Anton Kotzig

Из комбинаторики конечных последовательносей

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 14 (1964), No. 1, 75--82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126635

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XIV, 1 1964

ИЗ КОМБИНАТОРИКИ КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

1.

Пусть m, n — данные натуральные числа. Положим $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и систему всех m-членных последовательностей, в которых всякий член принадлежит к N, обозначим через $\mathfrak{P}_n^m$. Если $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — произвольная последовательность из $\mathfrak{P}_n^m$, то последовательность $A' = (a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{r+s})$, где $0 \leqq r < r + s \leqq m$, мы назовем *сегментом* последовательности A. Через $\varphi_x(A)$ (или же через $\varphi_x(A')$) обозначим число, которое показывает, сколько раз выступает число x в последовательности A (или же в ее сегменте A'). Пусть q — некоторое натуральное число. Мы будем говорить, что последовательность A *уравновешена* по модулю q, если для всяких двух чисел x, y из N имеет место:

$$\varphi_x(A) \equiv \varphi_y(A) \pmod q.$$

О последовательности A из $\mathfrak{P}_n^m$ мы будем говорить, что она *пестрая* по модулю q, если ни один ее сегмент не уравновешен по модулю q.

Теорема 1. *В $\mathfrak{P}_n^m$ существует последовательность пестрая по модулю q тогда и только тогда, когда $m < q^{n-1}$.*

Доказательство. **1.** Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — произвольная последовательность из $\mathfrak{P}_n^m$ и пусть i — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим через A^i следующий сегмент последовательности $A : A^i = (a_1, a_2, \ldots, a_i)$. Для всех $x = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$ мы определяем числа ω_x^i так: $\omega_x^i \equiv \varphi_x(A^i) \pmod q$; $\omega_x^i \in \{0, 1, \ldots, q - 1\}$ и кроме того положим $\omega_x^0 = 0$ для всех $x \in N$. Для каждого i из $\{1, 2, \ldots, m\}$ мы получаем такую же самую n-тку чисел. $\Omega^i = [\omega_1^i, \omega_2^i, \ldots, \omega_n^i]$. Пусть $i < j$ — произвольные два числа из $\{0, 1, \ldots, m\}$. Очевидно, имеет место: сегмент $A^* = (a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j)$ уравновешен по модулю q тогда и только тогда, когда для всех x, y из N справедливо:

$$\omega_x^i - \omega_x^j \equiv \omega_y^i - \omega_y^j \pmod q.$$

Число различных упорядоченных n-ток чисел $\Omega = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, где $\omega_x \in \{0, 1, \ldots, q - 1\}$ для всех $x \in N$, есть q^n. Множество всех этих n-ток можно разбить на q^{n-1} классов по q n-тках так: n-тки $\Omega = [\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n]$, $\Omega' = [\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n]$ принадлежат к одному и тому же классу разбиения только тогда, когда для всяких двух чисел $x, y \in N$ справедливо:

$$\omega_x - \omega'_x \equiv \omega_y - \omega'_y \pmod q.$$

В силу предыдущего имеет место: A является пестрой последовательностью по модулю q тогда и только тогда, когда между n-тками $\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^m$ из каждого класса упомянутого разбиения встречается не более одной n-тки причем каждая из них встречается не чаще чем один раз. Кроме того, из класса разбиения, содержащего n-тку $\Omega^0 = [0, 0, \ldots, 0]$ в последовательности $\Omega^1, \Omega^2, \ldots; \ldots, \Omega^m$ не может выступать никакая n-тка. Из этого сразу же следует, что о числе членов последовательности пестрой по модулю q должно иметь место: $t \leqq q^{n-1} - 1$ и, значит, ни одна из последовательностей из $\mathfrak{P}_n^m$, где $m \geqq q^{n-1}$ не является пестрой по модулю q.

2. Пусть $B = (b_1, b_2, \ldots)$ — бесконечная последовательность, определенная следующим образом: $b_x = s$ тогда и только тогда, когда x делится на число q^{s-1} и не делится на число q^s (значит, если x не делится на число q, то $b_x = 1$). Обозначим через B^i сегмент последовательности B, который начинается первым и кончается i-тым членом из B. Очевидно, имеет место: если $m = q^{n-1}$, то B^m принадлежит к $\mathfrak{P}_n^m$; для всех $i < q^{n-1}$ справедливо, в частности, $0 < b_i < n$. Мы докажем, что справедливо и следующее: если $m = q^{n-1} - 1$, то B^m является пестрой последовательностью по модулю q.

Построим прямоугольную матрицу $C = \| c_{r,s} \|$ со q^{n-1} строками и n столбцами так:

(1) $c_{1,s} = 0$ для всех $s = 1, 2, \ldots, n$.

(2) $c_{r,s} \equiv \varphi_s(B^{r-1}) \pmod q$; $c_{r,s} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ для всех $r = 2, 3, \ldots, q^{n-1}$; $s = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть k — целое неотрицательное число $< n$ и пусть $j \in \{1, 2, \ldots, q^{n-k-1}\}$. Из строк матрицы образуем q^{n-k-1} групп k-того порядка таким образом: j-тую группу k-того порядка образуют строки начиная $[(j-1)q^k + 1]$-той и кончая jq^k-той. Следовательно, существует только одна группа $(n-1)$-того порядка а всякая „группа" нулевого порядка содержит одну и только одну строку.

Непосредственно из определения последовательности B ясно, что имеет место:

(α) члены n-того столбца матрицы C сплошь нулевые;

(β) в произвольной группе k-того порядка все строки в столбцах с $(k+1)$-того и кончая n-тым имеют одинаковые числа, а две строки, принадлежащие к разным группам k-того порядка и к той же самой группе $(k+1)$-того порядка имеют в $(k+1)$-том столбце различные числа.

Из приведенного следует, что всякая строка матрицы представляет собой иной элемент декартового произведения:

$$\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{n-1 \text{ раз}} \times \{0\}.$$

Значит, если $i < j$ — произвольные натуральные числа и $j < q^{n-1}$, то имеет место: $\varphi_n(B^i) \equiv \varphi_n(B^j) \equiv 0 \pmod{q}$ и существует $x \in N$ такое, что $\varphi_x(B^i) \not\equiv \not\equiv \varphi(B^j) \pmod{q}$. Другими словами сказано: сегмент последовательности B''' который начинается элементом b_{i+1} и кончается элементом b_j, не уравновешен. Поэтому B''' является последовательностью пестрой по модулю q. Этим доказательство теоремы проведено.

Примечание 1. Частным случаем последовательностей уравновешенных по модулю q являются последовательности, в которых некоторый сегмент повторяется непосредственно q-раз один за другим. Последовательности, не содержащие никакого уравновешенного сегмента, могут быть, если равновесие определить таким образом, также бесконечны ($m = \infty$), как показывает пример последовательности рассматриванной в [1,2,3,4,6] (в этом случае $q = 3$; $n = 2$), или пример последовательности построенной в [5,6], где $q = 2$, $n = 3$.

Примечание 2. Для изучения сечений в регулярных графах n-той степени, которых можно разбить на n линейных факторов, имеют важное значение уравновешенные последовательности по модулю 2, которые обладают следующим свойством: всякий собственный сегмент является пестрым по модулю 2. Нетрудно убедиться, что, напр. при $n = 3$ существует только три типа следующих уравновешенных последовательностей:([1]) *aa; abc; abab;* где $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ а в случае $n = 4$ существует уже пятнадцать этих типов: *aa; abab; abcb; abacab; abacbc; abcabc; abcacb; abcbac; abcbdb; abacabac; abacbabd; abcbabcb; abcbdcbc; abcabadb; abcacdac* причем $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

2.

Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n > 1)$ — произвольная n-членная возрастающая последовательность целых чисел. К последовательности A образуем множество $P(A)$ так: число r принадлежит к $P(A)$ тогда и только тогда, когда существуют два числа $i > j$ в $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, таких, что имеет место $a_i - a_j = r$. Последовательность A мы назовем *совершенной*, если $P(A)$ содержит $\binom{n}{2}$ элементов и если эти элементы можно расположить в арифметическую

([1]) Члены последовательности запятыми не отделяем.

последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $\left(\text{где } m = \binom{n}{2}\right)$ так, что для всех k из $\left\{1, 2, \ldots, \binom{n}{2}\right\}$ справедливо

$$\alpha_k = \varepsilon + (k - 1)\Delta.$$

причем ε — число целое, Δ — число натуральное.

Напр. четырехчленная последовательность $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 7$ совершенна. Дело в том, что $1 = a_4 - a_3 ; 2 = a_2 - a_1 ; 3 = a_3 - a_2 ; 4 = a_3 - a_2 :$ $5 = a_3 - a_1 : 6 = a_4 - a_1$ и, следовательно, множество $P(A)$ можно расположить в $6 = \binom{4}{2}$-членную арифметическую последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Значит, в только что приведенном случае $\varepsilon = \Delta = 1$. В дальнейшем мы ответим на вопрос существует ли для данного n n-членная совершенная последовательность, и если да, то сколько различных типов упомянутых последовательностей существует.

Случай, когда $n = 2$ неинтересен: дело в том, что если $a_1 - a_2$ — два произвольных целых числа, то последовательность $A = (a_1, a_2)$ совершенна. Перейдем к случаю, когда $n = 3$. Справедливость равенства $\varepsilon = \Delta$ для всех трехчленных совершенных последовательностей легко обнаруживается следующим соображением: Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)$ — совершенная последовательность. Наибольшим числом множества разностей $P(A)$ является разность $a_3 - a_1$. Поэтому должно быть $a_3 - a_1 = \varepsilon + 2\Delta$. Но, тогда имеет место или $a_2 - a_1 = \varepsilon$; $a_3 - a_2 = \varepsilon + \Delta$ или $a_2 - a_1 = \varepsilon + \Delta$: $a_3 - a_2 = \varepsilon$ и, следовательно, всегда справедливо $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_1 = 2\varepsilon + \Delta$. В силу предыдущего также $a_3 - a_1 = \varepsilon + 2\Delta$. Из этого следует, $\varepsilon = \Delta$. Поэтому существует только два типа трехчленных совершенных последовательностей:

первый тип: $a_1 = c$; $a_2 = c + \Delta$; $a_3 = c + 3\Delta$;

второй тип: $a_1 = c$; $a_2 = c + 2\Delta$; $a_3 = c + 3\Delta$;

где, в обоих случаях, c — произвольное целое число, Δ — произвольное натуральное число.

Случай $n = 4$: Пусть $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ — произвольная четырехчленная совершенная последовательность. Наибольшим числом множества $R(A)$, содержащего 6 элементов, является разность $a_4 - a_1$, значит, имеет место: $a_4 - a_1 = \varepsilon + 5\Delta$. Очевидно, множество $M = \{a_2 - a_1 ; a_3 - a_2 ; a_4 - a_3\}$ содержит число ε а также число $\varepsilon + \Delta$. Дело в том, что сумма $(a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_3 - a_1$ и также само сумма $(a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) = a_4 - a_2$ принадлежит к $R(A)$ и ни ε, ни $\varepsilon + \Delta$ не могут быть суммой двух чисел из $R(A)$. Третьим числом множества M не может быть число $\varepsilon + 4\Delta$. Это следует из того, что сумма чисел множества M равна числу $a_4 - a_1 = \varepsilon + 5\Delta$, а если бы число $\varepsilon + 4\Delta$ принадлежало к M, то имело бы место $\varepsilon + 5\Delta = a_4 - a_1 = \varepsilon + (\varepsilon + \Delta) + (\varepsilon + 4\Delta) = 3\varepsilon + 5\Delta$. Итак, $\varepsilon = 0$, что невозможно, поскольку последовательность A, в силу предположения, возростающая. Предположим, что третьим числом множества M является число $\varepsilon + 3\Delta$. Значит, справедливо: $\varepsilon + 5\Delta = a_4 - a_1 = \varepsilon + \varepsilon + \Delta + \varepsilon + 3\Delta = 3\varepsilon + 4\Delta$. Из этого следует, что $\Delta = 2\varepsilon$ и, значит, имеет место $R(A) = \{\varepsilon, 3\varepsilon, 5\varepsilon, 7\varepsilon, 9\varepsilon, 11\varepsilon\}$. Итак, $R(A)$ содержит только нечетные кратные натурального числа ε. Однако $a_3 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2)$, причем как число $a_2 - a_1$ так и число $a_3 - a_2$ принадлежит к $R(A)$. Но, тогда $a_3 - a_1$ (также принадлежащее к $R(A)$) является четным кратным числа ε. Таким образом мы пришли к противоречию. Предположение: $\varepsilon + 3\Delta$ принадлежит к M приводит к противоречию. Остается уже только следующая возможность: $\{\varepsilon, \varepsilon + \Delta, \varepsilon + 2\Delta\} = M$. Значит имеет место: $\varepsilon + 5\Delta = a_4 - a_1 = 3\varepsilon + 3\Delta$; итак: $\varepsilon = \Delta$; $M = \{\Delta, 2\Delta, 3\Delta\}$; $P(A) = \{\Delta, 2\Delta, 6\Delta\}$. Имеет место также: $a_4 - a_1 = 6\Delta$; $\{a_3 - a_1, a_4 - a_2\} = \{4\Delta, 5\Delta\}$. Надо различать следующих два возможных случая:

первый случай: $a_3 - a_1 = 4\Delta$; $a_4 - a_2 = 5\Delta$

второй случай: $a_3 - a_1 = 5\Delta$; $a_4 - a_2 = 4\Delta$

В первом случае из $a_4 - a_1 = 6\Delta$; $a_3 - a_1 = 4\Delta$; $a_4 - a_2 = 5\Delta$ следует $a_2 - a_1 = \Delta$; $a_4 - a_3 = 2\Delta$ и, значит $a_3 - a_2 = 3\Delta$. Во втором случае из приведенных уравнений следует $a_2 - a_1 = 2\Delta$; $a_3 - a_2 = 3\Delta$; $a_4 - a_3 = \Delta$.

Значит, если мы возьмем $a_1 = c$; $a_2 = c + \Delta$; $a_3 = c + 4\Delta$; $a_4 = c + 6\Delta$ (первый случай), или возьмем $a_1 = c$; $a_2 = c + 2\Delta$; $a_3 = c + 5\Delta$; $a_4 = c + 6\Delta$ (второй случай), где c — целое число, Δ — натуральное число, мы обязательно получим четырехчленную совершенную последовательность и каждая из четырехчленных совершенных последовательностей должна принадлежать к одному из двух приведенных типов.

Ответ на вопрос, существуют ли совершенные последовательности при $n > 4$, дает следующая теорема:

Теорема 2. *Не существует более чем четырехчленная совершенная последовательность.*

Доказательство 1. Сначала докажем, что при $n > 4$ не существует такая совершенная последовательность, для которой имело бы место $\varepsilon = \Delta$. Пусть q — произвольное натуральное число > 2, и пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$ — произвольная совершенная последовательность, для которой имеет место $\varepsilon = \Delta$. Множество $R(A)$ содержит, очевидно, все такие и только такие элементы: $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, \binom{q}{2}\varepsilon$. Очевидно, наибольшим числом из $R(A)$ является разность $a_q - a_1$ и поэтому имеет место $a_q - a_1 = \frac{1}{2}q(q-1)\varepsilon$. Однако, справедливо $a_q - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_q - a_{q-1})$. Правая часть этого уравнения является суммой $q - 1$ различных чисел множества $R(A)$.

Из уравнения

$$\sum_{i=1}^{q-1} i\varepsilon = \frac{1}{2} q(q-1)\varepsilon$$

следует, что для этой суммы Q имеет место:

$$Q \geqq \frac{1}{2} q(q-1)\varepsilon.$$

Однако, знак $>$ мы не берем во внимание, поскольку $a_q - a_1 = \frac{1}{2} q(q-1) = Q$. Из этого тотчас же следует, что последовательность $A' = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_q - a_{q-1})$ является некоторой перестановкой последовательности $\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, (q-1)\varepsilon$. Очевидно, что сумма двух произвольных соседних членов последовательности A' является числом, которое принадлежит к $R(A)$ и не принадлежит к A'. Из этого следует, что член ε из A' является или первым или последним членом последовательности A' и что его соседним членом в этой последовательности есть член $(q-1)\varepsilon$ (во всех других случаях сумма члена ε с соседним членом представляла бы собой опять член из A', что, очевидно, в совершенной последовательности невозможно). Значит, или (первый случай): $a_2 - a_1 = \varepsilon$; $a_3 - a_2 = (q-1)\varepsilon$, или (второй случай): $a_{q-1} - a_{q-2} = (q-1)\varepsilon$; $a_q - a_{q-1} = \varepsilon$, так что в первом случае — $a_3 - a_1 = q\varepsilon$ и во втором случае — $a_q - a_{q-2} = q\varepsilon$. Мы утверждаем: в первом случае имеет место $a_q - a_{q-1} = 2\varepsilon$ а во втором случае $a_2 - a_1 = 2\varepsilon$. Докажем справедливость нашего утверждения: член 2ε из последовательности A' не может соседствовать с двумя членами (дело в том, что в противном случае сумма члена 2ε с одним из его соседних членов должна была бы принадлежать к A') — а соседствует, очевидно, с членом $(q-1)\varepsilon$ (с членом $(q-2)\varepsilon$ не может соседствовать, так как сумму $q\varepsilon$ дает уже член ε со своим соседним членом). Однако, это значит, что 2ε является в первом случае последним членом а во втором случае первым членом последовательности A'. Член $(q-1)\varepsilon$ в обоих случаях одновременно является и вторым и предпоследним членом последовательности A'. Следовательно, последовательность A' имеет точно три члена и не может быть $q > 4$. Это доказывает, что для $n > 4$ не существует совершенной последовательности, для которой имело бы место $\varepsilon = \Delta$.

2. Докажем, что для $n > 2$ не существует совершенной последовательности, для которой $\varepsilon = m\Delta$, где m — натуральное число > 1. Наоборот, предположим, что $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(n > 2)$ является некоторой совершенной последовательностью, для которой справедливо $\varepsilon = m\Delta$, где m — натуральное число > 1. Найбольшим числом из $R(B)$ есть число $b_n - b_1 = \left[\binom{m}{2} - 1 + m\right]\Delta$, которое одновременно является суммой всех чисел последовательности $B' = (b_2 - b_1, b_3 - b_2, \ldots, b_n - b_{n-1})$. Однако, эта сумма не может быть меньше чем сумма первых $n - 1$ членов последовательности $m\Delta, (m+1)\Delta, (m+2)\Delta, \ldots$, значит, имеет место:

$$\left[\binom{n}{2} - 1 + m\right]\Delta \geqq \left[m(n-1) + \sum_{i=1}^{n=2} i\right]\Delta.$$

Откуда следует:

$$2(m-1)\,\Delta \geqq n(m-1)\,\Delta.$$

Мы пришли к потиворечению, так как в силу предположения $n > 2$; $m > 1$; $\Delta > 0$. Предположение существования такой совершенной последовательности, которая имеет больше чем два члена и для которой справедливо $\varepsilon = m\Delta$; $m > 1$ приводит к противоречению.

3. В силу уже сказанного, для совершенной последовательности $n > 4$ остается лишь одна возможность: ε не является кратным числа Δ. Но, тогда $\Delta > 1$. Пусть ω есть остаток числа ε при делении на число Δ, то есть пусть $\varepsilon \equiv \omega \pmod{\Delta}$; $\omega \in \{1, 2, \ldots, \Delta - 1\}$; предположим, что $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $n > 4$, есть некоторая совершенная последовательность. Согласно предыдущему о произвольном числе $x \in R(C)$ обязательно справедливо: $x \equiv \omega \pmod{\Delta}$. Следовательно, имеет место напр.:

$$c_2 - c_1 \equiv \omega \pmod{\Delta},$$

$$c_3 - c_2 \equiv \omega \pmod{\Delta}$$

и, значит, также:

$$c_3 - c_1 \equiv 2\omega \pmod{\Delta}.$$

Однако, имеет место — как уже было упомянуто — $c_3 - c_1 \in R(C)$ а, значит $c_3 - c_1 \equiv \omega \pmod{\Delta}$, что при $\omega \neq 0$ противоречит раньше нами выведенному. Предположение существования совершенной последовательности при $n > 4$ ведет всегда к противоречию. Это доказывает теорему.

Результаты исследования в табл. 1.

Таблица 1

n	все типы n-членных совершенных последовательностей	предположения
2	$c, c+\Delta$	c — целое число
3	$c, c+\Delta, c+3\Delta$ $c, c+2\Delta, c+3\Delta$	Δ — натуральное число
4	$c, c+\Delta, c+4\Delta, c+6\Delta$ $c, c+2\Delta, c+5\Delta, c+6\Delta$	

Литература

[1] Euwe M., *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel*, Proc. Kon. Akad. Wetesch. Amsterdam *32* (1929), 633 642.

[2] Morse M., Hedlund G. A., *Symbolic Dynamics*, Amer. J. Math. *60* (1938), 815 866.

[3] Morse M., Hedlund G. A., *Unending chess, symbolic, dynamics and a problem in semigroups*, Duke Math. J. *11* (1944), 1 7.

[4] Bagemihl F., *Transfinitely endless chess*, Zeitschr. f. math. Logik *2* (1956), 215 217.

[5] Zech T., *Wiederholungsfreie Folgen*, Z. angew. Math. Mech. *38* (1958), 206—209.

[6] Яглом А. М., Яглом И. М., *Неэлементарные задачи в элементарном изложении*, Москва (1954), (задачи 123 и 124).

Поступило 27. 9. 1963

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

ON SOME COMBINATORIAL PROPERTIES OF THE FINITE SEQUENCES

Anton Kotzig

Summary

Let m, n, q be natural numbers. Let $N \quad \{1, 2, \dots, n\}$ and let $\mathfrak{P}_n^m$ be the system of all (finite) sequences $A \quad (a_1, a_2, \dots, a_m)$ where $a_i \in N$ $(i \quad 1, 2, \dots, m)$. The symbol $q_x(A')$, where A' is the segment of A and $x \in N$, will denote the number of members of the sequence A' which are equal to x. By the *equilibrium* sequence modulo q we mean a sequence A in which $q_x(A) \quad q_y(A)$ (mod q) for all $x, y \in N$. By the *varied* sequence we mean such in which no its segment is an equilibrium sequence. In the paper it is proved that in $\mathfrak{P}_n^m$ there exists a varied sequence modulo q iff $m \quad q^{n} \quad 1$ The varied sequence of maximal length is constructed for any n, q.

By the *perfect* sequence we mean an increasing (finite) sequence $B \quad (b_1, b_2, \dots, b_n)$ of integers if all differences $b_i \quad b_j$ (where $i > j$) are mutually different and if they can be arranged so that they would form an (finite) arithmetical progression. It is proved that there exists no perfect sequence with more than 4 members. All the types of the perfect sequences are constructed.