Iosif Aleksandrovič Vil′ner; Pavel Galajda

Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и их автоморфные преобразования

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 14 (1964), No. 1, 6--43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126640`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XIV, 1-1964

НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА И ИХ АВТОМОРФНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ИОСИФ А. ВИЛЬНЕР Москва, ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (Pavel Galajda), Кошице

§ 1. Настоящая работа является продолжением работы [22], где были исследованы неэлементарные номограммы уравнений третьего порядка. Полезно, наоборот, указать, насколько неэлементарными могут быть соотношения, допускающие простые номограммы, в том числе нулевого жанра.

Построенные И. А. Вильнером номограммы элиптических интегралов первого рода с действительным и комплексным модулем позволяют с помощью элементарного вспомогательного вычисления суммы и, быть может, произведения комплексных чисел осуществлять псевдотеорему сложения эллиптических функций в комплексной области, т. е. решать уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \int_0^{z_i} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \zeta}} = \int_0^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}}, \tag{1.1}$$

где k, k_i, M_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные числа, а z — искомое (если $k_i = \text{const}$, будем иметь теорему сложения).

Если $n = 2$ и $k_i = k$ $(i = 1, 2)$, будем иметь обычную форму теоремы сложения.

Если $\operatorname{Im} M_i = \operatorname{Im} z_i = \operatorname{Im} k_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, мы будем иметь теорему сложения в действительной области.

Пользуясь номограммами И. А. Вильнера (см. работу [6]), легко найти z. При этом, поскольку мы будем постоянно оперировать в действительной области, номограмма превратится в номограмму с фиксированной точкой ($b = \operatorname{Im} z = q_0 = 0$), через которую постоянно будет проходить прямолинейный индекс. Равенство между собой всех модулей эллиптических интегралов при пользовании номограммой не необходимо.

Можно, пожалуй, отметить, что для теорем сложения эллиптических функций как Якоби, так и Веерштрасса для действительной области можно построить и обычные номограммы даже на паралельных шкалах. Мы построим ряд весьма сложных неэлементарных и элементарных соотношений, допускающих, однако, простые номограммы. Пусть имеем теоремы сложения

$$\operatorname{sn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{cn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{tn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v \pm \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 \mp \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{dn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{1.5}$$

$$\wp(\mu + \nu) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'\mu \mp \wp'\nu}{\wp\mu - \wp\nu}\right)^2 - \wp\mu - \wp\nu. \tag{1.6}$$

Положим:

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, & v &= \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},\\ w &= u \pm v, & w &= \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \end{aligned}\right| \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \int_r^\alpha \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}, & \nu &= \int_r^\beta \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}},\\ \Delta &= \mu \pm \nu, & \Delta &= \int_r^\sigma \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}. \end{aligned}\right| \tag{1.8}$$

Тогда уравнения (1.2)–(1.5) перепишутся так:

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \pm \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \\ = \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}. \tag{1.9}$$

а уравнение (1.6) перепишется так:

$$\int_x^{\alpha} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} \pm \int_y^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} =$$

$$= \int_t^{\sigma} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} . \tag{1.10}$$

Мы получим, очевидно, представление равенств (1.2)–(1.6) в протабулированных функциях в виде уравнений типа

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(t), \tag{1.11}$$

$$\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta) = \varphi_3(\sigma), \tag{1.12}$$

принадлежащих ко второй канонической форме уравнения третьего номографического порядка, и значит номографируемых на номограммах нулевого жанра или, если угодно, на конических номограммах.

Если бы мы пожелали номографировать в действительной области теорему сложения, соответствующую более общему равенству (1.1) мы бы пришли к тем же выводам, но уравнения, аналогичные (1.2)–(1.5) значительно усложнились бы.

Из изложенного видно, что функции двух переменных стоящие в правых частях уравнений (1.2)–(1.8) допускают номограммы нулевого жанра.

Мы придем к номографированию подобного рода сложных но непроизвольных выражений, если станем на путь применения теоремы сложения Абеля для ультраэллиптических интегралов, или — более обще — если будем исходить из мемуара, в котором Абель, далее обобщая теорему сложения Эйлера (1761 г.), показал, что определенная совокупность интегралов вида $\int f(x; y)\,dx$, где f — рациональная функция, а y — корень какого-нибудь алгебраического уравнения с коэффициентами целыми рациональными функциями от x, может быть выражена алгебраическими и логарифмическими функциями. Если

$$\psi(x) = \int f(x; y)\,dx \tag{1.13}$$

есть абелев интеграл, то в силу абелевой теоремы должны иметь

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_n) = V, \tag{1.14}$$

где V — рационально логарифмическая функция, причем число этих интегралов непроизвольно.

Если мы сложим несколько таких интегралов в произвольном количестве, то, вообще говоря, их сумма не выразится конечно рационально логарифмической функцией, но выразится с точностью до этой функции суммой, вообще говоря, p таких интегралов, где число p есть жанр кривой (Клебш) $f(x, y) = 0$. Случай жанра нуль (уникурсальная кривая) является тривиальным.

При $p = 1$ мы приходим к рассмотренному случаю эллиптических функций, когда сумма интергалов выражается всегда через один интеграл и т. д. Что же касается до аддитивной рационально-логарифмической части абелевой теоремы V, то она как-раз представляет наибольшие номографические затруднения, но при определенных ограничениях на строение функции $f(x; y)$ она исчезает, превращаясь в постоянную. Важным с точки зрения номографии и теории абелевых интегралов является получение наиболее общей характеристики того, что этот член V не нарушает номографируемости абелевой теоремы. ([1]) В рассмотренном выше случае это имело место. Ниже мы увидим, что это всегда имеет место для интегралов вида

$$\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a + bx - cx^2}},$$

где $P(x)$ — полином. Не то будет, если под корнем многочлен выше второй степени.

В качестве нового примера рассмотрим соотношение

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{4y_1^3 + ay_1 + b} - \sqrt{4y_2^3 + ay_2 + b}}{y_1 - y_2}\right)^2. \tag{1.15}$$

Полагая $g_2 = -a$, $g_3 = -b$, строим функции

$$x_i = \int\limits_{t}^{y_i} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.16}$$

Значит

$$x_1 + x_2 = x_3, \tag{1.17}$$

т. е. сложное соотношение (1.15) легко номографируется. Подобные же примеры без труда теперь можем построить, исходя из теорем сложения (1.2)–(1.6).

Приведем интересные номографируемые соотношения, предоставив читателю в каждом случае построить определитель Массо и найти уравнения чисел и жанр номограммы.

Номографируемые следующие соотношения в эллиптических функциях:

$$y = \operatorname{tn}(u + v)\operatorname{tn}(u - v)\operatorname{dn}^2 u = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} - \operatorname{sn}^2 v}, \tag{1.18}$$

([1]) В простейшем случае это будет иметь место при условии $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ $(i + j = 1, 2, \ldots, n)$.

$$y = \frac{\mathrm{dn}\,(u+v) + \mathrm{dn}\,(u-v)}{\mathrm{dn}\,(u+v) - \mathrm{dn}\,(u-v)} = -\frac{\mathrm{dn}\,u}{k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}\;\frac{\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}. \tag{1.19}$$

$$y = \frac{\mathrm{dn}\,(u+v)}{\mathrm{dn}\,(u-v)}, \qquad y = \frac{\mathrm{sn}\,(u+v)}{\mathrm{sn}\,(u-v)}, \qquad y = \frac{\mathrm{cn}(u+v)}{\mathrm{cn}\,(u-v)}.\,(^2) \tag{1.20}$$

$$y = \frac{(1 \pm \mathrm{cn}\,(u+v))(1 \pm \mathrm{cn}\,(u-v))}{1 + \mathrm{cn}\,(u+v)\,\mathrm{cn}\,(u-v)} = \frac{(\mathrm{cn}\,u \pm \mathrm{cn}\,v)^2}{\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^2 v}. \tag{1.21}$$

$$y = \frac{1 + \mathrm{cn}\,(u+v)\,\mathrm{cn}\,(u-v)}{1 + \mathrm{dn}\,(u+v)\,\mathrm{dn}\,(u-v)} = \frac{\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{dn}^2 v}. \tag{1.22}$$

Это соотношение между y, u и v — нулевого жанра.

Уравнения

$$y = \frac{\mathrm{dn}\,(u)}{\mathrm{dn}\,(v)}\,\mathrm{tn}\,(u \pm v) = \frac{\dfrac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \pm \dfrac{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}}{\dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u} - \mathrm{sn}^2 v}, \tag{1.23}$$

$$y = \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{tn}\,(u \pm v) = \frac{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v}{\dfrac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \mp \dfrac{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}}. \tag{1.24}$$

Также номографируемые соотношения пятого порядка. Соотношение

$$y = \frac{\mathrm{cn}\,u + \mathrm{cn}\,v}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u} \equiv \frac{1 + \mathrm{cn}\,(u+v)}{\mathrm{sn}\,(u+v)} \tag{1.25}$$

определяет функцию нулевого жанра.

Причина, вследствие которой все функции, обладающие теоремами сложения (не только алгебраическими, как эллиптические) номографируемы, заключается в том, что номографируемо дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.26}$$

понимая под номографируемостью дифференциального уравнения (в данном случае) номографируемость любого его частного интеграла.

(2) Номографируемость двенадцати функций Якоби—Глешера $y = \mathrm{sc}, \mathrm{cs}, \mathrm{sd}, \mathrm{ds}, \mathrm{cd}, \mathrm{dc}, \mathrm{sn}, \mathrm{ns}, \mathrm{cn}, \mathrm{nc}, \mathrm{dn}, \mathrm{nd}$ от аргумента $(u + v)$ при модуле k является тривиальным фактом. Но стоит только заменить v на vi (и y на $p + qi$), как эта теорема делается, вообще говоря, неверной. Но интегралы и логарифмы этих функций (см. теорему И. А. Вильнера об интеграле и логарифме) номографируемы.

В этом же смысле можем говорить о номографируемости соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения характеристик

$$\frac{dx}{\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)} = \frac{dy}{\psi_1(y)\,\psi_2(y)}\,. \tag{1.27}$$

частным случаем которого является уравнение Эйлера

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \varphi(z), \tag{1.28}$$

где X и $У$ – полиномы четвертой степени, откуда и получаем номографируемость соответствующих алгебраических теорем сложения на номограммах нулевого жанра.

Вот еще номографируемые соотношения

$$2 + k^2(x^2 + ty^2 + z^2) + 2\sqrt{(1 - k^2x^2)(1 - k^2y^2)(1 - k^2z^2)} = k^4x^2y^2z^2. \tag{1.29}$$

Действительно, полагая

$$x = \mathrm{sn}\,u, \qquad y = \mathrm{sn}\,v, \qquad z = \mathrm{sn}\,w \tag{1.30}$$

при модуле, равном k, получим

$$1 - \mathrm{dn}^2u - \mathrm{dn}^2v - \mathrm{dn}^2w + 2\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,w = k^4\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2\mathrm{v}\,\mathrm{sn}^2w, \tag{1.31}$$

из которого следует, что

$$u + v + w = 0, \tag{1.32}$$

т. е. данное соотношение нулевого жанра. Номографируемо и нулевого жанра уравнение

$$y = \frac{1 + \mathrm{cn}(u + v)\,\mathrm{cn}(u - v)}{1 + \mathrm{dn}(u + v)\,\mathrm{dn}(u - v)}, \tag{1.33}$$

т. к. правая часть есть функция от $\mathrm{sn}^2\,u + \mathrm{sn}^2\,v$. Действительно, преобразуя найдем

$$y = \frac{\mathrm{cn}^2u + \mathrm{cn}^2v}{\mathrm{dn}^2u + \mathrm{dn}^2v} = \frac{\mathrm{cn}^2u + \mathrm{cn}^2v}{2k'^2 + k^2(\mathrm{cn}^2u + \mathrm{cn}^2v)}\,. \tag{1.34}$$

Можно указать аналогичные соотношения для номограммы первого жанра в трехмерном пространстве, что мы представим читателю.

Можно построить ряд анаморфозируемых алгебраических зависимостей, связанных с теоремой сложения.

Уравнение

$$x(ay^4 + by^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \pm y(ax^4 + bx^2 + c)^{\frac{1}{2}} = z(ax^2y^2 - 1) \tag{1.35}$$

или

$$(ax^2y^2 - 1)\,z^4 = 2(x^2 + y^2)\,(ax^2y^2 + 1) + 4bx^2y^2z^2 - (x^2 - y^2)^2 \qquad (1.36)$$

номографируется на C_3, т. к. это соотношение можно заменить уравнением

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \mp \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{ay^4 + by^4 + c}} \pm \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{az^4 + bz^2 + c}} = 0. \qquad (1.37)$$

Возьмем еще симметричное соотношение

$$(xy + yz + zx)^2 = 4(xyz + \beta)\,(x + y + z). \qquad (1.38)$$

Это соотношение номографировано на C_3, т. к. его можно записать так:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \beta}} \mp \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 + \beta}} = \mp \int\limits_0^{\varphi(z)} \frac{dz}{\sqrt{z^3 + \beta}}\,. \qquad (1.39)$$

где $\varphi(z)$ определяется из уравнения

$$\varphi^2(z)\,z^2 + 4\varphi(z)\,\beta + 4\beta z = 0. \qquad (1.40)$$

Равносильные соотношения

$$\left(\sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4} \pm \sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}\right)^2 = \\ = (x - y)^2[a_4(x + y)^2 + a_3(x + y) + z]. \qquad (1.41)$$

$$\left(x^2\sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4} \pm y^2\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}\right)^2 = \\ = (x - y)^2[x^2y^2z + a_1xy(x + y) + a_0(x + y)^2] \qquad (1.42)$$

номографируемы на C_3, т. к. могут быть записаны так:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}} \mp \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4}} = \\ = \int\limits_0^{\varphi(z)} \frac{dz}{\sqrt{a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4}}\,. \qquad (1.43)$$

где $\varphi(z)$ определяется тем, что при $x = 0$, $y = \varphi(z)$ и $\varphi(z)$ есть следовательно алгебраическая функция определяемая из заданного соотношения.

Что касается приведения к каноническому виду, то это иллюстрируется на примере д'Оканя (см. стр. 204 и 205 работы [10]).

Пусть

$$f_3 = f_1f_2 + \sqrt{1 + f_1^2}\,\sqrt{1 + f_2^2}\,. \qquad (1.44)$$

Рассматривая f_3 как параметр, получим, поскольку $\mathrm{d}f_3 = 0$

$$\left(f_2 + \varepsilon_1 \frac{f_1 \sqrt{1+f_2^2}}{\sqrt{1+f_1^2}}\right)\mathrm{d}f_1 + \left(f_1 + \varepsilon_1 \frac{f_2 \sqrt{1+f_2^2}}{\sqrt{1+f_1^2}}\right)\mathrm{d}f_2 = 0. \tag{1.45}$$

Сокращая на неравный нулю множитель, и интергируя, найдем

$$\ln(f_1 + \sqrt{f_1^2+1}) + \varepsilon_1 \ln(f_2 + \sqrt{f_2^2+1}) = \varphi(f_3). \tag{1.46}$$

Но из данного соотношения видно, что при $f_1 = 0$

$$f_3 = \varepsilon_1 \sqrt{1+f_2^2} \tag{1.47}$$

или

$$f_2 = \varepsilon \sqrt{1+f_1^2}. \tag{1.48}$$

Полученное уравнение дает

$$\ln(\varepsilon\sqrt{f_2^2-1} + |f_3|) = \varphi(f_3). \tag{1.49}$$

Но

$$\operatorname{sgn} f_3 = \operatorname{sgn} \varepsilon_1 . \tag{1.50}$$

Поэтому получим

$$\ln(f_1 + \sqrt{f_1^2+1}) + \varepsilon_1 \ln(f_2 + \sqrt{f_2^2+1}) = \ln(\varepsilon_1 f_3 + \varepsilon\sqrt{f_3^2-1}). \tag{1.51}$$

Этот пример рассматривал также Соро (стр. 108 работы [5]).

Рассмотрим теперь никем не рассматривавшийся пример.

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y)} + \varepsilon y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}. \tag{1.52}$$

Считая z параметром, найдем после вычислений

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \{&\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)}(1-k^2x^2y^2) + \\ &+ \varepsilon[2k^2x^2 + 2k^2y^2 - k^2x^2y^2 - k^4x^2y^2 - k^2 - 1]\} : \\ &: (1-k^2x^2y^2)^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Аналогично найдем (по симметрии)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} = \{&\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)(1-x^2)(1-k^2x^2)}(1-k^2x^2y^2) + \\ &+ \varepsilon[2k^2x^2 + 2k^2y^2 - k^2x^2y^2 - k^4x^2y^2 - k^2 - 1]\} : \\ &: (1-k^2x^2y^2)^2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Считая z параметром в зависимости x от y, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1.55}$$

Подставляя в это равенство выражения $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, после упрощений получим

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{\varepsilon\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{1.56}$$

или

$$\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \varepsilon\int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \varphi(y). \tag{1.57}$$

Принимая во внимание, что при $x = 0$ и $z = \varepsilon y$, получим

$$\varepsilon\int\limits_0^{\varepsilon z} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = \varphi(z) \tag{1.58}$$

или

$$\varphi(z) = \int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}}, \tag{1.59}$$

получаем, следовательно, искомое представление

$$\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \varepsilon\int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} =$$

$$= \int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{1.60}$$

Заметим, что, если из (1.52) найти $\sqrt{1-z^2}$ и $\sqrt{1-k^2z^2}$ и заменить затем x, y, z на соответственно $\sin\varphi$, $\sin\psi$ и $\sin\zeta$, то получим шесть уравнений, номографируемых на номограмме нулевого жанра, и изображающих теорему сложения эллиптических интегралов в действительной области. Мы не будем выписывать эти сложные соотношения.

Рассмотрим теперь более сложное уравнение, связывающее комплексные переменные x, y, z:

$$n^2x^4y^4z^4 - 2nx^4y^2z^3 - 2nx^2y^4z^2 - 2nx^2y^2z^4 -$$

$$- 4mx^2y^2z^2 + x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0. \tag{1.61}$$

Это уравнение — шестого номографического порядка и, следовательно, возможно, априори не анаморфизируемо.

Не применяя критерии (игнорируя критерии), заметим, что это соотношение можно переписать так:

$$nx^2y^4 + nx^4y^2 + 2mx^2y^2 + x^2 + y^2 = (nx^2y^2 + 1)(x^2 + y^2) + 2mx^2y^2. \quad (1.62)$$

Следовательно, из (1.62), располагая левую часть по переменной z, найдем сложный радикал

$$z = \frac{\pm\sqrt{nx^2y^4 + nx^4y^2 + 2mx^2y^2 + x^2 + y^2 \pm 2xy\sqrt{(nx^4 + mx^2 + 1)(ny^4 + my^2 + 1)}}}{(nx^2y^2 - 1)^2}. \quad (1.63)$$

Упрощая сложный радикал, найдем

$$z = \pm\frac{y\sqrt{nx^4 + mx^2 + 1} \pm x\sqrt{ny^4 + my^2 + 1}}{nx^2y^2 - 1}. \quad (1.64)$$

Вычисляя частные производные, найдем после упрощений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \pm\frac{-mnx^3y^3 - 2nx^3y - 2nxy^3 - mxy \mp (nx^2y^2 + 1)\sqrt{\Delta x\,\Delta y}}{(nx^2y^2 - 1)^2\sqrt{\Delta x}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \pm\frac{-mnx^3y^3 - 2nx^3y - 2nxy^3 - mxy \mp (nx^2y^2 + 1)\sqrt{\Delta x\,\Delta y}}{(nx^2y^2 - 1)^2\sqrt{\Delta y}}. \end{aligned}\right| \quad (1.65)$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0, \quad (1.66)$$

после подстановки и сокращения найдем

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\Delta x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\Delta y}} = 0. \quad (1.67)$$

Отсюда

$$\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} \pm \int\limits_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \varphi(z). \quad (1.68)$$

Для определения $\varphi(z)$ положим $x = 0$.

Тогда из (1.61) найдем, что при $x = 0$

$$z = \mp y,$$

значит

$$\varphi(z) = \pm\int\limits_0^z \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \pm\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}. \qquad (1.69)$$

Итак, уравнение (1.61) привелось к виду

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} \pm \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \mp\left(\pm\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}\right), \qquad (1.70)$$

где знаки непосредственно перед интегралами соответствуют знакам $\pm$ перед x, а знаки справа перед скобками соответствуют знакам перед дробью в (1.64).

Перепишем для ясности (1.64) так

$$z = \varepsilon_1 \frac{y\sqrt{1 + mx^2 + nx^4} + \varepsilon x\sqrt{1 + my^2 + ny^4}}{nx^2y^2 - 1}. \qquad (1.71)$$

Тогда (1.70) примет вид

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} + \varepsilon\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = -\varepsilon_1\varepsilon\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}. \qquad (1.72)$$

Таким образом, соотношение (1.61) допускает номограмму нулевого жанра.

Возьмем теперь и обратим интеграл

$$x = \int\limits_a^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4}} \qquad (1.73)$$

с произвольным нижним пределом. Положим

$$\xi = \varphi(x). \qquad (1.74)$$

Тогда, как показал Эрмит на стр. 105 работы [17] получим общую теорему сложения в виде соотношения

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x + y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a + y) + \varphi'(a)}{\varphi(a + y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a - y) + \varphi'(a)}{\varphi(a - y) - \varphi(a)} -$$
$$- \frac{\varphi'(a + y) - \varphi'(x)}{\varphi(a + y) - \varphi(x)} - \frac{\varphi'(a - y) - \varphi'(x)}{\varphi(a - y) - \varphi(x)}, \qquad (1.75)$$

которое, таким образом, будет нулевого жанра, так как равносильно соотношению

$$x + y - z = 0, \qquad (1.76)$$

где x, y, z — интегралы.

Соотношение (1.75) можно рассматривать как общее функционально-дифференциальное уравнение эллиптических функций второго порядка.

Возьмем уравнение

$$(z - a)^2(A - B(a + z) - Caz - \sqrt{A + 2Ba + Ca^2}\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}) +$$
$$+ 2B(z - a)^2(x + y) - (A + B(a + z) + Caz -$$
$$- \sqrt{A + 2Ba + Ca^2}\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}).$$
$$(x^2 + y^2) + 2(A + B(a + z) + C(a^2 - az + z^2) -$$
$$- \sqrt{A + 2B + Ca^2}\sqrt{A + 2Bz + Cz^2})\,xy. \tag{1.77}$$

Беря дифференциал, считая z постоянным, получим

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1.78}$$

Вычитая затем из P^2 и Q^2 левую часть (1.77), умноженную на надлежащий независящий от x и y множитель, непосредственно усматриваемый из сравнения P и Q с (1.77), найдем, что

$$P = \lambda\sqrt{A + 2B + Cy^2}, \qquad Q = \lambda\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}, \tag{1.79}$$

где λ — постоянная.

Уравнение (1.78) примет вид после интегрирования

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{A + 2By + Cy^2}} = E. \tag{1.80}$$

Для определения постоянной E, полагаем $x = a$. Тогда из (1.77) находим, что

$$y = z. \tag{1.81}$$

Следовательно, имеем с помощью (1.80) и (1.81)

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}} = E. \tag{1.82}$$

Соотношение (1.80) примет вид

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{A + 2By + Cy^2}} =$$
$$= \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}} + \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}}. \tag{1.83}$$

где последний интеграл есть постоянная (1.53) вместе с a. Получим соотношение нулевого жанра. Если $a = 0$, то

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}}. \quad (1.84)$$

Таким образом, очень сложное соотношение (1.77) есть нулевого жанра, причем с элементарными шкалами, т. к. интегралы

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{A + 2B\xi + C\xi^2}} \quad (1.85)$$

выражаются в элементарных функциях.

Заметим, что соотношение (1.77) можно записать более компактно

$$\left(x\sqrt{A + 2Bz + Cz^2} + \frac{Bz}{\sqrt{A} - \sqrt{A + 2Bz + Cz^2}}\right) +$$

$$+ y\left(\sqrt{A + 2By + Cy^2} + \frac{Bz}{\sqrt{A} - \sqrt{A + 2Bz + Cz^2}}\right) =$$

$$= \frac{Bz^2}{\sqrt{A} - \sqrt{A + 2Bz + Cz^2}} + z\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}. \quad (1.86)$$

Если теперь в предыдущих формулах положить $a = B = 0$, то (1.84) примет вид

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2}}. \quad (1.87)$$

Соотношение (1.86) примет вид

$$x\sqrt{A + Cz^2} + y\sqrt{A} = z\sqrt{A + Cx^2} \quad (1.88)$$

или

$$y = z\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} - x\sqrt{\frac{A + Cz^2}{A}}. \quad (1.89)$$

Имеем тождество

$$z^2 - x^2 \equiv z^2\,\frac{A + Cx^2}{A} - x^2\,\frac{A + Cz^2}{A}.$$

Деля его почленно на (1.89), найдем

$$\frac{z^2 - x^2}{y} = z\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} + x\sqrt{\frac{A + Cz^2}{A}}. \quad (1.90)$$

Складывая почленно (1.89) и (1.90), получим

$$\frac{z^2 + y^2 - x^2}{y} = 2z \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} . \tag{1.91}$$

Разрешая это уравнение относительно z, найдем

$$z = y \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} \pm x \sqrt{\frac{A + Cy^2}{A}} . \tag{1.92}$$

В силу (1.89) нижний знак бы соответствовал

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} . \tag{1.93}$$

Следовательно,

$$z = y \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} + x \sqrt{\frac{A + Cy^2}{A}} \tag{1.94}$$

есть другая форма алгебраического соотношения (1.87).

Наконец, с помощью (1.89) напишем алгебраический интеграл для (1.87) в виде

$$x = z \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} - y \sqrt{\frac{A + Cz^2}{A}} . \tag{1.95}$$

Соотношение

$$z = y \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} - x \sqrt{\frac{A + Cy^2}{A}} \tag{1.96}$$

соответствовало бы следовательно

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2}} . \tag{1.97}$$

Соотношение

$$z = x \sqrt{\frac{A + Cy^2}{A}} - y \sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} \tag{1.98}$$

соответствует равенству

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2}} . \tag{1.99}$$

Заметим еще, что замена в (1.87) и (1.94) z на $(-z)$ приводит к сумме трех интегралов, равной нулю. И так соотношениям

$$\pm\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2}} = 0 \tag{1.100}$$

отвечают зависимости

$$z = \pm y\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}} \pm x\sqrt{\frac{A + Cy^2}{A}} \tag{1.101}$$

с теми же сочетаниями знаков. Уничтожая иррациональность в равенстве (1.101), получим соотношение нулевого жанра с элементарными шкалами

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = \frac{4Cx^2y^2z^2}{A}. \tag{1.102}$$

Левая часть согласно формуле Герона есть

$$-(x + y + z)(x + y - z)(-x + y + z) = -16s^2, \tag{1.103}$$

где S — площадь треугольника со сторонами x, y, z. Если D есть диаметр описанного около этого треугольника круга, то, как известно,

$$\frac{xyz}{2s} = D. \tag{1.104}$$

Соотношение (1.102) примет вид

$$A + CD^2 = 0. \tag{1.105}$$

Таким образом, положительное решение z уравнения (1.102) по данным вещественным y и z получается на вспомогательной равномерной шкале и круговой номограмме Эйлера диаметра D, определяемого уравнением (1.105) с немой круговой шкалой.

От произвольной точки A этого круга делаем последовательные засечки циркулем $AB = x$, $BC = y$, снимая их с равномерной прямолинейной шкалы, на которой изображена шкала отсчета $|x|$, $|y|$, $|z|$. Циркулем откладывая от начала этой шкалы отрезок AC, прочтем на шкале значение z. Получаем, очевидно, вообще говоря два различных положения точки C и два отрезка AC и соответственно два ответа z. Меняя у них знаки, получаем еще два ответа, т. е. всего четыре, как и должно быть.

В случае, если $|x|$ или $|y|$ больше D для пользования номограммой требуется обобщенное понимание точек пересечения окружностей с включением мнимых элементов, чем мы не будем заниматься здесь.

При

$$A = -C = 1 \tag{1.106}$$

мы получим, в частности

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin z, \tag{1.107}$$

$$z = x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2}.$$

При

$$A = C = 1 \tag{1.108}$$

получим

$$\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \pm \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}). \tag{1.109}$$

Надо еще раз подчеркнуть, что при комплексных аргументах и коэффициентах номограммы этих соотношений делаются линейчатыми [15], [21].

Уравнение (1.107) рационализуется. Получаем уравнение (1.102) при условии (1.106). Из уравнения (1.105) найдем, что в данном случае $D = 1$.

В случае (1.108) будем иметь $D = i$ (круг мнимого диаметра i). Нетрудно привести уравнение

$$A(x^2 + y^2 - z^2) + 2xy\sqrt{A(A + Cz^2 + Ez^4)} - Ex^2y^2z^2 = 0 \tag{1.110}$$

к виду

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}} + \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Ey^4}} = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2 + Ez^4}}. \tag{1.111}$$

Соотношение (1.110) или

$$y = \frac{z\sqrt{A(A + Cx^2 + Cx^4)} - x\sqrt{A(A + Cz^2 + Ez^4)}}{A - Ex^2z^2} \tag{1.112}$$

или что то же

$$\sqrt{\frac{A + Cy^2 + Ey^4}{A}} = [(A + Ex^2z^2)\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)(A + Cz^2 + Ez^4)} -$$
$$- 2AExz(x^2 + z^2) - Cxz(A + Ex^2z^2)] : (A - Ex^2z^2)^2. \tag{1.113}$$

таким образом, нулевого жанра.

Если уничтожить в (1.110) иррациональность, то получим симметрическое соотношение нулевого жанра

$$A^2(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2) -$$
$$- 2AEx^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4ACx^2y^2z^2 + Ex^4y^4z^4 = 0. \tag{1.114}$$

Замечая, что изменение знака верхнего предела у каждого из интегралов, стоящих в равенстве (1.111) равносильно перенесению этого интервала в другую часть равенства или равносильно оставлению его с измененным знаком, заключаем, что (1.114) есть алгебраическая теорема сложения, охватывающая любые сочетания знаков в равенствах

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Ey^4}} \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2 + Ez^4}} = 0. \quad (1.115)$$

Пусть имеем уравнение

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x + y) + \zeta^2 x^2 y^2 = 0, \quad (1.116)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 4(AM - B^2), & \beta &= 2B(M - C) + 4AD, \\ \gamma &= 4AE - (M - C)^2, & \zeta &= 4(EM - D^2), \\ \varepsilon &= 2D(M - C) + 4BE, & \delta &= M^2 - C^2 + 4(AE + BD) \end{aligned}\right\} \quad (1.117)$$

Пусть

$$M(M - C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E) = \Delta. \quad (1.118)$$

Разрешая (1.116) сначала относительно y, а потом относительно x и приводя каждый из результатов к общему знаменателю, получим

$$\begin{aligned} &\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + x^2) = \\ &= \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4)}, \end{aligned} \quad (1.118')$$

$$\begin{aligned} &\beta + \delta y + \varepsilon y^2 + x(\gamma + 2\varepsilon y + y^2) = \\ &= \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4)}. \end{aligned}$$

Беря теперь дифференциал по x и y обеих частей равенства (1.116), получим с помощью (1.118′)

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} = 0. \quad (1.119)$$

Интегрируя, получим

$$\pm\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} = K, \quad (1.120)$$

где постоянную K определим из условия, то $y = \pm z$ при $x = 0$.

Пользуясь первым уравнением (1.118′) найдем, полагая $x = 0$, что

$$\beta + \gamma y = \pm 2\sqrt{A\Delta}. \quad (1.118'')$$

Следовательно

$$y = \frac{-\beta \pm 2\sqrt{A\Delta}}{\gamma}. \qquad (1.118''')$$

Мы обозначим

$$\frac{-\beta \pm 2\sqrt{A\Delta}}{\gamma} = z. \qquad (1.121)$$

Из этого уравнения мы, пользуясь (1.117) и (1.118), можем найти M как функцию z и подставив найденное выражение M через z в правые части равенств (1.118′), а затем заменив коэффициенты в (1.116) найденными их выражениями в функции z, получить соотношение между x, y и z, являющееся полным интегралом дифференциального уравнения (1.119), где z будет играть роль произвольной постоянной.

Итак, с помощью (1.120) тогда найдем простое выражение для

$$K = \pm\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4}}. \qquad (1.122)$$

В интегралах (1.122) и во втором интеграле (1.120) берутся одинаковые знаки. Итак

$$\pm\int^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} + \varepsilon\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} =$$

$$= \varepsilon\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^2 + Ez^4}}. \qquad (1.123)$$

Мы не будем выписывать сложное выражение нулевого номографичекого жанра ([3]) (1.116), после замены его коэффициентов их выражениями через z, оставляя это читателю.

Из полученного общего результата выводим такие простые следствия:

Для

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{a + bx}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by}} = 0 \qquad (1.124)$$

теорема сложения имеет вид

$$b + M(x - y) = \pm 2\sqrt{M(a + bx)} \qquad (1.125)$$

([3]) О номографическом жанре уравнения можно говорить лишь с осторожностью, понятной для читателя данной работы и без разъяснений.

или

$$b + M(y - x) = \pm 2\sqrt{M(a + by)}. \tag{1.126}$$

Аналогичным образом для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^2}} = 0$$

найдем любой из двух видов полного интеграла

$$\left.\begin{aligned} (M + b)x - (M - b)y &= \pm 2\sqrt{M(a + bx^2)}, \\ (M + b)y - (M - b)x &= \pm 2\sqrt{M(a + by^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.127}$$

Для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^3}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^3}} = 0 \tag{1.128}$$

аналогично найдем

$$\left.\begin{aligned} 2ab + Mx(M + bx) - y(M - bx)^2 &= \pm 2\sqrt{(M + ab^2)(a + bx^3)}, \\ 2ab + My(M + by) - x(M - by)^2 &= \pm 2\sqrt{(M^3 + ab^2)(a + by^3)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.129}$$

Для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^4}} = 0 \tag{1.130}$$

аналогично найдем, с помощью (1.118), (1.117) и (1.116), что

$$A = M^3 - 4abM, \tag{1.131}$$

и

$$\left.\begin{aligned} (M^2 + 4ab)x + (4ab - M^2 + 4bMx^2)y &= \pm 2\sqrt{M(M^2 - 4ab)(a + bx^4)}, \\ (M^2 + 4ab)y + (4ab - M^2 + 4bMy^2)x &= \pm 2\sqrt{M(M^2 - 4ab)(a + by^4)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.132}$$

Случай

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^6}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^6}} = 0, \tag{1.133}$$

если положить $x^2 = u$ и $y^2 = v$, приводится к

$$\pm \frac{du}{\sqrt{au + bu^4}} \pm \frac{dv}{\sqrt{av + bv^4}} = 0, \tag{1.134}$$

т. е. к частному случаю (1.119).

С помощью тех же формул (1.116)–(1.118) опять находим полный интеграл с произвольной постоянной M

$$\begin{aligned} &aM + M^2x^2 + 2abx^4 + (-M^2 - 4abx^2 + 4bMx^4)y^2 = \\ &\quad = \pm 2x\sqrt{(M^3 + a^2b)(a + bx^6)}, \\ &aM + M^2y^2 + 2aby^4 + (-M^2 - 4aby^2 + 4bMy^4)\,.\,x^2 = \\ &\quad = \pm 2y\sqrt{(M^3 + a^2b)(a + by^6)}. \end{aligned} \tag{1.135}$$

Рассмотрим уравнение Эйлера

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + ex^6}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4 + ey^6}} = 0. \tag{1.136}$$

С помощью той же подстановки

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v \tag{1.137}$$

мы приводим и общий случай (1.136) к случаю (1.119), где

$$A = 0, \qquad B = \frac{a}{2}, \qquad C = b, \qquad D = \frac{c}{2}, \qquad E = e. \tag{1.138}$$

С помощью (1.118) найдем

$$\Delta = (M - b)^3 + b(M - b)^2 + ae(M - b) + a^2e. \tag{1.139}$$

С помощью (1.117) и (1.116) найдем теперь полные интегралы Эйлера в равносильных формах, дающих опять сложные зависимости нулевого жанра.

$$\begin{aligned} &\beta + \delta x^2 + \varepsilon x^4 + y^2(\gamma + 2\varepsilon x^2 + \zeta x^4) = \pm 2x\sqrt{\Delta(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}, \\ &\beta + \delta y^2 + \varepsilon y^4 + x^2(\gamma + 2\varepsilon y^2 + \zeta y^4) = \pm 2y\sqrt{\Delta(a + by^2 + cy^4 + ey^6)} \end{aligned} \tag{1.140}$$

или в рациональной форме

$$\begin{aligned} \alpha = 2\beta(x^2 + y^2) + \gamma(x^4 + y^4) + 2\delta x^2y^2 + \\ + 2\varepsilon x^2y^2(x^2 + y^2) + \zeta x^4y^4 = 0, \end{aligned} \tag{1.141}$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha = -a^2, \qquad \beta = a(M - b), \qquad \gamma = -(M - b)^2, \\ &\zeta = 4eM - c^2, \qquad \varepsilon = c(M - b) + 2ae, \qquad \delta = M^2 - b^2 + ae. \end{aligned} \tag{1.142}$$

Чтобы при $x = 0$ $y = \pm z$, сделаем замену постоянной

$$M = b + \frac{a}{z^2}. \tag{1.143}$$

Тогда

$$\alpha = -a^2, \qquad \beta = \frac{a^2}{z^2}, \qquad \gamma = -\frac{a^2}{z^2},$$

$$\zeta = 4be - c^2 + \frac{4ae}{z^2}, \qquad \varepsilon = \frac{ac}{z^2} + 2ae, \tag{1.144}$$

$$\delta = \frac{a^2}{z^4} + \frac{2ab}{z^2} + ac, \qquad \Delta = \frac{a^2}{z^6}(a + bz^2 + cz^4 + ez^6).$$

Уравнения (1.140) примут вид

$$\begin{aligned} &a^2z^2 + a(a + 2bz^2 + cz^4)\,x^2 + az^2(c + ez^2)\,x^4 - \\ &- (a^2 - 2az^2(c - 2ez^2)\,x^2 + (c^2z^2 - 4bz^2 - 4ae)\,x^4)\,y^2 = \\ &= \pm 2axz\sqrt{(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}. \end{aligned} \tag{1.145}$$

Мы видим, что при $x = 0$, $y^2 = z^2$ и $y = \pm z$.

Таким образом, интеграция уравнений (1.136) дает такое трансцендентное соотношение, соответствующее алгебраической теории сложения (1.145)

$$\pm\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + ex^6}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4 + ey^6}} = \\ = \pm\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4 + ez^6}}. \tag{1.146}$$

Следовательно, уравнение (1.145) допускает номограммы нулевого, второго и третьего жанров.

Уравнению (1.145) можно дать иную форму

$$\begin{aligned} &az^2(a + bx^2 + cx^4 + ex^6) + \\ &+ ax^2(a + bz^2 + cz^4 + ez^6) - (a - cx^2z^2)^2y^2 - \\ &- aex^2z^2(z^2 - x^2)^2 + 4ex^2y^2z^2(az^2 + ax^2 + bx^2z^2) = \\ &= \pm 2xz\sqrt{a(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)\,a(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}. \end{aligned} \tag{1.147}$$

Это уравнение можно переписать, очевидно, так:

$$\begin{aligned} &(z\sqrt{a(ab + bx^2 + cx^4 + ex^6)} \pm x\sqrt{a(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)})^2 = \\ &= y^2(a - cx^2z^2)^2 + aex^2(z^2 - x^2)^2 - 4ex^2y^2z^2(ax^2 + az^2 + bx^2z^2). \end{aligned} \tag{1.148}$$

В частности, при $e = 0$ получим

$$z\sqrt{a(a + bx^2 + cx^4)} \mp x\sqrt{a(a + bz^2 + cz^4)} = y\sqrt{a - cx^2t^2)} \tag{1.149}$$

и соответствующее представление (1.146)

$$\pm\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}} = \pm\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2+cz^4}}, \quad (1.150)$$

что совпадает с ранее полученным результатом (см. (1.111) и (1.112)).

Чтобы выявить полное универсальную применимость номографии к функциям обладающим теоремой сложения, в частности алгебраической теоремой сложения, укажем на полные интегралы дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{X}}\,dx + \frac{P_n(y)}{\sqrt{Y}}\,dy = 0, \quad (1.151)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени.

Это дифференциальное уравнение тривиально номографируемо. Но содержательность будет тогда, когда оно обладает алгебраическим полным интегралом, т. е. алгебраической теоремой сложения. Это замечательно потому, что в этом случае может быть возможна алгебраическая анаморфоза.

Это бывает, когда уравнение $z = u(z_1; z_2)$ имеет вид уравнения пятого номографического порядка

$$u \equiv f_1 g_2 + g_1 f_2 = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (1.152)$$

и после умножения на анаморфизирующего множителя (1.103) работы [2] приводится к определителю Массо (5.89) этой работы. Теория возможности такой анаморфозы дана на стр. 140—149 цитируемой работы [2] в предположении дифференцируемости и в работе [3] в случае недифференцируемых функций.

Так найдем (заменяя z_1 и z_2 на x и y), что для

$$z = x^2y + xy^2 \quad (1.153)$$

анаморфизирующий множитель $\varphi_1 - \varphi_2$ согласно (5.103) работы [2] равен

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} - \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}. \quad (1.153)$$

Для

$$z = xy + (1 + \sqrt{1 + x^2})(1 + \sqrt{1 + y^2}), \quad (1.154)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} - \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} - \frac{\sqrt{1+y^2} - 1}{y}. \quad (1.155)$$

Вот пример трансцендентной анаморфозы:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{f_1 - 1}} = \operatorname{arctg} f_2 + \operatorname{arctg} f_3, \quad (1.156)$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{f_1 - 1}} = \frac{f_2 + f_3}{1 - f_2 f_3}. \qquad (1.157)$$

чему соответствует очевидная алгебраическая анаморфоза.

Оба уравнения (1.109) иллюстрируют ту же самую ситуацию. Первое дает трансцендентную, а второе алгебраическую анаморфозу.

Это же верно и для (1.107), если допускать номограммы с мнимыми шкалами, ибо второе уравнение (1.107) в комплексной области равносильно уравнению

$$zi \pm \sqrt{1 - z^2} = (xi \pm \sqrt{1 - x^2})(4i \pm \sqrt{1 - y^2}). \qquad (1.158)$$

Мы поэтому закончим наше рассмотрение трансцендентного номографирования теоремы сложения указанием общей задачи разыскания всех алгебраических анаморфоз разных форм теоремы сложения.

Из того, что в результате трансцендентной анаморфозы уравнение принимает тот или иной анаморфозируемый вид, в том числе, канонический вид уравнения третьего порядка, еще не следует, что существует алгебраическая анаморфоза данного уравнения.

Но это очевидно будет для дифференциальных уравнений, обладающих полным алгебраическим интегралом, т. е. алгебраической теоремой сложения и, прежде всего, для эллиптических интегралов вида

$$\int \frac{P_n(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \qquad (1.159)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, а X — многочлен не выше четвертой степени; и, наконец, более общей задачей алгебраического номографирования является задача номографирования теорем сложения для интегралов вида

$$\int R(x; \sqrt{X})\,\mathrm{d}x. \qquad (1.160)$$

Более сложным делом является построение соотношений, номографируемость которых основана на цитированной общей теореме сложения Абеля. Мы на этом глубоком вопросе не будем здесь останавливаться, т. к. он связан с построением теории номографирования в многомерных пространствах.

Все эти примеры хорошо иллюстрируют, между прочим, насколько сложный вид могут иметь уравнения, к которым применимы условия Сен-Робера. Другим источником для построения таких примеров являются все найденные автором номографируемые функции комплексного переменного первого класса. Действительно, согласно теореме автора вещественные и чисто мнимые части любых таких функций удовлетворяют условию Сен-Робера [2].

Как уже сказано, теория номографирования общей абелевой теоремы сложения для абелевых функций, в частности, гиперэллиптических, требует выхода в многомерное пространство и связано с теорией сетей Бляшке. Поэтому, мы в конце работы наметим связь номографии с теорией сеток Бляшке, которые (сетки) также прямо связаны с вопросами изображения теорем сложения эллиптических и общих абелевых интегралов.

§ 2. Вопрос существования неколлинеарных номограмм при выполнении условия Сен-Робера органически связан со следующим фактом топологической дифференциальной геометрии (теорема Зауэра и Графа) [16]. Если для уравнения $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ строить прямолинейные и, очевидно, тривиально гексагональный (Томсен) абак

$$x = u_1, \qquad y = u_2, \qquad x + y + u_3 = 0. \tag{2.1}$$

то, для краткости опуская элементарные частные случаи, топологическое преобразование

$$x = \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x)\wp'(y) - \wp(y)\wp'(x)}, \qquad y = \frac{\wp(x) - \wp(y)}{\wp(x)\wp'(y) - \wp'(x)\wp(y)} \tag{2.2}$$

отобразит эту сетку (Gewebe) наиболее общим образом, с точностью до коллинеации (и упомянутых элементарных случаев и случаев вырождения, которые, за недостатком места, мы переносим в следующую заметку), на сетку, следовательно, также гексагональную, касательных

$$1 + \wp(u) - x + \wp'(u)y = 0 \tag{2.3}$$

и кривой третьего класса

$$x = \frac{-12\wp^2(u) + g_2}{4\wp^3(u) + g_2\wp(u) + 2g_3}, \qquad y = \frac{-2\wp'(u)}{4\wp^3(u) + g_2\wp(u) + 2g_3}, \tag{2.4}$$

удовлетворяющую, стало быть, условию замкнутости шестиугольников сети (2.1), составленных вместе с диагоналями из кривых трех семейств кривых

$$w \equiv f(u_1 ; u_2 ; u_3) = 0, \tag{2.5}$$

которое (условие) может быть записано либо в виде $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, либо в виде условия Сен-Робера, либо в виде условия интегрируемости связанной с сетью формы Пфаффа

$$\gamma = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\ln \frac{\partial w}{\partial u_j}\right) \mathrm{d}u_j, \tag{2.6}$$

т. е. в виде равенства нулю внешнего дифференциала этой формы

$$d\gamma = \sum_{k,j=1}^{3} \left[\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} \ln\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial u_j}}{\frac{\partial w}{\partial \mu_k}}\right)\right] [\mathrm{d}u_j\, \mathrm{d}u_k]. \tag{2.7}$$

где $[\mathrm{d}u_j\, \mathrm{d}u_k]$ — косое произведение, обращение которого в нуль приводит очевидно к условию Сен-Робера, левая часть которого просто связана с инвариантом сети ϱp (Бляшке). Наоборот, критерий Сен-Робера есть условие гексагональности 3-сети. ([4])

§ 3. Подобную же форму Пфаффа мы образуем и для 4 семейств поверхностей пространства, и немедленно получаем полную систему инвариантов и пространственной сетки и условия замыкания. Но случай этот значительно сложнее и столь же богат связями с алгебраической геометрией пространственных кривых, особенно кривых 4 класса и номографией. (Каждые три семейства кривых, образованных на 4-й поверхности тремя семействами остальных, должны удовлетворять условию замыкания.)

Польза теоретическая и практическая этих рассмотрений для номографии — очевидна. Достаточно выполнить, например затем корреляцию, чтобы притти, таким образом, от сетки (2.4) к номограмме из выравненных точек на неуникурсальные сетки общего вида. За недостатком места, как уже указано выше, мы вынуждены выпустить „уникурсальные" и „распавшиеся" сетки, рассмотренные в отдельной статье. Таким образом, выясняется геометрия перехода от номограмм нулевого жанра к неколлинеарным номограммам второго и третьего жанров для уравнения $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, поскольку переход от одной гексагональной сети Бляшке к другой с непроективным изменением огибающей не есть коллинеация.

Наоборот, номографические рассмотрения полезны для теории сетей Бляшке. Условия Сен-Робера для уравнения $f(x;\, y;\, z) = 0$

$$\frac{\partial^2 \ln}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{f_x}{f_y}\right) = 0 \tag{3.1}$$

выражает существование сетки из трех семейств параллелей. Такая сетка очевидно, обладает свойствами гексагональности, так как каждый шестиугольник вместе с тремя главными диагоналями, составленный из линий трех семейств, замкнут. Так как это свойство не нарушается при топологических преобразованиях, т. е. в частности, при всяких аналитических взаимооднозначных преобразованиях

$$X = u(x;\, y), \qquad Y = v(x;\, y), \tag{3.2}$$

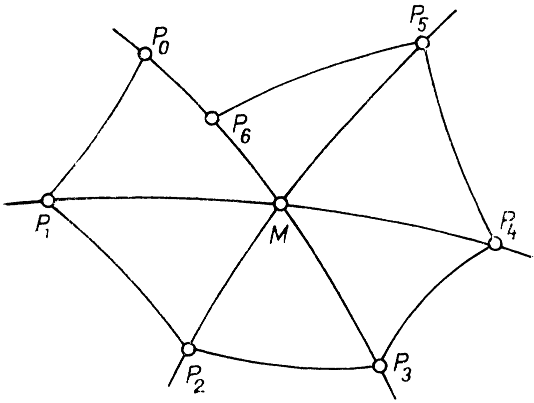
то условие Сен-Робера выражает условие гексагональности. Такое заключение могло быть сделано еще Сен-Робером, если бы он обладал понятием топологического преобразования. На самом же деле только в 1927 г. Томсен показал что условие гексагональности — есть условие возможности отобразить сетку

([4]) Значение других критериев номографии для теории сеток указано вкратце в конце статьи. Номография дает метод исследования сетей и сеток. Связь номографии с сетями впервые указал Бляшке. По поводу некоторых связей с сетками смотреть также работы автора, в частности работу [2].

на три семейства параллельных прямых. А Бляшке в 1928 г. получил условие Сен-Робера, правда при этом глубоко вскрыв его геометрическую сущность.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} u(x;y) &= \text{const} = c_1, \\ v(x;y) &= \text{const} = c_2, \\ f(u;v) &= \text{const} = c_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$



три проходящие через одну точку M кривые трех семейств (см. чертеж).

Отправляясь от точки $P_0(c_1; c_0)$, Бляшке подсчитывает уклонение P_0P_6, и показывает, что оно одновременно исчезает с

$$\varrho = \frac{1}{f_u f_v} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(ln\frac{f_u}{f_v}\right), \qquad (3.4)$$

для которого Бляшке, таким образом, получает инвариантное геометрическое определение. Равенство ϱ нулю и есть, очевидно, условие Сен-Робера. ϱ называется инвариантом Бляшке.

Все номографические критерии, в частности все критерии И. А. Вильнера:

1. критерии анаморфируемости системы

$$f_1(x; y; z_1) = 0, \qquad f_2(x; y; z_2) = 0; \qquad (3.5)$$

2. Критерии анаморфизируемости функций комплексного переменного (нулевого, второго, четвертого жанров);

3. критерии анаморфозируемости одного уравнения $f(x; y; z) = 0$: данные автором: — в силу принципа коррективности суть одновременно критерии спрямляемости 3- и 4-сетей. (Такова же роль критериев Сен-Робера, Массо-Лекорню, Кларка-Гронваля и других.) При этом, как следует из результатов И. А. Вильнера спрямляемые изотермические 4-сети, после спрямления образованы 4-семействами прямых, огибающих два конических сечения, что позволяет синтезировать механизм — вычислительное устройство.

Действительно, отображая эти 2 конических сечения (без общих действительных точек) (2 шкалы второго класса с градуированными парами касательных по переменным $z = a + bi$ и $w = p + qi$, — на некоторую пару кругов $O(R)$ и $O(R_1)$ при помощи проективитета; — затем касательные осуществляем при помощи двух пар вращающихся на расстояниях R и R_1 от точек O и O_1 линеек, концы которых указывают шкалы a, b, p, q. Прохождение четырех линеек через одну точку достигается связывающей их цапфой, устанавливающей четвертое пересечение. Получаем механизм 4 жанра. Гораздо проще дело с механизмами первого класса. Так один круг распадается на пару точек (пару пучков, либо даже оба круга распадаются и конструкция крайне упрощается — получаем 4 пучка прямых и цапфу (практически 4 линейки и цапфу).

По поводу номографического синтеза механизмов мы отошлем к стр. 117 до 118 [3] и к стр. 387—392 работы [7]. Номографический синтез обыкновенного множительного устройства был дан чехословацким математиком Свобода.

§ 4. Цель этого и следующих параграфов, не претендуя на полноту, параллельно рассмотреть сетчатые номограммы (в том числе многомерные), но преимущественно плоские, топологически эквивалентные прямолинейным (вообще — гиперплоскостным) сетчатым номограммам первого и нулевого жанра (жанр в смысле Клебиса) их связи с номограммами из выравненных точек.

Возьмем тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(x_0) & \wp'(x_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(x_0) \\ 1 & \wp(x_1) & \wp'(x_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \wp(x_n) & \wp'(x_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(x_n) \end{vmatrix} \ (^5) =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1!\,2!\dots n!\,.\,\Pi\sigma(x_\lambda - x_\mu)\,\frac{\sigma(x_0 + x_1 + \dots + x_n)}{\sigma^{n+1}(x_0)\,\sigma^{n+1}(x_1)\dots\sigma^{n+1}(x_n)}\,, \tag{4.1}$$

где $n \geqq \lambda > \mu \geqq 0$. В левой части равенства (4.1) мы имеем эллиптическую функцию от x_i, периоды которой совпадают с периодами $\wp(x)$, а порядок равен $n+1$, обращающуюся в простые нули в точках $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}$ и $x_i = -x_0 - x_1 - \dots - x_{i-1} - x_{i+1} - \dots - x_n$, т. е. в $n+1$ точке параллелограмма периодов и в ∞^{n+1} в вершинах параллелограмма периодов. Поэтому имеем два равносильных равенства:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0, \tag{4.2}$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & \wp(x_0) & \wp'(x_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \wp(x_1) & \wp'(x_1) & \dots & \wp^{(n+1)}(x_1) \\ 1 & \wp(x_n) & \wp'(x_n) & \dots & \wp^{(n+1)}(x_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.3}$$

---

(5) Значение такого рода определителей в общей теории эллиптических функций исключительно велико: через их отношение выражается эллиптическая функция любого порядка с данными нулями и полюсами. Отсюда следует, что любая эллиптическая функция обладает алгебраической теоремой сложения. Номографическое значение этого факта было указано выше.

причем равенство (4.3) выражает теорему сложения эллиптических интегралов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, что записано в равенстве (4.2). Этот результат следует из того, что σ-функция имеет простой нуль вначале, т. е. при выполнении (4.2) (см. (4.1)).

Поэтому мы можем сказать, что соотношение (4.2) допускает номографирование в n-мерном пространстве номограммой нулевого жанра, ибо для соттношения (4.2) имеем определитель Массо (по главной диагонали x_0 и единицы, в первом столбце x_i, по побочной диагонали, параллельной главной, стоят -1; нетрудно написать уравнения прямолинейных шкал, чего мы делать не будем.

$$\begin{vmatrix} x_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ x_1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & \ldots & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 & \ldots & -1 \\ x_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Кроме того, для соотношения (4.2) в n-мерном пространстве возможна „сетчатая“ номограмма из $n+1$ семейства параллельных гиперплоскостей. Если оси координат обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то уравнения этих семейств плоскостей будут

$$y_i = x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad x_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0, \tag{4.5}$$

причем в номограмме (4.4) $n + 1$ точка лежит в одной гиперплоскости, причем пометки $n + 1$ точки пересечения этой кривой с гиперплоскостью опять-таки удовлетворяют уравнению (4.2) (n из этих точек определяют гиперплоскость, а $n + 1$-я дает ответ).

§ **5.** Дополним пространство бесконечно-удаленными элементами. Получим проективное пространство. Возьмем теперь в n-мерном пространстве $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{y}_n$ $(n + 1)$ семейство гиперплоскостей

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \wp(x_0)\,\bar{y}_1 + \wp'(x_0)\,\bar{y}_2 + \ldots + \wp^{(n-1)}(x_0)\,\bar{y}_n = 0, \\ 1 + \wp(x_1)\,\bar{y}_1 + \wp'(x_1)\,\bar{y}_2 + \ldots + \wp^{(n-1)}(x_1)\,\bar{y}_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + \wp(x_n)\,\bar{y}_1 + \wp'(x_n)\,\bar{y}_2 + \ldots + \wp^{(n-1)}(x_n)\,\bar{y}_n = 0. \end{array}\right| \text{(6)} \tag{5.1}$$

(6) Легко видеть, что мы выполняем преобразование номограммы из выравненных точек (5.3) по принципу двойственности, заменяя точки гиперплоскостями, при этом мы не вводим однородные координаты, чтобы не загромождать записи, и т. к. сделать это легко.

Эти плоскости будут также проходить через одну точку каждый раз, когда удовлетворено уравнение (4.2) и, следовательно, определитель Δ равен нулю. (Мы считаем, что ранг определителя Δ равен n, что равносильно предположению об отсутствии соотношения типа (4.2) между меньшим числом переменных x_i). Легко видеть, что (5.1) есть одно и то же семейство гиперплоскостей

$$1 + \wp(x)\,\bar{y}_1 + \wp'(x)\,\bar{y}_2 + \ldots + \wp^{(n-1)}(x)\,\bar{y}_n = 0. \tag{5.2}$$

Можно найти огибающую этого семейства плоскостей. Поверхность эта, легко видеть, может быть названа «линейчатой». Если же дифференцировать уравнение (5.2) по параметру x $(n-1)$ раз, то найдется и принадлежащая этой поверхности кривая («ребро» возврата), которая, впрочем, для нас роли не играет. Касательные к этой «линейчатой» огибающей «развертывающейся» поверхности, проходящие через каждую точку пространства, $n+1$ гиперплоскости (по одной из каждого семейства) разрешают уравнения (5.2).

Решая совместно относительно $\bar{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n последних уравнений (5.1), мы без труда найдем

$$\bar{y}_i = \bar{y}_i(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n). \tag{5.2'}$$

Заменив теперь в (5.2′) x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ через y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ с помощью n первых уравнений (4.5), мы получим

$$\bar{y}_i = \bar{y}_i(y_1; y_2; \ldots; y_n). \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) доказывают существование дифференцируемого отображения $n+1$ семейства параллельных гиперплоскостей на семейство гиперплоскостей, касательных к нашей „линейчатой" поверхности.

Отсюда следует, что и обратно, если мы имеем «линейчатую» поверхность, обладающую тем свойством, что через каждую точку пространства к ней можно провести вообще $n+1$ касательную гиперплоскость, то существует точечное преобразование (5.3), отображающее семейство касательных к этой поверхности гиперплоскостей на $n+1$ семейство параллельных плоскостей.

§ 6. Этот результат становится особенно простым в случае $n = 2$ и $n = 3$. В первом случае вместо (4.2) и (5.3), переходя к привычным обозначениям $x_0 = w$, $x_1 = u$, $x_2 = v$, $y_1 = x$, $y_2 = y$, будем иметь

$$u + v + w = 0, \tag{6.1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

Последняя выражает теорему сложения в симметричной форме.

Вместо (4.5) будем иметь три семейства прямых плоскости:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad w + x + y = 0. \tag{6.3}$$

Уравнение кривой, несущей шкалы u, v, w в номограмме из выравненных точек для теоремы сложения (6.2) будет иметь вид согласно (6.8)

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp'(u). \tag{6.4}$$

Три семейства прямых („гиперплоскости" (5.1) для двумерного пространства) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \wp(u)\,\bar{x} + \wp'(u)\,\bar{y} &= 0, \\ 1 + \wp(v)\,\bar{x} + \wp'(v)\,\bar{y} &= 0, \\ 1 + \wp(w)\,\bar{x} + \wp'(w)\,\bar{y} &= 0. \end{aligned}\right| \tag{6.5}$$

Это одно и то же семейство прямых (см. (5.2))

$$1 + \wp(u)\,\bar{x} + \wp'(u)\,\bar{y} = 0, \tag{6.6}$$

огибающих кривую третьего класса и шестого порядка, двойственную кривой третьего порядка (6.4), декартово уравнение которой находим без труда:

$$\bar{x} = \frac{-12\wp^2(u) + g_2}{4\wp^3(u) + g_2\wp(u) + 2g_3}, \qquad \bar{y} = \frac{-2\wp'(u)}{4\wp^3(u) + g_2\wp(u) + 2g_3}. \tag{6.7}$$

Решая совместно первые два уравнения (6.5) и принимая во внимание первые два соотношения (6.3), мы аналогично (5.2) находим отображение семейств касательных к кривой третьего класса (6.7) (g_2 и g_3 — совершенно произвольны и на дискриминант $g_2^3 - 27g_3^2$ не налагаем ограничений), отображающихся на три семейства параллельных прямых (6.3)

$$\bar{x} = \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x)\wp'(y) - \wp(y)\wp'(x)}, \qquad \bar{y} = \frac{\wp(y) - \wp'(x)}{\wp(x)\wp'(y) - \wp(y)\wp'(x)}. \tag{6.8}$$

Так как любой кривой третьего порядка двойственно отвечает кривая третьего класса и наоборот, то, имея кривую третьего класса C^3, сумеем построить ее двойственный образ C_3, получив затем с помощью проективного преобразования уравнение кривой C_3 в нормальной форме Вейерштрасса

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \tag{6.9}$$

Построив отображение (6.8), сможем практически выполнить это отображение на три семейства параллельных прямых и наоборот. Это прямо следует из элементарного факта: если две фигуры плоскости (пространства) коллинеарны, то при преобразовании этой плоскости (пространства) по принципу двойственности этим фигурам соответствуют коллинеарные образы.

Заметим, что принятие за исходную форму уравнения кривой в номральной форме Аронгольда – Веерштрасса требует сначала преобразования кривой так, чтобы одна из ее точек перегиба была на ∞.

Тогда уравнение кривой будет иметь вид

$$y^2 = b_0 x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3. \tag{6.10}$$

Выполнив теперь простое аффинное преобразование

$$y = \frac{4}{b} y', \qquad x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0} x', \tag{6.11}$$

положив затем

$$g_2 = \frac{12(b_1^2 - b_0 b_2)}{16}, \qquad g_3 = \frac{3b_0 b_1 b_2 - 2b_1^3 - b_0^2 b_3}{16}. \tag{6.12}$$

приведем уравнение кривой к нормальной форме $y'^2 = 4x'^3 - g_2 x - g_3$.

Отсюда видим, что координаты точек кривой третьего порядка можно записать в параметрической форме

$$x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0}\wp(u), \qquad y = \frac{4}{b_0}\wp'(u), \tag{6.13}$$

после надлежащего проективного преобразования, для выполнения которого надо знать действительные точки перегиба. Для этого, как известно, надо решить уравнение девятой степени, имеющее всегда три действительных корня. 9 точек перегиба по три расположены на одной прямой так, что имеем конфигурацию из 12 прямых.

Таким образом, умножив определитель третьего порядка (6.2) на надлежащий выбранный числовой определитель по правилу «строка на строку», мы получим параметрическое представление в функциях Веерштрасса совершенно произвольной кривой третьего порядка. А, следовательно, ее двойственным образом, как мы утверждали, будет совершенно произволная кривая третьего класса. Заметим мимоходом, что нелегкое определение девяти точек перегиба путем решения уравнения девятой степени (Массиан равен нулю) совершается особенно просто, если известно параметрическое выражение координат кривой через эллиптические функции Веерштрасса $\wp(u)$ и $\wp'(u)$. Интересно отметить, что обычно номограммы второй канонической формы на кривой третьего порядка (см. работу [12]) строятся в случае, когда кривая является уникурсальной, имея точку возврата.

Или же, представив (6.1) в первой канонической форме

$$u'v'w' = 1, \tag{6.14}$$

где

$$u' = e^u, \qquad v' = e^v, \qquad w' = e^w. \tag{6.15}$$

получим номограмму на кривой с узловой двойной точкой. Наконец, представив в третьей канонической форме

$$u'' + v'' + w'' = u''v''w'', \tag{6.16}$$

где

$$u'' = \operatorname{tg} u, \qquad v'' = \operatorname{tg} v, \qquad w'' = \operatorname{tg} w. \tag{6.17}$$

получим номограмму на кривой третьего порядка с одной изолированной двойной точкой.

Наконец, эти три кривые могут и распадаться на коническое сечение и касающуюся его прямолинейную шкалу для (6.1); на коническое сечение и пересекающую его прямолинейную шкалу для (6.14) и на коническую шкалу и непересекающую её прямолинейную шкалу для (6.16); наконец, на три параллельные (более обще — три сходящиеся в одной точке прямолинейные шкалы (шкалы для (6.1)) и на три попарно пересекающиеся шкалы для (6.14).

Если взять двойственные образы этим номограммам из выравненных точек, то получим прямолинейные сетчатые номограммы, причем в силу изложенного все эти сетки в случаях невырождения преобразуются на одну из них, скажем на гексагональную сетку из трех семейств параллельных прямых, определяемую уравнением (6.3). Значит, все эти сетки гексагональные. Нетрудно написать формулы, дающие эти отображения. Нетрудно также найти отображения и в случае распадения. В случае распадения на коническое сечение и касательную прямую будем иметь для уравнения (6.1), вместо (6.2), представление

$$\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.18) \qquad \begin{vmatrix} u'^2 & u' & 1 \\ v'^2 & v' & 1 \\ -1 & 0 & w' \end{vmatrix} = 0, \tag{6.19}$$

$$\begin{vmatrix} u''^2 & u'' & 1 \\ v''^2 & v'' & 1 \\ -w'' & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.20}$$

Для преобразования сетки (6.18), рассматриваемой в системе координат $x_1O_1y_1$, в сетку $\bar{x}_1\bar{O}_1\bar{y}_1$:

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \bar{x}_1 + u \cdot \bar{y}_1 + u^2 &= 0, \\ 1 \cdot \bar{x}_1 + v \cdot \bar{y}_1 + v^2 &= 0, \\ 0 \cdot \bar{x}_1 + 1 \cdot \bar{y}_1 - w &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

поступим так.

Для отображения ее на сетку (6.3) решаем первые два уравнения (6.21) относительно $\bar{x}_1$ и $\bar{y}_1$, заменив затем u и v через x и y с помощью первых двух уравнений (6.3); получим

$$\bar{x}_1 = xy, \qquad \bar{y}_1 = -(x + y). \tag{6.22}$$

Для отображения сетки (6.19) на ту же сетку отображаем ее на сетку (см. (6.14)

$$x_1 = u', \qquad y_1 = \frac{1}{v'}, \qquad y_1 = w'x_1. \tag{6.23}$$

Получим уравнения сетки для (6.19) в виде

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \bar{x}_2 + u' \cdot \bar{y}_2 + u'^2 &= 0, \\ 1 \cdot \bar{x}_2 + v' \cdot \bar{y}_2 + v'^2 &= 0, \\ w' \cdot \bar{x}_2 + 0 \cdot \bar{y}_2 - 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

Отсюда находим $\bar{x}_2 = u'v'$, $\bar{y}_2 = -(u' + v')$ или

$$\bar{x}_2 = \frac{x_1}{y_1}, \qquad \bar{y}_2 = -\left(x_1 + \frac{1}{y_1}\right). \tag{6.25}$$

Принимая во внимание (6.15) и (6.3), получим теперь отображение на сетку (6.3):

$$\bar{x}_2 = e^{x+y}, \qquad \bar{y}_2 = -(e^x + e^y). \tag{6.26}$$

Для отображения сетки (6.20) имеем:

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \bar{x}_3 + u'' \cdot \bar{y}_3 + u''^2 &= 0, \\ 1 \cdot \bar{x}_3 + v'' \cdot \bar{y}_3 + v''^2 &= 0, \\ 1 \cdot \bar{x}_3 + 1 \cdot \bar{y}_3 - w'' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

Отсюда находим: $\bar{x}_3 = u''v''$, $\bar{y}_3 = -(u'' + v'')$. С помощью (6.17) и (6.3) находим искомое отображение:

$$\bar{x}_3 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, \qquad \bar{y}_3 = -(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y). \tag{6.28}$$

Для уравнения (6.1) теперь напишем упомянутые представления на трех уже названных уникурсальных крввых:

$$\begin{vmatrix} u^3 & u & 1 \\ v^3 & v & 1 \\ w^3 & w & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.29}$$

$$\begin{vmatrix} u'^3 - 1 & u'^2 & u' \\ v'^3 & v'^2 & v' \\ w'^3 & w'^2 & w' \end{vmatrix} = 0, \tag{6.30}$$

$$\begin{vmatrix} u''^3 & u''^2 + 1 & u'' \\ u''^3 & v''^2 + 1 & v'' \\ w''^3 & w''^2 + 1 & w'' \end{vmatrix} = 0. \tag{6.31}$$

Уравнения первой сетки суть

$$\left.\begin{aligned} u^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + u \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0, \\ v^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + v \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0, \\ w^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + w \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Отсюда находим с помощью (6.3) искомое отображение:

$$\bar{x}_{(1)} = \frac{1}{xy(x+y)}, \qquad \bar{y}_{(1)} = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy(x+y)}. \tag{6.33}$$

Уравнения сетки (6.30) будут:

$$\left.\begin{aligned} (u'^3 - 1)\,\bar{x}_{(2)} + u'^2\bar{y}_{(2)} + u' &= 0, \\ (v'^3 - 1)\,\bar{x}_{(2)} + v'^2\bar{y}_{(2)} + v' &= 0, \\ (w'^3 - 1)\,\bar{x}_{(2)} + w'^2\bar{y}_{(2)} + w' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

Отсюда находим

$$\bar{x}_{(2)} = \frac{u'v'}{u'^2v'^2 + u' + v'}, \qquad \bar{y}_{(2)} = \frac{u'v'(u' + v') + 1}{u'^2v'^2 + u' + v'} \tag{6.34'}$$

или, принимая во внимание (6.15) и (6.3), получим

$$\bar{x}_{(2)} = \frac{e^{x+y}}{e^{2(x+y)} + e^x + e^y}, \qquad \bar{y}_{(2)} = \frac{e^{x+y}(e^x + e^y) + 1}{e^{2(x+y)} + e^x + e^y}. \tag{6.35}$$

Уравнения сетки (6.31) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} u''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (u''^2 + 1)\,\bar{y}_{(3)} + u'' &= 0, \\ v''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (v''^2 + 1)\,\bar{y}_{(3)} + v'' &= 0, \\ w''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (w''^2 + 1)\,\bar{y}_{(3)} + w'' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Отсюда легко найдем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{(3)} &= \frac{u''v'' - 1}{u''^2v''^2 + u''^2 + u''v'' + v''^2}, \\ \bar{y}_{(3)} &= -\frac{u''v''(u'' + v'')}{u''^2v''^2 + u''^2 + u''v'' + v''^2}. \end{aligned} \tag{6.36'}$$

или, принимая во внимание (6.17) и (6.3), получим

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{(3)} &= \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y}, \\ \bar{y}_{(3)} &= \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y}. \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Формулы (6.22), (6.26), (6.28), (6.33), (6.35), (6.37) и доказывают утверждения, сделанные в начале § 6 и содержащие утверждения Зауэра и Графа.

Заметим, что огибающие наших сеток будут также уникурсальными или распавшимися кривыми третьего класса.

Так как три семейства параллельных прямых образуют гексагональную сетку, то-есть каждый шестиугольник, образованный вместе со своими главными диагоналями из кривых трех семейств замкнут, то в силу непрерывности нашего отображения этим же свойством обладает и семейство касательных к кривой третьего класса.

И это в силу изложенного есть наиболее общее семейство прямых, точнее — наиболее общий вид прямолинейной сетки, отображаемой на три пучка параллельных прямых. От исследования $n + 1$ параметрической сетки гиперплоскостей в n-мерном пространстве мы воздержимся за недостатком места.

Мы получим (случай $n = 2$) результат Графа и Зауэра [16].

§ 7. Если $n = 3$, то придерживаясь обычных обозначений, положим

$$\begin{array}{llll} x_0 = \sigma, & x_1 = u, & x_2 = v, & x_3 = w; \\ y_1 = x_1, & y_2 = y_1, & y_3 = z, & \bar{y}_1 = \bar{x}_1, \\ & \bar{y}_2 = y, & \bar{y}_3 = z. & \end{array}$$

Уравнения (4.5) примут вид

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = w, \qquad \sigma + x + y + z = 0. \tag{7.1}$$

Получим четыре семейства параллельных плоскостей.

Уравнение (5.2) перепишется так:

$$1 + \wp(u)\,\bar{x} + \wp'(u)\,\bar{y} + \wp''(u)\,\bar{z} = 0. \ (^7) \tag{7.1'}$$

дифференция по u, получим

$$\wp'(u)\,\bar{x} + \wp''(u)\,\bar{y} + \wp'''(u)\,\bar{z} = 0. \tag{7.2}$$

Решая совместно систему уравнений (7.1) и (7.2), получим линейчатую поверхность, обладающую тем свойством, что через каждую точку пространства к ней вообще можно провести четыре касательные плоскости

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \wp(u)\,\bar{x} + \wp'(u)\,\bar{y} + \wp''(u)\,\bar{z} = 0, \\ 1 + \wp(v)\,\bar{x} + \wp'(v)\,\bar{y} + \wp''(v)\,\bar{z} = 0, \\ 1 + \wp(w)\,\bar{x} + \wp'(w)\,\bar{y} + \wp''(w)\,\bar{z} = 0, \\ 1 + \wp(\sigma)\,\bar{x} + \wp'(\sigma)\,\bar{y} + \wp''(\sigma)\,\bar{z} = 0, \end{array}\right| \tag{7.3}$$

(7) Нетрудно найти ребро возврата огибающей линейчатой поверхности.

параметры которых связаны соотношением

$$u + w + v + \sigma = 0. \tag{7.4}$$

Прямолинейные образующие имеют значение параметров, совпадающие со значениями параметров, касающихся к развертывающейся линейчатой поверхности вдоль них плоскостей. Мы имеем номограмму со „шкалой“, расположенной на всей линейчатой поверхности, элементом которой (шкалы) служат параметрированные образующие. Вместе с тем, мы имеем отображение таких параметризованных развертывающихся линейчатых поверхностей на параметризованные пространственные кривые, что дает и известный метод изучения их взаимных свойств, но мы на этом не останавливаемся.

Уравнения отображения мы получим без труда, решив относительно $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ первые три уравнения (6.3), заменив в них затем u, v и w через x, y, z с помощью первых трех равенств (7.1).

Сетка из четырех пучков параллельных плоскостей должна обладать, очевидно, аналогичным плоской (гексагональной) сетке свойством октаэдричности, т. е. когда все восьмигранники, построенные из четырех пучков плоскостей, замкнуты (замкнутые октаэдры). Таким же свойством обладает, следовательно, и семейство плоскостей, касательных к нашей линейчатой поверхности. И такое семейство плоскостей можно отобразить на четыре семейства параллельных плоскостей.

Для теоремы сложения (7.4), помимо этой „сетчатой“ номограммы из четырех семейств параллельных плоскостей (7.1) и номограммы типа Мемке из выравненных точек (см. (4.4)) нулевого жанра

$$\begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 \\ v & 1 & -1 & 0 \\ w & 0 & 1 & -1 \\ \sigma & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.5}$$

имеется еще номограмма из выравненных точек

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) & \wp''(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) & \wp''(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) & \wp''(w) \\ 1 & \wp(\sigma) & \wp'(\sigma) & \wp''(\sigma) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.6}$$

на одной пространственной кривой

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp'(u), \qquad z = \wp''(u), \tag{7.7}$$

причем любая плоскость пересекает эту кривую в четырех точках, параметры которых u, v, w, σ связаны уравнением (7.4). Имеем номограмму на пространственной кривой четвертого порядка первого жанра и первого типа. Однако, в пространстве номографирование на пространственной кривой четвертого порядка (их существует два типа) более сложно, чем номографирование на кривой третьего порядка в плоскости.

§ **8.** В заключении отметим, что, считая в (4.3) $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$ параметрами, сможем преобразовать определитель к виду определителя Массо порядка $n-p+1$, причем элементы строк будут уже зависеть от всех параметров. Получаем номограммы с многопараметрическими шкалами. Так, при $n = 3$ и $p = 1$ получим уже плоскую номограмму с тремя бинарными полями, например (если $x_{k_1} = x_0$) с полями $(x_1; x_0)$, $(x_2; x_0)$; $(x_3; x_0)$. Но если $x_0 = \text{const}$, будем иметь обычную номограмму из выравненных точек для $n = 2$.

Как мы уже отметили в конце § 7 по частному поводу, общая теория номографирования, теория канонических форм, аналогов условий Сен-Робера, нарушение единственности и учение о жанре номограммы развиваются значительно сложнее, чем для плоскости.

Алгоритм решения проблемы общей анаморфозы в многомерном пространстве, при котором возможность анаморфозы проверяется в ходе построения многомерного определителя Массо (согласно принципу игнорирования критериев) дан автором в работе [3], [7] и в § 3 работы [8] (см. также [8] [9]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вильнер И. А., *О линейной зависимости функций*, Сборник статей ВЗПИ *7* (1954), 126 127.

[2] Вильнер И. А., *Номографирование систем уравнений и аналитических функций*, Номографический сборник МГУ 1951.

[3] Вильнер И. А., *Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография*, Сборник статей ВЗПИ *21* (1958).

[4] Fricke, Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* II., 1892.

[5] Soreau R., *Traité des Abaques* II., 1921.

[6] Вильнер И. А., *Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов*. УМН IX (1954), вып. *2* (60), 113—124.

[7] Вильнер И. А., *Проблема номографической интерпретации функций комплексного переменного и задачи Коши*, Сборник Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз 1960.

[8] Вильнер И. А., *Стереоскопическая номография и решение проблем общей анаморфозы в N-мерном пространстве*, УМН XI (1956), *4* (70), 123—130.

[9] Вильнер И. А., *Стереоскопическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой*, Укр. Мат. Журнал IX (1957), *2*, 121—133.

[10] d'Ocagne, *Traité de Nomographie*, Paris 1921.

[11] Gronwall T. H., *Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés.* J. math. pur. appl., sér. 6, *8*, 59 (1912).

[12] Глаголев Н. А., *Теоретические основы номографии*, Изд. ОНТИ НКТП 1934.

[13] Пентковский М. В., *Номография*, изд. ГТТЛ 1949.

[14] Невский Б. А., *Справочная книга по номографии*, ГИТТЛ 1951.

[15] Вильнер И. А., *Топология и геометрия пространства мнимой анаморфозы*, УМН XIII (1958), 4 (82).

[16] Graf H., Sauer R., *Über dreifache Geraden in der Ebene, welche Dreieckenetze bilden*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Heft 1 (1924).

[17] Hermite, Proc. Math. Congress, Chicago 1896.

[18] Ахиезер Н. И., *Элементы теории эллиптических функций*, ОГИЗ Гостехиздат 1948.

[19] Уокер Р., *Алгебраические кривые*, изд. Иностр. литературы 1952.

[20] Van der Waerden B. L., *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin 1939.

[21] Вильнер И. А., *О номографической аппроксимации эллиптических функций и номограммах в комплексных проективных плоскостях*, Вычислительная математика 7 (1961), 3—74.

[22] Viľner I. A., *Neelementární nomogramy rovnic třetího nomografického řádu a jejich automorfní transformace*, Nomografické metody, ČSAV, Praha 1962, 37—85.

Поступило 1. 3. 1963.

Главное управление инженерно-техничеких ВУЗов
Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт
Москва
и

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty VŠT
v Košiciach

RELATIONS NON ÉLÉMENTAIRES DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE NOMOGRAPHIQUE ET LEURS TRANSFORMATIONS AUTOMORPHES

Iossiph A. Viľner, Pavel Galajda

Résumé

Dans ce mémoire nous considérons les représentations diverses du théorème de l'addition de fonctions elliptiques par des nomogrammes à points alignés et quelques applications.