

Matematický časopis

Pavel Bartoš

O spoločnom riešení diofantických rovníc

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 4, 305--306

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126665>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O SPOLOČNOM RIEŠENÍ DVOCH DIOFANTICKÝCH ROVNÍC

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Je známe (pozri [1]), že diofantická rovnica

$$(1) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$$

má pre každé prirodzené číslo n konečne mnoho (aspoň jedno) riešení v prirodzených číslach. Pre $n = 1$ a 2 sú ďalšie úvahy triviálne, preto budeme predpokladať $n \geq 3$.

Extrémnym riešením rovnice (1) nazývame nasledujúce riešenie:

$$x_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_n = \alpha_n - 1,$$

kde čísla α_i sú dané rekurentným vzťahom

$$(2) \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Riešenie (2) sa nazýva extrémnym vzhľadom na jeho dve nasledujúce vlastnosti:

a) $x_1 < x_2 < \dots < x_n$;

b) ak $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n$ je iným riešením rovnice (1), potom $x'_n < x_n$ (pozri [1], veta 3).

Veta. *Extrémne riešenie rovnice (1) je riešením aj diofantickej rovnice*

$$(3) \quad 2 + x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + \dots + x_1^2 x_2^2 \dots x_{n-1}^2 = x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n + 1)$$

Dôkaz. Podľa (2) máme dokázať, že

$$(4) \quad 2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \dots + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^2 = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

Budeme to dokazovať indukciou. Lahko sa možno presvedčiť, že (4) platí pre $n = 3$. Nech (4) je splnené pre určité n , potom

$$2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \dots + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^2 \alpha_n^2 = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n +$$

$$+ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^2 \alpha_n^2 = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + 1) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1},$$

čiže (4) je splnené aj pre $n + 1$. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Zrejme nie každé riešenie rovnice (1) je súčasne riešením rovnice (3). Napríklad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 1,$$

ale ľahko sa možno presvedčiť, že štvorica (2, 4, 5, 20) nie je riešením rovnice (3) pri $n = 4$.

LITERATÚRA

[1] Erdős P., *Az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ egyenlet egészszámu megoldásairól*, *Matematikai Lapok 1* (1950) 192–210.

Došlo dňa 19. novembra 1967.

ON A COMMON SOLUTION OF TWO DIOPHANTINE EQUATIONS

Pavel Bartoš

Summary

In the paper it is proved that the so called solution of the lens equation is also a solution of another special Diophantine equation.