kde $(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0)$ (8) prebieha všetky také konečné postupnosti o n členoch, ktorých členy sú $+1$ alebo -1 a ktoré neobsahujú viac než $[\tau n]$ členov $+1$. Keďže existuje jediná postupnosť (8) neobsahujúca žiadny člen $+1$, ďalej existuje práve $\binom{n}{1}$ postupností tvaru (8), ktoré obsahujú jediný člen $+1$ atď., zrejme platí, že

$$\mu(W_1^*(\tau, N)) \leq \left[1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n_1}\right] \mu\left(M\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, n\\ \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0\end{pmatrix}\right),$$

$(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_n^0)$ je pevne zvolená postupnosť tvaru (8)

a $n_1 = [\tau n]$. Keďže $0 < \tau < \frac{1}{2}$, $\binom{n}{i} \leq \binom{n}{n_1}$ pre všetky $i = 0, 1, 2, \ldots, n_1$. Teda

$$\mu(W_1^*(\tau, N)) \leq (1 + n_1)\binom{n}{n_1}\frac{1}{2^n} \cdot \mu(W). \qquad (9)$$

Nerovnosť (9) platí pre všetky $n \geq N$. Ukážeme, že limita pravej strany v (9) pre $n \to +\infty$ je 0. Za tým účelom označme znakom $\varphi(n)$ súčin $(1 + n_1)\binom{n}{n_1}\frac{1}{2^n}$, vtedy podľa Stirlingovej formuly dostávame

$$\varphi(n) = (1 + n_1)\frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1 + o(1)) \cdot 2^{-n}}{\sqrt{2\pi n_1}\, n_1^{n_1} e^{-n_1}\sqrt{2\pi(n - n_1)}\,(n - n_1)^{n - n_1} e^{-(n - n_1)}(1 + o(1))}$$

Keďže

$$(1 + n_1)\frac{\sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi n_1}\sqrt{2\pi(n - n_1)}\,(1 - o(1))} = O(n^{\frac{1}{2}}),$$

je

$$\varphi(n) = O(n^{\frac{1}{2}})\frac{n^n e^{-n} \cdot 2^{-n}}{n_1^{n_1} e^{-n_1}(n - n_1)^{n - n_1} e^{-(n - n_1)}} \leq$$

$$\leq O(n^{\frac{1}{2}}) . O(e^{\log n - n(\log 2 + \varphi(\tau))}),$$

kde

$$\varphi(\tau) = (1 - \tau)\log(1 - \tau) + \left(\tau - \frac{1}{n}\right)\log\left(\tau - \frac{1}{n}\right);\ \frac{1}{n} < \tau.$$

Uvážme ďalej, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tau-\frac{1}{n}\right)\log\left(\tau-\frac{1}{n}\right)=\tau\log\tau,$$

preto

$$\varphi(\tau)=(1-\tau)\log(1-\tau)+\tau\log\tau+o(1).$$

Položme

$$\varphi_1(\eta)=(1-\eta)\log(1-\eta)+\eta\log\eta$$

pre

$$0<\eta<\frac{1}{2},\quad \varphi_1'(\eta)=\log\frac{\eta}{1-\eta}<0$$

$$\text{v }\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \text{t. j. } \varphi_1(\eta) \text{ klesá v } \left(0,\frac{1}{2}\right),$$

a teda

$$\varphi_1(\tau)>\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\log 2,$$

teda

$$\varphi_1(\tau)=-\log 2+\delta,$$

kde

$$\delta>0.$$

Potom

$$\varphi(\tau)=\varphi_1(\tau)+o(1)=-\log 2+\delta+o(1),$$

a preto

$$q(n)=O(n^{\frac{1}{2}}).O(e^{\log n-n\delta_1}),\quad 0<\delta_1<\delta,$$

takže

$$q(n)=O(n^{\frac{3}{2}}e^{-n\delta_1})=o(1).$$

V dôsledku toho $\mu(W_1^*(\tau,N))=0$ pre každé prirodzené N.

Označme pri pevnom τ, $0<\tau<\frac{1}{2}$ znakom $W_1^*(\tau)$ množinu všetkých tých $w\in W$, pre ktoré platí $w=S(x)$, $D^*(f,x)<\tau$. Zrejme vtedy

$$W_1^*(\tau)\subset\bigcup_{N=1}^{\infty}W_1^*(\tau,N),$$

a preto

$$\mu(W_1^*(\tau))=0.$$

Nech teraz je $\{\tau_n\}_1^\infty$ ľubovoľná postupnosť kladných reálnych čísel $\tau_n<\frac{1}{2}$ pre všetky $n=1,2,3,\ldots$ a nech $\tau_n\to\frac{1}{2}$. Potom podľa dokázaného je

$$\mu(W_1^*(\tau_n))=0$$

pri každom pevnom n.

Zrejme

$$W_1^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_1^*(\tau_n).$$

a teda

$$\mu(W_1^*) = 0.$$

Tým je dôkaz vety hotový.

Poznámka. Podľa dokázanej vety *podstatnú časť* (čo do miery) množiny W tvoria súčty tých radov $x \in X$, pre ktoré platia súčasne tieto nerovnosti:

$$\underline{D}^*(f, x) \leq \frac{1}{2} \leq \overline{D}^*(f, x),$$

$$\underline{D}^*(g, x) \leq \frac{1}{2} \leq \overline{D}^*(g, x).$$

Ak označíme znakom $D^*(f, x)$ limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$ (za predpokladu, že táto limita existuje), z uvedených nerovností vidieť: Spomedzi radov $x \in X$, pri ktorých existuje $D^*(f, x)$ (prirodzená hustota členov $+1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, v zmysle terminológie obvyklej v teórii čísel), neprispievajú k miere množiny W tie rady, pri ktorých je $D^*(f, x) \neq \frac{1}{2}$. (Pri týchto radoch je tiež $D^*(g, x) \neq \frac{1}{2}$, kde $D^*(g, x)$ má podobný význam ako $D^*(f, x)$).

Dokázaná veta je v istom zmysle analogon nasledujúcej známej vety Cesàrovej o rozdelení znamienok v neabsolútne konvergentných radoch:

Nech $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$, $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $\sum\limits_1^{\infty} a_n = +\infty$, nech rad $\sum\limits_1^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_n = +1$ alebo -1, konverguje, vtedy pre dolnú $\underline{D}$ a hornú $\overline{D}$ hustotu znamienok $+1$ v postupnosti $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty}$ platí $\underline{D} \leq \frac{1}{2} \leq \overline{D}$ (pozri [6]).

3.

Predpokladajme, že rad (1) diverguje a $a_n \to 0$. Potom, ako je známe (pozri [4]), existuje nespočítateľná množina X_1 tých radov $x \in X$, ktoré majú súčet (vlastný alebo nevlastný), a nespočítateľná množina X_2 tých radov $x \in X$, ktoré nemajú súčet, teda oscilujú. V práci [4] je dokázané, že množina X_1 je množinou prvej kategórie v (X, ϱ), a teda X_2 je množinou druhej kategórie v (X, ϱ), keďže (X, ϱ) je neprázdny úplný priestor.

V tomto odseku podáme isté zovšeobecnenie citovaného výsledku.

Nech $x \in X$,

$$x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots$$

Pre každé prirodzené n položme $S_n(x) = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n$. $S_n(x)$ je spojitou funkciou na (X, ϱ) (pozri [4]).

Nech ďalej K je pevne zvolené reálne číslo. Znakom $A(K)$ označíme množinu všetkých tých radov $x \in X$, ktoré majú vlastnosť takú, že ku každému $x \in A(K)$ existuje prirodzené číslo $n(x)$ také, že platí $S_{n(x)}^{(x)} > K$. Označme ďalej znakom A, resp. A' množinu všetkých tých $x \in X$, pre ktoré postupnosť $\{S_n(x)\}_1^\infty$ nie je zhora, resp. zdola ohraničená.

Lemma 2. *Množiny A, A' sú množinami $G_\delta(X)$.*

Dôkaz. Ukážeme predovšetkým, že množina $A(K)$ je pre každé reálne K otvorená. Nech $x_0 \in A(K)$. Potom existuje prirodzené číslo $n(x_0)$ také, že platí: $S_{n(x_0)}^{(x_0)} > K$.

Zvoľme $\delta = \dfrac{1}{n(x_0)}$, vtedy pre $x \in \Omega(x_0, \delta)$ platí $S_{n(x_0)}^{(x)} = S_{n(x_0)}^{(x_0)} > K$, a teda $x \in A(K)$. Teda celkom $\Omega(x_0, \delta) \subset A(K)$, t. j. $A(K)$ je otvorená množina. Zrejme $A = \bigcap\limits_{K=1}^{\infty} A(K)$, a tým je dôkaz hotový.

Podobne sa dokáže tvrdenie pre množinu A'.

Lemma 3. *Nech $B = A \cap A'$. Potom B je hustá v (X, ϱ).*

Dokaz. Nech $x_0 \in X$,

$$x_0 = \varepsilon_1^0 a_1 + \varepsilon_2^0 a_2 + \ldots + \varepsilon_n^0 a_n + \ldots$$

Ukážeme, že $x_0 \in \bar{B}$. Nech $\delta > 0$, δ ľubovoľné reálne číslo. Nech N je prirodzené číslo, $\dfrac{1}{N} \leqq \delta$.

Podľa Riemannovej vety existuje rad

$$\varepsilon_{N+1} a_{N+1} + \varepsilon_{N+2} a_{N+2} + \ldots + \varepsilon_{N+k} a_{N+k} + \ldots,$$

kde $\varepsilon_i = 1$ alebo -1 pre všetky $i = N+1, N+2, \ldots$ taký, že pre jeho čiastočné súčty S_k^* platí

$$\limsup_{k \to \infty} S_k^* = +\infty, \quad \liminf_{k \to \infty} S_k^* = -\infty.$$

Položme

$$x = \varepsilon_1^0 a_1 + \ldots + \varepsilon_N^0 a_N + \varepsilon_{N+1} a_{N+1} + \varepsilon_{N+2} a_{N+2} + \ldots$$

Zrejme

$$\limsup_{n \to \infty} S_n(x) = +\infty \text{ a } \liminf_{n \to \infty} S_n(x) = -\infty, \quad x \in \Omega(x_0, \delta).$$

Keďže δ je ľubovoľné kladné číslo, je tým dôkaz hotový.

Veta 5. *Nech X_3 je množina všetkých tých radov $x \in X$, pre ktoré je postupnosť $\{S_n(x)\}_1^\infty$ ich čiastočných súčtov buď zhora, alebo zdola ohraničená. Potom X_3 je množina prvej kategórie v priestore (X, ϱ).*

Dôkaz. Zrejme je $X_3 = X - B$, teda X_3 je množina $F_\sigma(X)$, keďže B je podľa lemmy 2 množinou G_δ. Ďalej množina $X - X_3 = B$ je podľa lemmy 3 hustá v X. Teda (pozri [2], str. 66) je X_3 množinou prvej kategórie v X.

Dôsledok. Množina X_1 tých radov $x \in X$, ktoré majú súčet (vlastný alebo nevlastný), je prvej kategórie v (X, ϱ). To vyplýva z toho, že $X_1 \subset X_3$.

Z dokázanej vety na základe známych vlastností úplných priestorov taktiež ihneď vyplývá, že množina B všetkých tých radov $x \in X$, ktorých čiastočné súčty tvoria postupnosť neohraničenú zdola i zhora, je množinou druhej kategórie v (X, ϱ).

LITERATÚRA

1. Kuratowski, Wstep do teorii mnogosci i topologii, Warszawa 1955. 2. Čech E., Bodové množiny, Praha 1936. 3. Šalát T., O súčtoch istých konvergentných radov, Mat.-fyz. čas. SAV IV, 1954, 203—211. 4. Šalát T., Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch, Mat.-fyz. čas. SAV V, 1955, 94—100. 5. Šalát T., O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi, Sborník prác Prír. fak. UK (v tlači). 6. Rademacher, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugenden Faktoren, Math. Z., zv. 11, 1921, 276—288.

Došlo 24. 2. 1957.

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РЯДОВ С МЕТРИКОЙ БЭРА

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) — сходящийся ряд с положительными членами. Пусть X обозначает множество всех рядов вида:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = +1, \text{ или } -1.$$

$S(x)$ — обозначает сумму ряда x. В первой части этой работы автор исследует условия, при которых $S(x)$ является одно-однозначным изображением пространства (X, ϱ) в E_1, где ϱ — метрика Бэра, введена автором в его предшествующей работе [3]. Основным результатом этой части работы является теорема:

а) Пусть по крайней мере для одного натурального k имеет место $a_k \leq R_k$ (R_k — остаток ряда [1] после k-ого члена). Потом $S(x)$ не является одно-однозначным изображением.

б) Пусть для всех натуральных k имеет место: $a_k > R_k$. Потом $S(x)$ является гомеоморфным изображением.

в) Пусть существует натуральное число n обладающее свойством: для всех $k \geq n$ $a_k \leq R_k$. Потом $S(x)$ не является одно-однозначным изображением.

Во второй части предполагается для каждого k $a_k > R_k$. В этой части работы автор исследует некоторые свойства множества W всех вещественных чисел $w \in W$ которые возможно выразить в виде: $w = S(x)$, где

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i, \qquad \varepsilon_i = +1, \qquad \text{или} -1.$$

Означим через $M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_k \\ \varepsilon^0_{j_1}, \varepsilon^0_{j_2}, \dots \varepsilon^0_{j_k} \end{pmatrix}$ множество всех таких $w \in W$, которые имеют вид: $w = S(x)$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{j_1-1} a_{j_1-1} + \varepsilon^0_{j_1} a^0_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_k-1} a_{j_k-1} + \varepsilon^0_{j_k} a_{j_k} + \dots$ т. е. факторы $\varepsilon^0_{j_1}, \varepsilon^0_{j_2}, \dots \varepsilon^0_{j_k}$ — фиксированны, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Остальные факторы ε_i $i \neq j_1, \dots j_k$, принимают значения +1 и −1. Потом для меры этого множества имеет место:

$$\mu\left(M\begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots j_k \\ \varepsilon^0_{j_1}, \varepsilon^0_{j_2}, \dots \varepsilon^0_{j_k} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2^k} \cdot \mu(W),$$

где $\mu(W)$ — мера множества W.

$$\text{Пусть } x \in X, \quad x = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n + \dots$$

Пусть $f(n, x)$ обозначает число членов +1 в последовательности: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$. Означим через $\overline{D^*}(f, x) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$, $\underline{D^*}(f, x) = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$, $D^*(f, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$ (если существует).

Основным результатом этой части работы является теорема:

Почти для всех $w = S(x) \in W$ (в смысле меры Лебега) имеет место: $\underline{D^*}(f, x) = \frac{1}{2} = \overline{D^*}(f, x)$.

Эту теорему можно считать как определённую аналогию (для абсолютно сходящихся рядов) известной теоремы Чезаро о распределении знаков в релятивно сходящемся ряде.

В третьей части этой работы предполагается, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд с положительными членами, $a_n \to 0$. Построим опять пространство (X, ϱ), где ϱ метрика Бэра, введена автором в работе (4) на множестве X всех рядов вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, где $\varepsilon_i = +1$, или − 1 для каждого $i = 1, 2, \dots$

Означим через A, или-же A' множество всех рядов $x \in X$, для которых последовательность $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сверху или-же снизу неограничена. $S_n(x)$ притом обозначает n-тую частичную сумму ряда x. Автор показывает, что множества A, A' являются множествами типа $G_\delta(X)$, и множество $B = A \cap A'$ — плотное $B(X, \varrho)$.

Основным результатом является доказательство теоремы:

Множество X_3 всех таких рядов $x \in (X, \varrho)$, для которых $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — или сверху, или снизу ограничена, является множеством первой категории $B(X, \varrho)$.

Таким образом множество X'_3 всех таких рядов $x \in X$ для которых $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена ни сверху, ни снизу (т. е., для которых $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty$) является, как следствие приведенной теоремы, множеством второй категории $B(X, \varrho)$.

Эта теорема является обобщением одного результата полученного автором в предшествующей уже опубликованной работе [4].

ÜBER GEWISSE RÄUME DER REIHEN MIT BAIRESCHER METRIK

TIBOR ŠALÁT

Zusammenfassung

Es sei $\sum\limits_1^\infty a_n$ (1) eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Es bedeute X die Menge aller Reihen x, welche die Gestalt $x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 1$ oder -1, haben. $S(x)$ bedeutet die Summe der Reihe x.

Im ersten Teil dieser Arbeit untersucht der Verfasser die Bedingugen, bei denen $S(x)$ eine ein-eindeutige (resp. Homeomorfismus) Funktion im Raum (X, ϱ) definiert, deren Werte in E_1 sind, wo ϱ die Bairesche Metrik ist, die vom Verfasser in der Arbeit [3] eingeführt war. Das Hauptergebnis dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:

a) Es sei wenigstens für ein natürliches k: $a_k = R_k$ [R_k sind Reihenreste der Reihe (1)]. Dann ist $S(x)$ keine ein-eindeutitge Funktion.

b) Es sei für alle k: $a_k > R_k$. Dann ist $S(x)$ ein Homeomorfismus.

c) Es existiere eine natürliche Zahl n derart, daß für alle $k \geqq n$, $a_k < R_k$ ist. Dann ist $S(x)$ keine ein-eindeutige Funktion.

Im zweiten Teil setzen wir voraus, daß für alle k $a_k > R_k$ ist. Im diesen Teil der Arbeit studiert der Verfasser einige Eigenschaften der Menge W aller derjenigen reellen Zahlen w, welche die Gestalt $w = S(x)$, $x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 1$ oder -1, haben.

Es bedeute $\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \dots, & j_k \\ \varepsilon^0_{j_1}, & \varepsilon^0_{j_2}, & \dots & \varepsilon^0_{j_k} \end{pmatrix}$ die Menge aller derjenigen $w \in W$ welche die Form $w = S(x)$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{j_1-1} a_{j_1-1} + \varepsilon^0_{j_1} a_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_k-1} a_{j_k-1} + \varepsilon^0_{j_k} a_{j_k} + \dots$ haben, d. h. die Faktoren $\varepsilon^0_{j_1}, \varepsilon^0_{j_2}, \dots \varepsilon^0_{j_k}$ sind fest gewählt, die übrigen ε_i, $i \neq j_1, j_2, \dots j_k$ durchlaufen die Zahlen $1, -1$. *Dann gilt für das Maß $\mu(M)$ dieser Menge, daß $\mu(M) = \frac{1}{2^k} \mu(W)$*, wo $\mu(W)$ das Maß von W bedeutet. Es sei $x \in X$, $x = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + \dots$. Es bedeute $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen $+1$ in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$. Wir bezeichnen

$$\underline{D}^*(f, x) = \liminf_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n}, \quad \overline{D}^*(f, x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{f(n, x)}{n}$$

Das Hauptergebnis dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:

Für fast alle $w = S(x) \in W$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßes) gilt:

$$\underline{D}^*(f, x) \leq \frac{1}{2} \leq \overline{D}^*(f, x).$$

Dieser Satz ist eine Analogie (für absolut konvergente Reihen) eines bekannten Satzes von Cesàro über die Verteilung der Vorzeichen in nicht-absolut konvergenten Reihen.

Im dritten Teil der Arbeit setzen wir voraus, daß $\sum\limits_1^\infty a_n$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist, $a_n \to 0$. Konstruiert man wieder den Raum (X, ϱ), wo ϱ die Bairesche Metrik ist, die vom Verfasser in der Arbeit [4] eingeführt war. Wir bezeichnen mit A resp. A' die Menge aller derjenigen Reihen $x \in X$, für die die Folge $\{S_n(x)\}_1^\infty$ eine nach oben

(resp. nach unten) unbeschränkt ist. Dabei $S_n(x)$ die n-te Teilsumme der Reihe bedeutet. Man beweist, dass die Mengen A, A' die Mengen G_δ in (X, ϱ) sind und daß die Menge $B = A \cap A'$ in (X, ϱ) dicht ist.

Das Hauptergebniss dieses Teiles der Arbeit ist der Satz:
Die Menge X_3 aller derjenigen $x \in X$, für die die Folge $\{S_n(x)\}_1^\infty$ nach oben oder nach unten beschränkt ist, ist eine Menge von erster Kategorie in (X, ϱ). Infolge des vorhergehenden Satzes ist die Menge B aller derjenigen $x \in X$, welche die beiden Bedingungen

$$\liminf_{n \to \infty} S_n(x) = -\infty, \qquad \limsup_{n \to \infty} S_n(x) = +\infty$$

erfüllen, eine Menge von zweiter Kategorie in (X, ϱ).

Diese Ergebnisse sind eine Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse des Verfassers. (Siehe [4].)