Pavel Bartoš

O spoločnom riešení diofantických rovníc

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 4, 305--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126665

Matematický časopis 19 (1969) No. 4

O SPOLOČNOM RIEŠENÍ DVOCH DIOFANTICKÝCH ROVNÍC

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Je známe (pozri [1]), že diofantická rovnica

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1 \tag{1}$$

má pre každé prirodzené číslo n konečne mnoho (aspoň jedno) riešení v prirodzených číslach. Pre $n = 1$ a 2 sú ďalšie úvahy triviálne, preto budeme predpokladať $n \geqq 3$.

Extrémnym riešením rovnice (1) nazývame nasledujúce riešenie:

$$x_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1, \quad x_n = \alpha_n - 1,$$

kde čísla α_i sú dané rekurentným vzťahom

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Riešenie (2) sa nazýva extrémnym vzhľadom na jeho dve nasledujúce vlastnosti:

a) $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$;

b) ak $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$ je iným riešením rovnice (1), potom $x_n' < x_n$ (pozri [1], veta 3).

Veta. *Extrémne riešenie rovnice* (1) *je riešením aj diofantickej rovnice*

$$2 + x_1^2 + x_1^2x_2^2 + \ldots + x_1^2x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 = x_1x_2 \ldots x_{n-1}(x_n + 1) \tag{3}$$

Dôkaz. Podľa (2) máme dokázať, že

$$2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \ldots + \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_{n-1}^2 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{4}$$

Budeme to dokazovať indukciou. Ľahko sa možno presvedčiť, že (4) platí pre $n = 3$. Nech (4) je splnené pre určité n, potom

$$2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \ldots + \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_{n-1}^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_{n-1}^2\alpha_n^2 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n +$$

$$+\alpha_1^2\alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^2\alpha_n^2 = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n + 1) = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_{n+1},$$

čiže (4) je splnené aj pre $n + 1$. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Zrejme nie každé riešenie rovnice (1) je súčasne riešením rovnice (3). Napríklad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 1,$$

ale ľahko sa možno presvedčiť, že štvorica (2, 4, 5, 20) nie je riešením rovnice (3) pri $n = 4$.

LITERATÚRA

[1] Erdös P., *Az* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}$ *egyenlet egészszámú megoldásairól*, Matematikai Lapok *1* (1950) 192—210.

Došlo dňa 19. novembra 1967.

ON A COMMON SOLUTION OF TWO DIOPHANTINE EQUATIONS

Pavel Bartoš

Summary

In the paper it is proved that the so called solution of the lens equation is also a solution of another special Diophantine equation.