Josef Vala

# Quadratische Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 16 (1966), No. 3, 257--267

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126616

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

# QUADRATISCHE DOPPELVERHÄLTNISSCHAREN AUF REGELFLÄCHEN

JOSEF VALA, Brno

In der Arbeit betrachtet man die Eigenschaften der Kegelschnittflächen, die zur gegebenen quadratischen $R$-Schar gehören. Weiter werden die Eigenschaften des Paares der quadratischen $R$-Systeme mit gleichen Grundkurven untersucht.

a) Betrachten wir eine Regelfläche $\Phi$ in dem projektiven dreidimensionalen Raum $P_3$. Die Fläche $\Phi$ sei keine Torse. Ihre Gleichung kann man in der Form

$$x = y(u) + vz(u) \tag{1}$$

angeben. Die Differentialgleichungen der Leitlinien der Fläche $\Phi$ haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'; \end{aligned} \tag{2}$$

die Striche bedeuten Ableitungen nach $u$.

Durch die Differentialgleichung

$$v' + \alpha(u) + 2\beta(u)v + \gamma(u)v^2 = 0, \tag{3}$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die gegebenen Funktionen des Parameters $u$ sind, ist auf der Fläche $\Phi$ eine *Doppelverhältnisschar* (*R-Schar*) bestimmt. Die Linien der $R$-Schar schneiden die Erzeugenden der Fläche $\Phi$ in den projektiven Punktreiben durch.

Die Tangenten der Linien der $R$-Schar in den Punkten der Erzeugenden $p$ der Fläche $\Phi$ bilden eine Geradenschar $\Gamma_1$ der Quadrik $\Psi$ (Mayer [2], S. 4.). Die Quadriken $\Psi$ längs aller Erzeugenden $p$ der Fläche $\Phi$ bilden eine einparametrische Schar $\Psi_u$. Die Charakteristiken der Schar $\Psi_u$ bestehen immer aus der Geraden und aus der Kurve $k$ dritter Ordnung.

Wenn wir durch $x_1, x_2, x_3, x_4$ die Koordinaten des Punktes $X$ bezeichnen,

$$X = x_1y + x_2z + x_3y' + x_4z',$$

dann gilt für die Kurve $k$ (bei dem konstanten Wert des Parameters $u$):

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad x_1 &= \varphi + B' + 2(B+\psi)(\beta+\gamma v) - B(\beta_{11} + v\beta_{21}),\\
x_2 &= v(\varphi + B') - 2(B+\psi)(\alpha+\beta v) - B(\beta_{12} + v\beta_{22}),\\
x_3 &= \psi + 2B,\\
x_4 &= v(\psi + 2B),
\end{aligned}
$$

wo $B = -\alpha - 2\beta v - \gamma v^2$,

$$\varphi = -v^2\alpha_{21} + v(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12},\quad \psi = -v^2\beta_{21} + v(\beta_{22} - \beta_{11}) + \beta_{12}$$

(siehe [4]).

Wenn sich der Parameter $u$ ändert, dann sind die Relationen (4) Gleichungen der Fläche $\Omega$.

*Grundkurven* einer Doppelverhältnisschar nennt man das Kurvenpaar, in dessen Punkten die Kurven der $R$-Schar die asymptotischen Linien

$$(5)\qquad 2v' - \beta_{21}v^2 + (\beta_{22} - \beta_{11})v + \beta_{12} = 0$$

der Fläche $\Phi$ berühren (Barner [1], S. 57).

Weiter werden wir voraussetzen, daß $y, z$ die Grundkurven der $R$-Schar sind. Die Differentialgleichung aller $R$-Scharen, die die Linien $y, z$ als Grundkurven haben, lautet dann:

$$(6)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{\beta'_{21}}{2}v^2 - 2\beta(u)v - \frac{\beta_{12}}{2},$$

wo $\beta$ eine beliebige Funktion des Parameters $u$ ist. Diese $R$-Scharen bezeichnen wir mit $R(y, z)$.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß keine der Linien $y, z$ die asymptotische Kurve der Fläche $\Phi$ berührt und daß keine der Linien $y, z$ durch die Fleknodalpunkte der Fläche $\Phi$ geht. Die Linien $y, z$ seien im Sinne von Terracini [3] nicht konjugiert.

Weiter werden wir einige Ergebnisse der Behandlung [4] einführen, diese Ergebnisse sind für die weiteren Betrachtungen nützlich.

Es existieren zwei $R(y, z)$-Scharen mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen Kurven dritter Ordnung $k$ immer in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen. Wir bezeichnen diese $R$-Scharen mit $R_1(y, z)$, $R_2(y, z)$ und nennen sie *quadratisch*. Durch die Differentialgleichung (6) ist die $R_1(y, z)$-Schar bestimmt, wenn

$$(7a)\qquad \beta\beta_{12} = -\alpha_{12} + \frac{\beta'_{12}}{2} - \frac{\beta_{11}\beta_{12}}{2}$$

gilt, ähnlich bestimmt die Gleichung (6) die $R_2(y, z)$-Schar, wenn für $\beta$

$$(7b)\qquad \beta\beta_{21} = \alpha_{21} - \frac{\beta'_{21}}{2} + \frac{\beta_{21}\beta_{22}}{2}$$

gilt.

Die quadratischen Charakteristiken der $R_1(y, z)$-Schar bezeichnen wir mit $k_1(y, z)$, ähnlich die quadratischen Charakteristiken der $R_2(y, z)$-Schar mit $k_2(y, z)$.

Durch eine passende Transformation des Parameters $u$ und durch eine passende Umnormung der Linien $y, z$ kann man erreichen, daß die parametrische $R$-Schar ($v' = 0$) folgende Eigenschaften hat: Sie enthält die Linien $y, z$ und ist gerade die $R$-Schar, die A. Terracini in der Arbeit [3] benützt.

Wir setzen voraus, daß die Gleichungen (1), (2) schon diese Form haben, es gilt dann:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = 1, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = 0. \tag{8}$$

Für die Kegelschnittsflächen $\Omega_1(y, z)$, $\Omega_2(y, z)$, die durch die Kurven $k_1(y, z)$, bzw. $k_2(y, z)$ gebildet werden (bei der Änderung des Parameters $u$), bekommen wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(9a)}\quad x_1 &= v[-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}] + [\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}], \\ x_2 &= v^2[-\alpha_{21} - \alpha_{12}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22}] - 2\alpha_{12}, \\ x_3 &= 4\alpha_{12}, \\ x_4 &= 4v\alpha_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(9b)}\quad x_1 &= v^2[2\alpha_{21}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}] + [\alpha_{12} + \alpha_{21}], \\ x_2 &= v^2[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}] + v[\alpha_{12} + 3\alpha_{21}], \\ x_3 &= -4v\alpha_{21}, \\ x_4 &= -4v^2\alpha_{21}. \end{aligned}$$

Längs der Kurve $k_1(y, z)$ berührt die Fläche $\Omega_1(y, z)$ eine Kegelfläche mit der Spitze $V_1(y, z)$

$$(-\alpha_{12} + \alpha_{21})y + (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22})z + 4\alpha_{12}z'. \tag{10a}$$

Ähnlich berührt längs der Kurve $k_2(y, z)$ die Fläche $\Omega_2(y, z)$ eine Kegelfläche mit der Spitze $V_2(y, z)$

$$(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22})y + (-\alpha_{12} + \alpha_{21})z - 4\alpha_{21}y'. \tag{10b}$$

Die Verbindungsgeraden $\overline{n}(y, z)$ der Punkte $V_1(y, z)$, $V_2(y, z)$, die immer demselben Wert des Parameters $u$ entsprechen, bilden eine Regelfläche.

Wir bezeichnen mit $R(n, y, z)$ eine Doppelverhältnisschar mit folgender Eigenschaft: Die zugehörigen Berührquadriken gehen durch die zugehörigen (d. h. für demselben Wert des Parameters $u$) Geraden $\overline{n}(y, z)$. Die Differentialgleichung der $R(\overline{n}, y, z)$-Schar lautet:

$$\begin{aligned} \text{(11)}\quad & 4\alpha_{12}\alpha_{21}v' + \alpha_{21}(-\alpha_{12} + \alpha_{21})v^2 + v[-\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - \\ & - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}) - \alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22})] + \\ & + \alpha_{12}(-\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0. \end{aligned}$$

Wir werden noch einige Ergebnisse der angeführten Gleichungen angeben.

Die Tangente der Linie $k_1(y, z)$ in ihrem Schnittpunkt mit der Geraden $p$ der Fläche $\Phi$ (er liegt auf der Kurve $z$) und die Tangente der Kurve $z$ in demselben Punkte fallen zusammen, wenn

$$\alpha_{21} + 3\alpha_{12} = 0$$

gilt. Ähnlich fallen die Tangente der Linie $k_2(y, z)$ in ihrem Schnittpunkt mit der Geraden $p$ der Fläche $\Phi$ (er liegt auf der Kurve $y$) und die Tangente der Kurve $y$ in demselben Punkt zusammen, wenn

$$\alpha_{12} + 3\alpha_{21} = 0$$

gilt.

Aus den Gleichungen (10) bekommen wir: Der Punkt $V_2(y, z)$ liegt auf der Tangente der Kurve $y$ nur in dem Falle, wenn

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{12}$$

gilt. Ähnlich liegt der Punkt $V_1(y, z)$ auf Tangente der Kurve $z$ nur in dem Falle, wenn dieselbe Relation gilt. Wenn die Relation (12) für alle Werte des Parameters $u$ gilt, dann bezeichnen wir das Kurvenpaar $y, z$ mit K.

b) Mit $A_3$ bezeichnen wir den Schnittpunkt der Kurve $k_1(y, z)$ mit der asymptotischen Tangente der Fläche $\Phi$ im zugehörigen (d. h. für denselben Wert des Parameters $u$) Punkte der Kurve $y$. Ähnlich bezeichnen wir mit $A_4$ den Schnittpunkt der Kurve $k_2(y, z)$ mit der asymptotischen Tangente der Fläche $\Phi$ im zugehörigen Punkte der Kurve $z$.

Weiter betrachten wir das Koordinatentetraeder mit den Ecken $A_1 = y$, $A_2 = z$, $A_3$, $A_4$. Aus den Gleichungen (9a) bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} A_3 &= \overline{\Theta}_{12} y - 2\alpha_{12} z + 4\alpha_{12} y', \\ A_4 &= 2\alpha_{21} y + \Theta_{21} z - 4\alpha_{21} z', \end{aligned} \tag{13}$$

$$y' = -\frac{1}{4\alpha_{12}} \Theta_{12} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{4\alpha_{12}} A_3,$$

$$z' = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{4\alpha_{21}} \Theta_{21} A_2 - \frac{1}{4\alpha_{21}} A_4,$$

wo $\Theta_{12} = \alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}$,
$\Theta_{21} = \alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}$.

Weiter bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}_{12} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22}, \\ \overline{\Theta}_{21} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}. \end{aligned}$$

Wenn wir mit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ die Koordinaten des Punktes $X$ im neuen Koordinatensysteme bezeichnen,

$$X = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \bar{x}_4 A_4,$$

dann gilt nach (9) für die Flächen $\Omega_1(y, z)$, $\Omega_2(y, z)$:

(14a)
$$\bar{x}_1 = v(-\alpha_{21} - \alpha_{12}),$$
$$\bar{x}_2 = v^2(-\alpha_{21} - \alpha_{12}) + v\left(\Theta_{12} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\Theta_{21}\right),$$
$$\bar{x}_3 = 1,$$
$$\bar{x}_4 = -v\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}};$$

(14b)
$$\bar{x}_1 = v\left(\bar{\Theta}_{21} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12}\right) + (\alpha_{12} + \alpha_{21}),$$
$$\bar{x}_2 = v(\alpha_{12} + \alpha_{21}),$$
$$\bar{x}_3 = -v\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},$$
$$\bar{x}_4 = v^2.$$

Für $u = konst.$ bestimmen die Gleichungen (14) die Kegelschnitte $k_1(y, z)$, bzw. $k_2(y, z)$.

Nach (13) und (10) bekommen wir für die Koordinaten der Punkte $V_1(y, z)$, $V_2(y, z)$:

(15a)
$$\bar{x}_1 = \alpha_{12} + \alpha_{21},\ \bar{x}_2 = \Theta_{12} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\Theta_{21},\ \bar{x}_3 = 0,\ \bar{x}_4 = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}},$$

bzw.

(15b)
$$\bar{x}_1 = \bar{\Theta}_{21} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12},\ \bar{x}_2 = -\alpha_{12} - \alpha_{21},\ \bar{x}_3 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},\ \bar{x}_4 = 0.$$

Die quadratischen Flächen $\Psi$, die zur $R_1(y, z)$-Schar gehören, bezeichnen wir mit $\Psi_1(y, z)$, ähnlich bezeichnen wir mit $\Psi_2(y, z)$ die Flächen $\Psi$, die zur $R_2(y, z)$-Schar gehören.

**Satz 1.** *Die Erzeugenden der beiden Scharen der Fläche $\Psi_2(y, z)$ im Punkte $A$ der Hüllfläche $\Omega_2(y, z)$, die Tangente des Kegelschnittes $k_2(y, z)$ der Fläche $\Omega_2(y, z)$ im Punkte $A$ und die Verbindungsgerade des Punktes $A$ mit der Spitze* *des Berührkegels der Fläche $\Omega_2(y, z)$ längs der durch $A$ gehende Kurve $k_2(y, z)$ haben die harmonische Lage.*

Der gleiche Satz gilt auch für die Fläche $\Omega_1(y, z)$.

Beweis: Längs der Kurve $k_2(y, z)$ (für $u = u_0$) berührt die Fläche $\Omega_2(y, z)$ die Kegelfläche mit der Spitze $V_2(y, z)$ und die Fläche $\Psi_2(y, z)$. Die Erzeugenden der beiden Scharen der Fläche $\Psi_2(y, z)$ im Punkte $A$ der Kurve $k_2(y, z)$ gehören zu den Asymptotenlinien der Fläche $\Psi_2(y, z)$. Die durch $A$ gehende Erzeugende der erwähnten Kegelfläche und die Tangente der Kurve $k_2(y, z)$ im Punkte $A$ sind nach dem Satze von Dupin die konjugierten Tangenten der Fläche $\Omega_2(y, z)$.

**Satz 2.** *Die Erzeugende $p$ der Fläche $\Phi$, die durch den Punkt $y(u_0)$ ($u_0 =$ konst) geht, die asymptotische Tangente der Fläche $\Phi$ in diesem Punkte, die Tangente der Kurve $k_2(y, z)$ im Punkte $y(u_0)$ und die Verbindungsgerade des Punktes $y(u_0)$ mit dem Punkte $V_2[y(u_0), z(u_0)]$ haben die harmonische Lage.*

Dieser Satz ist ein spezieller Fall des Satzes 1, wenn der Punkt $A$ der Fläche $\Omega_2(y, z)$ auf der Kurve $y$ liegt.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für den Fall, wenn der Punkt $A$ der Fläche $\Omega_1(y, z)$ auf der Kurve $z$ liegt.

c) Wenn sich der Parameter $u$ ändert, dann bilden die Geraden $(A_3, A_4)$ eine Regelfläche. Betrachten wir eine $R$-Schar auf der Fläche $\Phi$ mit der Eigenschaft, daß zu dieser $R$-Schar gehörende Flächen $\Psi$ für jeden Wert des Parameters $u$ die Verbindungsgerade der Punkte $A_3$, $A_4$ enthalten. Diese $R$-Schar bezeichnen wir mit $R(a, y, z)$. Man kann leicht die Differentialgleichung dieser $R$-Schar finden. Die Tangente der Kurve der $R(a, y, z)$-Schar ist durch die Punkte

$$y + vz = A_1 + vA_2, \quad y' + vz' + v'z$$

bestimmt; $v'$ ist eine quadratische Funktion des Parameters $v$. Die Koordinaten des zweiten von diesen Punkten sind nach (13)

$$\bar{x}_1 = -\frac{1}{4\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12} + \frac{v}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2} + \frac{v}{4\alpha_{21}}\Theta_{21} + v', \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{4\alpha_{21}}, \quad \bar{x}_4 = -\frac{v}{4\alpha_{21}}.$$

Wenn wir nun die Bedingung des Durchschnittes der Tangenten der Linien der $R(a, y, z)$-Schar (in den Plückerischen Koordinaten) mit der Geraden $(A_3, A_4)$ (immer für den gleichen Wert des Parameters $u$) aufschreiben, dann bekommen wir folgendes Ergebnis:

$$v' - \frac{1}{2}v^2 + \frac{v}{4}\left(\frac{1}{\alpha_{21}}\Theta_{21} + \frac{1}{\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12}\right) + \frac{1}{2} = 0. \tag{16}$$

Das ist die Differentialgleichung der $R(a, y, z)$-Schar.

Mit $t(a, y, z)$ bezeichnen wir das Linienpaar mit der Eigenschaft, daß in den Punkten des Linienpaares die Linien der $R(a, y, z)$-Schar die Linien der parametrischen Schar von Terracini (siehe (8)) berühren. Wenn

$$\frac{1}{\alpha_{21}} \Theta_{21} + \frac{1}{\alpha_{12}} \Theta_{12} = 0$$

gilt, dann trennen die Linien des Paares $t(a, y, z)$ die Kurven $y, z$ harmonisch.

**Satz 3.** *Wenn der Punkt $V_1(y, z)$ immer auf der zugehörigen (d. h. für den gleichen Wert des Parameters u) Geraden $(A_1, A_4)$ liegt, dann fällt die $R(a, y, z)$-Schar mit der $R_1(y, z)$-Schar zusammen.*

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die $R_2(y, z)$-Schar.

Beweis: Aus der Gleichung (15a) folgt, daß der Punkt $V_1(y, z)$ auf der Verbindungsgeraden der Punkte $A_1, A_4$ nur in dem Falle liegt, wenn

$$\frac{1}{\alpha_{12}} \Theta_{12} + \frac{1}{\alpha_{21}} \Theta_{21} = 0$$

gilt.

Wenn wir diese Relation in die Gleichung (16) einsetzen, dann bekommen wir

$$v' - \frac{1}{2} v^2 + v(-2\alpha_{12} + \beta_{22}) + \frac{1}{2} = 0,$$

das ist die Differentialgleichung der $R_1(y, z)$-Schar.

d) Die Tangenten der Linien der $R_1(y, z)$-Schar in allen Punkten der Fläche $\Phi$ bilden eine Geradenkongruenz $K_1(y, z)$, ähnlich bilden die Tangenten der Linien der $R_2(y, z)$-Schar in allen Punkten der Fläche $\Phi$ eine Geradenkongruenz $K_2(y, z)$. Die Linien der $R_1(y, z)$-Schar bilden eine Schar von Torsallinien der Kongruenz $K_1(y, z)$ auf der Fokalfläche $\Phi$, ähnlich bilden die Linien der $R_2(y, z)$-Schar eine Schar von Torsallinien der Kongruenz $K_2(y, z)$ auf der Fokalfläche $\Phi$. Betrachten wir den Fall, wo die Netze von Torsallinien der beiden Kongruenzen auf der gemeinsamen Fokalfläche zusammenfallen. Diese Bedingung ist nur in dem Falle erfüllt, wenn die Linien von $R_1(y, z)$ und $R_2(y, z)$-Scharen ein konjugiertes Netz bilden. (Das Doppelverhältnis der Erzeugenden der Fläche $\Phi$, der asymptotischen Tangente und der Tangente der beiden $R$-Scharen in jedem Punkte der Fläche $\Phi$ ist gleich $-1$.)

Bei der Anwendung der Gleichungen (5), (6), (7) ($\beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{11} + \beta_{22}$ ersetzen wir nach (8)) bekommen wir leicht, daß die angeführte Bedingung nur in dem Falle erfüllt ist, wenn $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ gilt.

Die Torsalsysteme der Kongruenzen $K_1(y, z), K_2(y, z)$ auf der Fläche $\Phi$ fallen dann und nur dann zusammen, wenn die Kurven $y, z$ ein Paar K (siehe a)) bilden.

**Satz 4.** *Zu der gegebenen Linie $c_1$, die keine Asymptotenkurve berührt und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche $\Phi$ geht, gehört eine einparametrische Schar $R$(K) der Linien auf der Fläche $\Phi$. Jede Linie der $R$(K)-Schar bildet mit der Linie $c_1$ ein Paar* K. *Die $R$(K)-Schar ist eine Doppelverhältnisschar.*

Beweis. Betrachten wir die Regelfläche $\Phi$, die keine Torse ist. Die Gleichung der Fläche $\Phi$ sei in der Form (1). Weiter werden wir voraussetzen, daß die parametrischen Linien in der Gleichung (1) Asymptotenlinien sind und die Umnormung so durchgeführt ist, daß

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{11} = \beta_{22} = 0 \tag{17}$$

gilt.

Weiter betrachten wir auf der Fläche $\Phi$ zwei verschiedene Linien $c_1, c_2$:

$$y + \lambda_1 z, \quad y + \lambda_2 z,$$

die keine der asymptotischen Kurven berühren und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche $\Phi$ gehen. Weiter setzen wir voraus, daß $c_1, c_2$ im Sinne von A. Terracini nicht konjugiert sind.

Betrachten wir alle $R$-Scharen, welche die Linien $c_1, c_2$ als Grundlinien haben. Die Differentialgleichung dieser Scharen bekommen wir in der Form

$$v' + (v - \lambda_1)(v - \lambda_2)\varrho = 0, \tag{18}$$

wo $\varrho$ eine beliebige Funktion des Parameters $u$ ist.

Setzen wir

$$\alpha = \lambda_1\lambda_2\varrho, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}\varrho(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \gamma = \varrho,$$

$$B = -\lambda_1\lambda_2\varrho + \varrho(\lambda_1 + \lambda_2)v - \varrho v^2, \quad \psi = 0 \text{ (nach (18), (17))}$$

in die Gleichung (4) ein. Nach einer längeren Berechnung bekommen wir die Gleichung aller Flächen $\Omega$, die zu allen R-Scharen mit $c_1, c_2$ als Grundkurven gehören.

$$\begin{aligned}
x_1 &= v^3\{-2\varrho^2\} + v^2\{-\alpha_{21} - \varrho' + 3\varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \\
&\quad + v\{\alpha_{22} - \alpha_{11} + [\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)]' - \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\varrho^2\} + \\
&\quad + \{\alpha_{12} - (\lambda_1\lambda_2\varrho)' + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\varrho^2\}, \\
x_2 &= v^3\{-\alpha_{21} - \varrho' - \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \\
&\quad + v^2\{\alpha_{22} - \alpha_{11} + [\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)]' + 2\varrho^2\lambda_1\lambda_2 + \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2\} + \\
&\quad + v\{\alpha_{12} - (\lambda_1\lambda_2\varrho)' - 3\varrho^2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \{2\lambda_1^2\lambda_2^2\varrho^2\}, \\
x_3 &= v^2\{-2\varrho\} + v\{2\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \{-2\lambda_1\lambda_2\varrho\}, \\
x_4 &= v^3\{-2\varrho\} + v^2\{2\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)\} + v\{-2\lambda_1\lambda_2\varrho\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Wenn wir in den Gleichungen (19) $u = konst.$ voraussetzen, dann sind durch diese Gleichungen die Kurven $k$ dritter Ordnung auf der Fläche $\Phi$ gegeben. Diese Kurven zerfallen in die Kurven niedrigerer Ordnung nur in dem Falle, wenn die Determinante aus den Koeffizienten bei $v^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, gleich Null ist.

Nach einer längeren Berechnung bekommen wir folgende Relation:

$$
\begin{aligned}
(20)\qquad & \varrho^2\{(\lambda_1 + \lambda_2)'[(\lambda_1\lambda_2)'(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)'\lambda_1\lambda_2] - [(\lambda_1\lambda_2)']^2\} + \\
& + \varrho(-\lambda_1 + \lambda_2)\{\alpha_{12}(\lambda_1' - \lambda_2') + (\alpha_{22} - \alpha_{11})(\lambda_1'\lambda_2 - \lambda_2'\lambda_1) - \alpha_{21}(\lambda_1'\lambda_2^2 - \lambda_2'\lambda_1^2)\} + \\
& + [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \alpha_{21}(\lambda_1 + \lambda_2)] \,.\, [-\alpha_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) - (\alpha_{22} - \alpha_{11})\lambda_1\lambda_2] - \\
& - [\alpha_{12} + \alpha_{21}\lambda_1\lambda_2]^2 = 0 .
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nur den Fall, daß die Kurve $k$ in einen Kegelschnitt und in eine Gerade zerfällt; den Fall, daß die Kurven $c_1$, $c_2$ im Sinne von Terracini konjugiert sind, haben wir aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen (siehe [4]).

Wenn $\varrho$ in der Gleichung (18) die Relation (20) erfüllt, dann ist die Schar (18) quadratisch. Wenn wir aus der Gleichung (20) die Größe $\varrho$ berechnen und in die Gleichung (18) einsetzen, dann bekommen wir die Differentialgleichungen von zwei quadratischen Systemen; $c_1$ und $c_2$ sind die Grundkurven dieser Systeme. Wenn der Koeffizient bei $\varrho^1$ in der Gleichung (20) gleich Null ist, dann haben die Tangenten der beiden quadratischen Systeme, die Erzeugende und die Tangente der asymptotischen Linie ($v =$ *konst*) die harmonische Lage in jedem Punkte der Fläche $\Phi$. Diese Bedingung lautet dann nach (20):

$$\lambda_1'[\alpha_{12} + \lambda_2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda_2^2\alpha_{21}] = \lambda_2'[\alpha_{12} + \lambda_1(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda_1^2\alpha_{21}].$$

Wenn die Linie $c_1$ fest ist (d. h. $\lambda_1 = f(u)$, $f$ ist eine gegebene Funktion des Parameters $u$) und $\lambda_2 = v(u)$ ($v$ ist eine beliebiege Funktion des Parameters $u$) dann bekommen wir für alle $c_2$, die mit $c_1$ ein K-Paar bilden, eine Differentialgleichung von Riccati.

**Satz 5.** *Wenn die Kurven $y, z$ ein* K-*Paar bilden, dann gehören alle Linien auf der Fläche $\Phi$, die mit der Kurve $z$ ein* K-*Paar bilden, zu einer $R$-Schar; diese $R$-Schar ist $R(\bar{n}, y, z)$-Schar.*

Beweis: Betrachten wir die Regelfläche $\Phi$, die keine Torse ist, ihre Gleichung sei in der Form (1), die parametrische $R$-Schar sei eine $R$-Schar von Terracini mit den Leitlinien $y, z$. Weiter soll $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ gelten.

Auf der Fläche $\Phi$ betrachten wir zwei Linien

$$(21)\qquad \bar{y} = y + \lambda z, \quad z = \bar{z}, \quad \lambda = \lambda(u).$$

Setzen wir voraus, daß diese Linien keine Asymptotenkurve berühren und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche $\Phi$ gehen. Die Linien (21) seien nicht im Sinne von Terracini konjugiert.

Die Gleichung der Fläche $\Phi$ transformieren wir weiter in die Form

$$(22)\qquad \bar{x} = y + v\bar{z} .$$

Die Differentialgleichungen der Leitlinien $\bar{y}, \bar{z}$ sind dann:

$$\bar{y}'' = \bar{\alpha}_{11}\bar{y} + \bar{\alpha}_{12}\bar{z} + \bar{\beta}_{11}\bar{y}' + \bar{\beta}_{12}\bar{z}', \tag{23}$$

$$\bar{z}'' = \bar{\alpha}_{21}\bar{y} + \bar{\alpha}_{22}\bar{z} + \bar{\beta}_{21}\bar{y}' + \bar{\beta}_{22}\bar{z}'.$$

Aus den Gleichungen (21) bekommen wir dann

$$\bar{y}' = y' + \lambda' z + \lambda' z', \quad \bar{y}'' = y'' + 2\lambda' z' + \lambda z'' + \lambda'' z, \quad \bar{z}' = z', \quad \bar{z}'' = z''. \tag{21a}$$

Wenn wir für $\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}', \bar{y}'', \bar{z}''$ nach (21), (21a), (2) in die Gleichung (23) einsetzen, bekommen wir leicht folgende Relationen:

$$\begin{array}{ll} \bar{\alpha}_{11} = \alpha_{11} + \lambda\alpha_{21}, & \bar{\alpha}_{12} = \lambda'' - \lambda\lambda' + \lambda'\beta_{22} - \lambda^2\alpha_{21} + \lambda(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}, \\ \bar{\alpha}_{21} = \alpha_{21}, & \bar{\alpha}_{22} = \alpha_{22} - \lambda\alpha_{21} - \lambda', \\ \bar{\beta}_{11} = -\beta_{22} + \lambda, & \bar{\beta}_{12} = 2\lambda' - \lambda^2 + 1 + 2\lambda\beta_{22}, \\ \bar{\beta}_{21} = 1, & \bar{\beta}_{22} = \beta_{22} - \lambda. \end{array} \tag{24}$$

Nach den Gleichungen (6), (7) bekommen wir die Gleichungen der quadratischen Scharen, die die Kurven $\bar{y}, \bar{z}$ als Grundkurven haben.

$$\bar{v}' + \frac{\bar{\beta}_{12}}{2} + 2\bar{v}\frac{1}{\bar{\beta}_{12}}\left(-\bar{\alpha}_{12} + \frac{\bar{\beta}'_{12}}{2} - \frac{\bar{\beta}_{11}\bar{\beta}_{12}}{2}\right) - \bar{v}^2\frac{\bar{\beta}_{21}}{2} = 0, \tag{25}$$

$$\bar{v}' + \frac{\bar{\beta}_{12}}{2} + 2\bar{v}\frac{1}{\bar{\beta}_{21}}\left(\bar{\alpha}_{21} - \frac{\bar{\beta}'_{21}}{2} + \frac{\bar{\beta}_{21}\bar{\beta}_{22}}{2}\right) - \bar{v}^2\frac{\bar{\beta}_{21}}{2} = 0.$$

Aus den Gleichungen (25) und (5) (da muß man zur $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$, $i, k = 1, 2$, den Streifen zufügen), finden wir leicht die Bedingung, daß die Tangenten beider quadratischen $R$-Scharen, die Erzeugende, die Tangente der Asymptotenlinie in jedem Punkte der Fläche $\Phi$ eine harmonische Lage haben:

$$\bar{\beta}_{21}(-2\bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}'_{12}) + \bar{\beta}_{12}(2\bar{\alpha}_{21} - \bar{\beta}'_{21}) = 0. \tag{26}$$

Durch Einsetzen $\bar{\alpha}_{ik}, \bar{\beta}_{ik}$, $i, k = 1, 2$, aus den Gleichungen (24) in die Gleichungen (26) bekommen wir leicht (unter Voraussetzung $\alpha_{12} = \alpha_{21}$):

$$2\alpha_{12}\lambda' + \lambda\{-(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \beta'_{22} + 2\alpha_{12}\beta_{22}\} = 0. \tag{27}$$

Wenn nun die Kurven $y + v(u)z, v(u) = \lambda$, mit der Kurve $z$ K-Paare bilden, dann muß $\lambda$ der Differentialgleichung (27) entsprechen. Durch den Vergleich der Gleichung (27) mit der Gleichung (11) für $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ beweissen wir leicht die Behauptung des Satzes 5.

## LITERATUR


[1] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Math. Z. *62* (1955), 50—93.
[2] Mayer O., *Études sur les surfaces réglées*, Bull. fac. de științe din Cernăuti *2* (1926), 1—33.
[3] Terracini A., *Diretrici congiunte di una rigata*, Rend. Semin. mat. Univ. è Politechn. Torino *9* (1949/50), 325—342.
[4] Vala J., *Spezielle Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 126—142.



Eingegangen am 27. 5. 1965.



*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty Vysokého učení technického, Brno*