Pavol Brunovský

O Emdenovej-Fowlerovej rovnici v prípade $n < 1$

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 12 (1962), No. 1, 60--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126587

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 1, 1962

O EMDENOVEJ–FOWLEROVEJ ROVNICI V PRÍPADE $n < 1$

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

Budeme vyšetrovať asymptotické vlastnosti kladných riešení diferenciálnych rovníc

$$\frac{d^2u}{dt^2} - t^\sigma u^n = 0 \tag{1}$$

a

$$\frac{d^2u}{dt^2} + t^\sigma u^n = 0, \tag{2}$$

kde n je „nepárne" racionálne číslo (t. j. $n = \mu/\nu$, kde μ aj ν sú nepárne čísla), spĺňajúce nerovnosť $0 < n < 1$.

Prípad $n > 1$ je vyšetrovaný vo viacerých prácach a knihách, napr. [1].

Na rovnice typu (1) a (2) sa dajú transformovať rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(t^\varrho \frac{du}{dt}\right) \pm t^\sigma u^n = 0$$

v prípade $\varrho \neq 1$. Rovnice tohto typu sa nazývajú Emden–Fowlerovými rovnicami (pozri [1]).

Ukazuje sa, že v prípade $0 < n < 1$ dostávame obdobné asymptotické vyjadrenia, ale pre iné σ, ako v prípade $n > 1$.

Uvedieme niektoré pomocné vety a označenia, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Lemma 1. *Ak $f(t)$ je nezáporná funkcia, $f'(t)$ spojitá a nezáporná pre $t \geqq t_0$, potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí $f'(t) \leqq f^{1+\varepsilon}(t)$ pri všetkých hodnotách $t \geqq t_0$ s výnimkou najviac množiny intervalov konečnej dĺžky, závisiacej od ε.* (Pozri [1] str. 116.)

Lemma 2. (Hardyho veta.) *Každé riešenie rovnice*

$$\frac{du}{dt} = \frac{Q_1(u, t)}{Q_2(u, t)}, \tag{3}$$

kde Q_1, Q_2 sú polynomy v u a t, spojité pre $t \geqq t_0$ sa stane spolu so všetkými svojimi deriváciami monotónnym pre dosť veľké t a vyhovuje jednému zo vzťahov

$$u \sim ct^d e^{P(t)}, \qquad u \sim ct^d (\ln t)^{1/m},$$

kde $P(t)$ je polynom vzhľadom na t a m je celé číslo. (Pozri [1], str. 121.)

Lemma 3. *Nech $f(t)$ je pre dosť veľké t diferencovateľná funkcia. Ak* $\int^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ *a $f'(t)$ je ohraničená, potom platí*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

(pozri [1], str. 185).

Lemma 4. *Nech $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sú spojité funkcie pre $t \geqq t_0$ a nech funkcia $g(t)$ má pre $t \geqq t_0$ spojitú deriváciu. Ak pre $t \geqq t_0$ platí nerovnosť*

$$f(t) \leqq g(t) + \int_{t_0}^{t} h(s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

potom pre $t \geqq t_0$ platí nerovnosť

$$f(t) \leqq g(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\Big) + \int_{t_0}^{t} g'(\tau)\Big[\exp\Big(\int_{\tau}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big]\,\mathrm{d}\tau.$$

Toto tvrdenie vyplýva z tvrdenia na str. 47 v [2] integrovaním po častiach.

Ak pre nejaké dve funkcie platí

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0,$$

budeme, ako je obvyklé, písať

$$f(t) = o\big(g(t)\big).$$

Vzťahom $f(t) = O\big(g(t)\big)$ budeme rozumieť, že funkcia $f(t)/g(t)$ je pre dosť veľké t ohraničená.

Lemma 5. *Nech $f(t) \geqq 0$ pre dosť veľké t. Ak je* $\int^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \infty$, *potom platí*

$$\int_{t_1}^{t} f(\tau)[1 + o(1)]\,\mathrm{d}\tau = [1 + o(1)] \int_{t_1}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ak je $\int^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, *potom platí*

$$\int_{t_1}^{\infty} f(t)[1 + o(1)]\,\mathrm{d}t = [1 + o(1)] \int_{t_1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz týchto tvrdení je zrejmý.

Ak budeme v ďalšom písať nejakú rovnosť

$$f(t) = F\big(t, o(g(t))\big),$$

budeme tým rozumieť, že platí pre dosť veľké t.

Lemma 6. *Nech $f(t) \geqq 0$ pre dosť veľké t, k je ľubovoľné reálne číslo. Vzťah*

$$f(t) = t^{k + o(1)}$$

platí vtedy a len vtedy, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$f(t) = o(t^{k+\varepsilon}),$$
$$t^{k-\varepsilon} = o\big(f(t)\big).$$

Dôkaz. Vetu zrejme stačí dokázať pre $k = 0$.

a) Nech $f(t) = t^{o(1)}$. Potom existuje funkcia $\eta(t)$ taká, že $f(t) = t^{\eta(t)}$ a $\eta(t) \to 0$ pre $t \to \infty$, takže pre dosť veľké t bude platiť

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \eta(t) < \frac{\varepsilon}{2},$$

z čoho vyplýva

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\varepsilon}} \leqq \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\varepsilon/2}}{t^{\varepsilon}} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{-\varepsilon}} \geqq \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\varepsilon/2}}{t^{-\varepsilon}} = \infty.$$

b) Označme

$$\eta(t) = \log_t f(t) = \frac{\ln f(t)}{\ln t}.$$

Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\varepsilon} f(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\varepsilon} f(t) = \infty,$$

a teda pre dosť veľké t platí

$$t^{-\varepsilon} f(t) < 1, \qquad \ln f(t) - \varepsilon \ln t < 0,$$

$$t^{\varepsilon} f(t) > 1, \qquad \ln f(t) + \varepsilon \ln t > 0,$$

z čoho vyplýva

$$-\varepsilon < \frac{\ln f(t)}{\ln t} < \varepsilon,$$

a teda

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln f(t)}{\ln t} = 0.$$

Lemma 7. *Ak $k > -1$, potom*

$$\int_{t_0}^{t} \tau^{k+o(1)}\,\mathrm{d}\tau = t^{k+1+o(1)}.$$

Ak $k < -1$, potom

$$\int_{t}^{\infty} \tau^{k+o(1)}\,\mathrm{d}\tau = t^{k+1+o(1)}.$$

Dôkaz. Ak je $k > -1$, môžeme písať $k = -1 + \eta$, $\eta > 0$, $t^{k+o(1)} > t^{-1+\frac{\eta}{2}}$ a teda

$$\int^{\infty} \tau^{k+o(1)}\,\mathrm{d}\tau = \infty.$$

Použitím ľHospitalovho pravidla a lemmy 6 dostaneme hľadaný vzťah.

Ak je $k < -1$, je

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \tau^{k+o(1)}\,d\tau = 0$$

a hľadaný vzťah môžeme opäť dostať použitím l'Hospitalovho pravidla a lemmy 6.

Lemma 8. *Nech $f(t) > 0$ pre dosť veľké t.*

1. *Nech existuje aspoň jedno k_1 také, že $f(t) = o(t^{k_1})$.*
2. *Nech existuje aspoň jedno k_2 také, že $t^{k_2} = o(f(t))$.*
3. *Nech neexistuje ani jedno k také, že*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-k}f(t) = \infty,$$

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-k}f(t) = 0.$$

Potom existuje číslo κ také, že platí

$$f(t) = t^{\kappa+o(1)}.$$

Dôkaz. Označme K_1 množinu tých k, pre ktoré platí $f(t) = o(t^k)$, K_2 množinu tých k, pre ktoré platí $t^k = o(f(t))$. Podľa predpokladov 1,2 sú K_1, K_2 neprázdne a zrejme aj disjunktné množiny.

Z $k_1 \in K_1$, $k \geqq k_1$ vyplýva $k \in K_1$.
Z $k_2 \in K_2$, $k \leqq k_2$ vyplýva $k \in K_2$.
Z $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ vyplýva $k_1 > k_2$.

Ukážeme, že existuje najviac jedno číslo k, nepatriace do žiadnej z množín K_1, K_2. Nech $\bar{k} \,\bar{\in}\, K_1$, $\bar{k} \,\bar{\in}\, K_2$. Sú 3 možnosti:

a)
$$0 < \limsup_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) < \infty,$$
$$0 < \liminf_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) < \infty,$$

b)
$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) = \infty,$$
$$0 < \liminf_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) < \infty,$$

c)
$$0 < \limsup_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) < \infty,$$
$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\bar{k}}f(t) = 0.$$

V prípade a) spĺňa funkcia $t^{-\bar{k}}f(t)$ pre dosť veľké t nerovnosť $0 < a \leqq f(t) \leqq b < \infty$, z čoho vyplýva

$$\lim_{t\to\infty} t^{-k}f(t) = \lim_{t\to\infty} t^{-k+\bar{k}}(t^{-\bar{k}}f(t)) = \begin{cases} 0 & \text{ak} \quad k > \bar{k} \\ \infty & \text{ak} \quad k < \bar{k} \end{cases},$$

to znamená, že ak $k > \bar{k}$, je $k \in K_1$, ak $k < \bar{k}$, je $k \in K_2$.

V prípade b) dostaneme pre $k < \bar{k}$, obdobne ako v prípade a) $t^k = o(f(t))$, čo znamená $k \in K_2$. Ak $k > \bar{k}$, potom $k \in K_1$. Keby to nebolo pravda, existovalo by číslo $k' > \bar{k}$, pre ktoré by neplatilo $f(t) = o(t^{k'})$. Vzhľadom na predpoklad 3 by z toho vyplývalo $0 < \limsup_{t\to\infty} t^{-k'}f(t) < \infty$. To však znamená, že pre $\bar{k} < k < k'$ by platilo

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-k}f(t) = \infty,$$
$$\liminf_{t\to\infty} t^{-k}f(t) = 0,$$

čo je v spore s predpokladom 3.

Prípad c) sa vyšetrí obdobne ako prípad b).

Z uvedených vlastností množín K_1, K_2 vyplýva, že platí

$$\inf K_1 = \sup K_2.$$

Ak položíme $\kappa = \inf K_1 = \sup K_2$, ľahko zistíme, že κ má požadované vlastnosti.

Ak platí $\sigma + 2 < 0$ alebo $\sigma + n + 1 > 0$, má rovnica (1) partikulárne riešenie

$$u(t) = \gamma_1 t^{\omega}, \tag{4}$$

kde

$$\omega = \frac{\sigma + 2}{1 - n}, \qquad \gamma_1 = \left[\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{5}$$

Ak platí $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$, má rovnica (2) partikulárne riešenie

$$u(t) = \gamma_2 t^{\omega}, \tag{6}$$

kde

$$\omega = \frac{\sigma + 2}{1 - n}, \qquad \gamma_2 = \left[-\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{7}$$

V takýchto prípadoch môžeme substitúciami

$$u = \gamma_1 t^{\omega} v, \qquad t = e^s \tag{8}$$

z rovnice (1), resp.

$$u = \gamma_2 t^{\omega} v, \qquad t = \mathrm{e}^s \tag{9}$$

z rovnice (2) dostať rovnicu pre v:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2} + (2\omega - 1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + \omega(\omega - 1)(v - v^n) = 0. \tag{10}$$

Lemma 9. *Pre kladné regulárne, pre dosť veľké s monotónne riešenia rovnice* (10) *platí jeden zo vzťahov:*

1. $\lim_{s\to\infty} v(s) = 1$.
2. $v = \exp\left[-\omega s(1 + o(1))\right]$, ak $\omega < 0$.
3. $v = \exp\left[(-\omega + 1)\, s(1 + o(1))\right]$, ak $\omega - 1 < 0$.

(Regulárnym budeme nazývať také riešenie, ktoré existuje pre dosť veľké t a má pre dosť veľké t spojité prvé dve derivácie.)

Dôkaz. Keďže v je od istého s monotónne, sú 4 možnosti:

$$\text{a) } v \to c, \quad c - c^n \neq 0; \qquad \text{b) } v \to 1; \qquad \text{c) } v \to \infty; \qquad \text{d) } v \to 0.$$

V prípade a) platí

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + (2\omega - 1)\frac{dv}{ds} = c_1(1 + o(1)), \qquad c_1 = -\omega(\omega - 1)(c - c^n) \neq 0,$$

z čoho integrovaním dostaneme

$$\frac{dv}{ds} + (2\omega - 1)\, v = c_1 s(1 + o(1)).$$

Keďže $v \to c$, je v ohraničené; z toho vyplýva:

$$\frac{dv}{ds} = c_1 s(1 + o(1)),$$

$$v = \frac{c_1}{2} s^2(1 + o(1)),$$

teda v by muselo byť neohraničené, čo je v spore s predpokladom.

V prípade b) dostávame vzťah 1.

V prípade c) urobíme substitúciu $dv/ds = p$ a dostávame rovnicu:

$$p\frac{dp}{dv} + ap + b(v - v^n) = 0, \tag{11}$$

kde $a = 2\omega - 1$, $b = \omega(\omega - 1)$

Nech $n = \mu/\nu$, kde μ, ν sú prirodzené čísla. Substitúciou $v = v_1^\nu$ dostaneme rovnicu typu (3), z čoho vyplýva, že p vyhovuje jednému zo vzťahov

$$p \sim c v_1^d \exp\left(P(v_1)\right),$$

$$p \sim c v_1^d (\ln v_1)^{1/m},$$

čo znamená

$$p \sim \alpha_1 v^k \exp P(\sqrt[\nu]{v}), \tag{12}$$

$$p \sim \alpha_2 v^k (\ln v)^{1/m}. \tag{13}$$

Z $P \to -\infty$ podľa lemmy 2 vyplýva $p \to 0$, $dp/dv \to 0$. Keďže však $v \to \infty$, nemôže byť splnená rovnica (11).

Pri $P \to \infty$ dostávame spor s lemmou 1. P môže byť teda iba konštanta. p teda musí vyhovovať vzťahu

$$p \sim \alpha v^k (\ln v)^r, \tag{14}$$

kde buď $r = 0$, alebo $r = 1/m$.

Z lemmy 1 vyplýva $k \leqq 1$. Pre $k < 1$ dostávame dosadením do rovnice (11):

$$\frac{dp}{dv} \sim \frac{b}{\alpha} v^{1-k} (\ln v)^{-r}, \tag{15}$$

z čoho vyplýva $dp/dv \to \infty$, čo pri $k < 1$ nie je možné. Ostáva teda $k = 1$. Z (15) dostávame pre $r > 0$

$$\frac{dp}{dv} = -c[1 + o(1)]; \qquad p = -cv[1 + o(1)],$$

čo je v spore so (14). Pre $r < 0$ dostávame z (15),

$$\frac{dp}{dv} \sim -\frac{b}{\alpha} (\ln v)^{-r}$$

čo je v spore so (14), podľa ktorého by dp/dv malo byť ohraničené. Ostáva teda

$$p \sim \alpha v. \tag{16}$$

Dosadením (16) do (11) dostávame pre α rovnicu

$$\alpha^2 + (2\omega - 1)\alpha + \omega(\omega - 1) = 0,$$

z ktorej vyplýva

$$\text{alebo } \alpha = -\omega, \text{ alebo } \alpha = -\omega + 1. \tag{17}$$

Zo (16) ďalej vyplýva

$$\frac{dv}{ds} \sim \alpha v,$$

$$v = \exp[\alpha s(1 + o(1))].$$

Ak má byť $v \to \infty$, musí byť $\alpha > 0$. Ak $\omega < 0$, dostávame vyjadrenie 2. alebo 3. Ak $\omega - 1 < 0$, dostávame vyjadrenie 3.

V prípade d) urobíme substitúciu $x = 1/v$, $y = dx/ds$ a dostaneme rovnicu

$$y \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y^2 + ay - b(x - x^{2-n}) = 0 \tag{18}$$

[a, b ako v rovnici (11)]. Z lemmy 2 opäť vyplýva, že x, y spĺňajú jeden zo vzťahov

$$y \sim \alpha_1 x^k \exp P(\sqrt[v]{x}),$$

$$y \sim \alpha_2 x^k (\ln x)^{1/m}.$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme $P =$ konšt, $k \leqq 1$, a teda musí byť splnený vzťah

$$y \sim \alpha x^k (\ln x)^r, \; k \leqq 1. \tag{19}$$

Dosadením (19) do (18) dostaneme

$$\frac{dy}{dx} \sim -\frac{b}{\alpha} x^{2-n-k} (\ln x)^{-r} \sim \pm x^{2-n-k+o(1)},$$

a teda

$$y \sim \pm x^{3-n-k+o(1)}.$$

Z (19) súčasne vyplýva

$$y \sim \pm x^{k+o(1)}.$$

Tieto dve vyjadrenia sú v spore, pretože pre $k \leqq 1$ nemôže platiť

$$3 - n - k = k.$$

Dôsledok. *Z vyjadrení* 1, 2, 3 *pre riešenia rovnice* (10) *dostávame pri* $\sigma + 2 < 0$ *alebo* $\sigma + n + 1 > 0$ *pre riešenia rovnice* (1) *vyjadrenia*

$$u \sim \gamma_1 t^{\omega}, \qquad u = t^{o(1)}, \qquad u = t^{1+o(1)}.$$

Pri $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$ *dostávame pre rovnicu* (2) *vyjadrenia*

$$u = \gamma_2 t^{\omega}, \qquad u = t^{o(1)}, \qquad u = t^{1+o(1)}.$$

Teraz pristúpime k vyšetrovaniu riešení rovnice (1).

Veta 1. *Všetky kladné riešenia rovníc* (1) *a* (2) *sú regulárne.*

Dôkaz. Kladné riešenia rovníc (1) musia byť pre dosť veľké t monotónne, pretože ako extrémy môžu mať iba minimá. Podobne kladné riešenia rovnice (2) musia byť pre dosť veľké t monotónne, pretože ako extrémy môžu mať iba maximá. Neregulárnosť by mohla nastať teda iba tak, že by pre nejaké $T < \infty$ platilo $\lim_{t \to T-} u(t) = \infty$. Ukážeme, že to nie je možné. Ak $u(t)$ je ohraničené, potom je tvrdenie zrejmé. Ak $u(t)$ nie je ohraničené, potom je pre dosť veľké t rastúce a teda existuje také t_0, že pre $t \geqq t_0$ je $u(t) \geqq 1$, $u'(t) \geqq 0$. Pre $t \geqq t_0$ platí

$$u(t) = u(t_0) + u'(t_0)(t - t_0) \pm \int_{t_0}^{t} (t - \tau)\, \tau^{\sigma} u^{n}(\tau)\, d\tau$$

$$u(t) \leqq u(t_0) + u'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (t - \tau)\, \tau^{\sigma} u(\tau)\, d\tau$$

z čoho podľa lemmy 4 vyplýva

$$u(t) \leqq u(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} (t - s)\, s^{\sigma}\, ds\right] + u'(t_0) \int_{t_0}^{t} \exp\left[\int_{t_0}^{t} (t - s)\, s^{\sigma}\, ds\right] d\tau.$$

Keďže pravá strana nerovnosti je definovaná a spojitá pre každé $t \geq t_0$, nie je možné, aby platilo

$$\lim_{t \to T-} u(t) = \infty.$$

Veta 2. *Ak $\sigma + 2 < 0$, potom každé kladné riešenie rovnice* (1) *vyhovuje jednému zo vzťahov*

1. $u = \gamma_1 t^{\omega}$;
2. $u \sim ct$;
3. $u = c + \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}[1 + o(1)]$,

kde ω, γ_1 sú dané výrazmi (5) *a $c > 0$.*

Dôkaz. Keďže $\sigma + 2 < 0$, môžeme použiť substitúciu (8) a dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - a\frac{dv}{ds} + b(v - v^n) = 0, \tag{20}$$

kde $a = -2\omega + 1 > 0$, $b = \omega(\omega - 1) > 0$.

Ak má byť u kladné, musí byť aj v kladné. Ukážeme, že v bude pre dosť veľké s monotónne.

Predpokladajme opak. Potom by v muselo mať nekonečne veľa miním aj maxím. Minimá však môže mať iba pri $0 \leqq v \leqq 1$, maximá pri $v \geqq 1$. To znamená, že riešenie musí nekonečne veľa ráz pretať priamku $v = 1$. Označme s_k body, v ktorých $v(s_k) = 1$. Vynásobíme rovnicu (20) v', integrujeme od s_k do s_{k+1} a dostaneme:

$$\left[\frac{v'^2}{2}\right]_{s_k}^{s_{k+1}} - a\int_{s_k}^{s_{k+1}} v'^2\,ds = 0,$$

z čoho vyplýva

$$[v'^2(s_{k+1}) - v'^2(s_k)] - 2a\int_{s_k}^{s_{k+1}} v'^2\,ds = 0, \tag{21}$$

$$v'^2(s_k) - v'^2(s_1) = \sum_{i=1}^{k}\left(v'^2(s_i) - v'^2(s_{i-1})\right) = 2a\int_{s_1}^{s_k} v'^2(s)\,ds. \tag{22}$$

Ukážeme, že $\int^{\infty} v'^2\,ds = \infty$, z čoho vyplýva $v'^2(s_k) \to \infty$. Predpokladajme opak, t. j. $\int^{\infty} v'^2(s)\,ds < \infty$. Vynásobíme opäť rovnicu (20) v', integrujeme od 0 po $\bar{s}$ a dostaneme

$$\frac{v'^2}{2} - a\int_0^{\bar{s}} v'^2\,ds + b\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1}\right) = c. \tag{23}$$

Nech $\bar{s}$ je bod, v ktorom v nadobúda maximum. Pre $\bar{s}$ nadobúda maximum aj výraz $b\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1}\right)$. Platí

$$b\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1}\right) = c + a \int_0^{\bar{s}} v'^2 \, ds.$$

Keďže $\int_0^{\bar{s}} v'^2 \, ds$ je ohraničenou funkciou $\bar{s}$, vyplýva z tohto vzťahu, že maximá funkcie $b\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^{n+1}}{n+1}\right)$ sú ohraničené. Z rovnice (23) vyplýva, že aj v musí byť ohraničené a z rovnice (20), že v'' je ohraničené. Podľa lemmy 3 z toho vyplýva $v'(s) \to 0$, čo je v spore s rovnicou (21), z ktorej vyplýva, že $\{v'^2(s_k)\}$ je rastúca postupnosť.

Keďže $\int^{\infty} v'^2(s) \, ds = \infty$, z rovnosti (22) vyplýva, $|v'(s_k)| \to \infty$. Existuje teda také k, že $v'(s_k) < (b/a) \min\limits_{0 \leq v \leq 1} (v - v^n) < 0$. Z rovnice (20) ale vyplýva $v''(s_k) < 0$, čo znamená, že v' je klesajúca, takže pre nejaké $\bar{s} > s_k$ bude platiť $v''(\bar{s}) = 0$ a $v''(s) < 0$ pre $s_k \leq s < \bar{s}$. Pre najbližšie $\bar{s}$, pre ktoré $v(\bar{s}) = 0$, musí platiť

$$v'(\bar{s}) < v'(s_k) < \frac{b}{a} \min_{0 \leq v \leq 1} (v - v^n),$$

pretože $v'(s)$ je pre $s_k \leq s < \bar{s}$ klesajúce. Ak do tejto rovnice dosadíme z rovnice (20) za $v'(\bar{s})$, dostaneme

$$v(\bar{s}) - v^n(\bar{s}) < \min_{0 \leq v \leq 1} (v - v^n),$$

čo je možné iba tak, že $v(\bar{s}) < -1$ a teda riešenie $v(s)$ nemôže ostať kladné. Tým je dokázané, že $v(s)$ musí byť pre dosť veľké s monotónne.

Ďalej ukážeme, že okrem riešenia $v = 1$ (v tomto prípade dostávame prípad 1) pre nijaké iné riešenie nemôže platiť

$$\lim_{s \to \infty} v(s) = 1.$$

Urobíme substitúciu $v = 1 + v_1$ a dostaneme rovnicu

$$v_1'' - av_1' + b(1 - n) v_1 + O(v_1^2) = 0.$$

Oba korene charakteristickej rovnice tejto diferenciálnej rovnice majú reálne časti kladné, z čoho vyplýva, že triviálne riešenie tejto rovnice (odpovedajúce riešeniu $v = 1$ rovnice (20)) je „úplne nestabilné" a teda nijaké iné riešenie nemôže k nemu konvergovať (pozri [1], str. 186).

Z dôsledku lemmy 9 vyplýva, že ostávajú ešte možnosti

$$u = t^{1 + o(1)}, \tag{24}$$

$$u = t^{o(1)}. \tag{25}$$

Dosadením vyjadrenia (24) do rovnice (1) dostaneme

$$u'' = t^{\sigma+n+o(1)};$$
$$u' = c + t^{\sigma+n+1+o(1)};$$
$$u = c_1 + ct + t^{\sigma+n+2+o(1)}.$$

Keďže $\sigma + n + 2 < 1$, $u = t^{1+o(1)}$, je to možné len tak, že $c \neq 0$; potom je

$$u = ct[1 + c^{-1}c_1t^{-1} + t^{\sigma+n+1+o(1)}] = ct[1 + o(1)],$$

čím dostávame prípad 2.

Dosadením vyjadrenia (25) do rovnice (1) dostaneme

$$u'' = t^{\sigma+o(1)};$$
$$u = c_1 + t^{\sigma+1+o(1)};$$
$$u = c + c_1t + t^{\sigma+2+o(1)}.$$

To je možné iba tak, že $c_1 = 0$; potom je

$$u = c[1 + c^{-1}t^{\sigma+2+o(1)}] = c[1 + o(1)].$$

Opätovným dosadením tohto výsledku do rovnice (1) dostaneme spresnené vyjadrenie – prípad 3.

Veta 3. *Ak $\sigma + n + 1 > 0$, potom každé kladné riešenie rovnice* (1) *vyhovuje vzťahu*

$$u \sim \gamma_1 t^{\omega},$$

kde ω, γ_1 sú dané výrazmi (5).

Dôkaz. Použitím substitúcie (8) dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2v}{ds^2} + a\frac{dv}{ds} + b(v - v^n) = 0. \tag{26}$$

kde $a = 2\omega - 1 > 0$, $b = \omega(\omega - 1) > 0$.

Ukážeme, že pre každé kladné riešenie $v(s)$ platí

$$\lim_{s\to\infty} v(s) = 1,$$

z čoho vyplýva tvrdenie vety.

Ak $v(s)$ je pre dosť veľké s monotónne, potom z lemmy 9 vyplýva $\lim_{s\to\infty} v(s) = 1$ (prípady 2, 3 lemmy 9 nemôžu nastať, pretože $\omega - 1 > 0$). Ak $v(s)$ nie je monotónne, musí oscilovať okolo priamky $v = 1$, pretože minimá môže mať iba pre $0 \leqq v \leqq 1$, maximá iba pre $v \geqq 1$. Označme s_k priesečníky riešenia $v(s)$ s priamkou $v = 1$. Obdobným postupom ako v dôkaze vety 2 dostaneme

$$\left[\frac{v'^2}{2}\right]_{s_k}^{s_{k+1}} + a\int_{s_k}^{s_{k+1}} v'^2\,ds = 0,$$

z čoho vyplýva

$$v'^2(s_{k+1}) - v'^2(s_k) = -2a \int_{s_k}^{s_{k+1}} v'^2 \, ds,$$

čo znamená, že postupnosť $\{v'^2(s_k)\}$ je klesajúca a teda musí mať konečnú limitu. Keďže

$$v'^2(s_k) = v'^2(s_1) - 2a \int_{s_1}^{s_k} v'^2 \, ds,$$

musí byť

$$\int^{\infty} v'^2 \, ds < \infty. \tag{27}$$

Vynásobíme rovnicu (26) v' a integrujeme od 0 do s. Dostaneme

$$v'^2(s) + a \int_0^s v'^2(\tau) \, d\tau + b\left(\frac{v^2(s)}{2} - \frac{v^{n+1}(s)}{n+1}\right) = c,$$

z čoho vyplýva, že v' aj v musia byť ohraničené. Z rovnice (26) vyplýva, že aj v'' musí byť ohraničené. Z toho a z (27) vyplýva podľa lemmy 3 $v' \to 0$. Substituciou $v = 1 + v_1$ dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2 v_1}{ds^2} + a \frac{dv_1}{ds} + b(1 - n) v_1 + O(v_1^2) = 0.$$

Keďže korene charakteristickej rovnice lineárnej časti tejto rovnice majú záporné reálne časti, je triviálne riešenie tejto rovnice asymptoticky stabilné. To znamená, že riešenie $v = 1$ rovnice (26) je asymptoticky stabilné, t. j. existuje také $\varepsilon > 0$, že pre každé riešenie $v(s)$ splňujúce pre nejaké $\bar{s}$ podmienky $|v(\bar{s}) - 1| < \varepsilon$, $|v'(\bar{s})| < \varepsilon$, platí $\lim_{s \to \infty} v(s) = 1$. Pre každé riešenie, oscilujúce okolo priamky $v = 1$ však existuje také k, že $v(s_k) = 1$, $|v'(s_k)| < \varepsilon$, (pretože $v'(s_k) \to 0$) a teda musí preň platiť $v(s) \to 1$.

Veta 4. *Ak $\sigma + n + 1 < 0 \leqq \sigma + 2$, potom každé kladné riešenie rovnice* (1) *vyhovuje vzťahu*

$$u \sim ct.$$

Dôkaz. Ukážeme najprv, že $u = t^{1+o(1)}$.

1. Predpokladajme $\sigma + 2 = 0$. Substitúciou $t = e^s$ dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} - u^n = 0. \tag{28}$$

u musí byť zrejme pre dosť veľké s monotónne, pretože môže mať pre $u \geqq 0$ ako extrémy iba minimá. Sú teda 3 možnosti:

$$\text{a) } u \to c, \quad 0 < c < \infty; \quad \text{b) } u \to \infty; \quad \text{c) } u \to 0.$$

V prípade a) by muselo byť súčasne $u' \to 0$, $u'' \to 0$. Z rovnice (28) potom vyplýva, že by muselo byť aj $u \to 0$, čo je v spore s predpokladom.

V prípade b) dostaneme substitúciou $\mathrm{d}u/\mathrm{d}s = p$ rovnicu

$$p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} - p - u^n = 0. \tag{29}$$

Obdobne ako v dôkaze lemmy 9 dostaneme, že u musí vyhovovať vzťahu

$$p \sim \alpha u^k (\ln u)^r. \tag{30}$$

Dosadením do rovnice (29) dostaneme

$$\alpha) \ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = [1 + o(1)]; \quad \text{ak} \quad n - k < 0, \quad n - k = 0, \quad r > 0.$$

$$\beta) \ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = c[1 + o(1)]; \quad \text{ak} \quad n - k = 0, \quad r = 0.$$

$$\gamma) \ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\alpha} u^{n-k} (\ln u)^{-r}; \quad \text{ak} \quad n - k = 0, \quad r < 0, \quad \text{alebo} \quad n - k > 0.$$

V prípade α) dostaneme integrovaním $p = u[1 + o(1)]$, z čoho vyplýva $k = 1$, $r = 0$, t. j.

$$p \sim u. \tag{31}$$

V prípade β) dostaneme $p = cu[1 + o(1)]$, čo je v spore s (30), lebo $k = n < 1$.

V prípade γ) dostaneme $\mathrm{d}p/\mathrm{d}u \to \infty$, čo je v spore s vyjadrením (30) lebo $k < n < 1$.

V prípade c) dostaneme substitúciou $u = 1/v$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}s = p$ rovnicu

$$p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} - \frac{2}{v} p^2 - p + v^{2-n} = 0. \tag{32}$$

Obdobne ako predtým dostaneme, že p, v musia vyhovovať vzťahu (30). $k > 1$ je vylúčené, pretože by sme dostali spor s lemmou 1. Ak $k \leqq 1$, dostaneme dosadením (30) do (32)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} \sim -\frac{1}{\alpha} v^{2-n-k} (\ln v)^{-r}, \tag{33}$$

z čoho vyplýva $\mathrm{d}p/\mathrm{d}v \to -\infty$ a to je v spore s vyjadrením (30). Ako jediné možné nám teda ostalo vyjadrenie (31), z ktorého vyplýva

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = u[1 + o(1)],$$

$$u = \mathrm{e}^{s[1 + o(1)]} = t^{1 + o(1)}.$$

2. Predpokladajme $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$.

Predpokladajme, že existuje riešenie $u(t)$, pre ktoré platí

$$0 < \lim_{t \to \infty} u(t) < \infty. \tag{34}$$

Ukážeme, že to nie je možné.

Dokážeme najprv, že nie je možné, aby platilo $u(t) = o(t^k)$ pre všetky k.

Predpokladajme opak. Označme $u = 1/v$; potom v musí spĺňať vzťah $t^{-k} = o[v(t)]$ pre všetky t.

Z rovnice (1) dostávame pre v rovnicu

$$v'' = -t^\sigma v^{2-n} + 2\frac{v'^2}{v}. \tag{35}$$

Z lemmy 1 vyplýva, že ku každému T existuje také $t_1 > T$, pre ktoré platí

$$v'(t_1) \leqq v^{\frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2}(3-n)]}$$

pretože

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}(3 - n)\right] > 1.$$

Z toho vyplýva

$$\frac{v'^2(t_1)}{v(t_1)} < v(t_1)^{\frac{1}{2}(3-n)},$$

$$v''(t_1) < -t_1^\sigma v^{2-n} + 2v(t_1)^{\frac{1}{2}(3-n)}. \tag{36}$$

Keďže $t^{-k} = o[v(t)]$ pre všetky k, je aj $t^{-\frac{4\sigma}{1-n}} = o[v(t)]$ a teda aj $t^{-\sigma} = o\left(v^{\frac{1-n}{4}}\right)$. Existuje teda také T, že pre $t > T$ platí

$$t^\sigma > 2v^{-\frac{1-n}{2}}.$$

Dosadením tohoto vzťahu do (36) dostaneme

$$v''(t_1) < -2v(t_1)^{\frac{1}{2}(3-n)} + 2v(t_1)^{\frac{1}{2}(3-n)} = 0,$$

z čoho vyplýva, že v by musela byť pre t_1 konkávna. Z rovnice (35) ľahko usúdime, že $v(t)$ by musela ostať konkávna aj pre $t \geqq t_1$, čo je zrejme v spore s tým, že má byť $t^{-k} = o[v(t)]$ pre všetky k.

Je zrejmé, že za predpokladu (34) platí $u(t) = o(t^k)$ pre všetky $k > 0$. Ukážeme, že pre nijaké $k < 0$ neplatí súčasne

$$\limsup_{t \to \infty} t^{-k} u(t) = \infty,$$

$$\liminf_{t \to \infty} t^{-k} u(t) = 0. \tag{37}$$

Označme $v = ut^{-k}$. Pre v dostaneme z (1) rovnicu

$$v'' = t^{\sigma-(n-1)k} v^n - 2kt^{-1}v' - k(k-1)t^{-2}v.$$

Keby platilo (37), existovala by postupnosť bodov $\{t_\nu\}$, kde $t_\nu \to \infty$, v ktorých by v nadobúdala maximum a platilo by $v(t_\nu) \to \infty$. Platilo by teda

$$v''(t_\nu) = t_\nu^{\sigma+(n-1)k} v^n(t_\nu) - k(k-1)\, t_\nu^{-2} v(t_\nu) < 0,$$

z čoho by vyplývalo

$$v^{1-n}(t_\nu) = \frac{v(t_\nu)}{v^n(t_\nu)} > \frac{1}{k(k-1)}\, t_\nu^{\sigma+(n-1)k+2}.$$

To by však znamenalo

$$u^{1-n}(t_\nu)\, t^{(n-1)k} > \frac{1}{k(k-1)}\, t_\nu^{\sigma+(n-1)k+2},$$

$$u^{1-n}(t_\nu) > \frac{1}{k(k-1)}\, t_\nu^{\sigma+2}.$$

Z poslednej nerovnosti by vyplývalo $u(t_\nu) \to \infty$, čo je v spore s predpokladom (34).

Za predpokladu (34) sú teda splnené všetky predpoklady lemmy 8, podľa ktorej existuje také číslo κ, že $u(t) = t^{\kappa + o(1)}$. Dosadením do (1) dostaneme

$$u'' = t^{\sigma + n\kappa + o(1)},$$

$$u' = c_1 + t^{\sigma + 1 + n\kappa + o(1)},$$

$$u = c_1 t + c_2 + t^{\sigma + 2 + n\kappa + o(1)},$$

z čoho vyplýva buď $\kappa = 1$, alebo $\sigma + 2 + n\kappa = \kappa$, t. j. $\kappa = \dfrac{\sigma + 2}{1 - n}$ ($\kappa = 0$ nemôže byť, pretože $\sigma + 2 > 0$). V oboch prípadoch vychádza $u \to \infty$, čo je v spore s predpokladom (34).

Ostáva teda iba prípad $u \to \infty$. V tomto prípade existuje bod t_0, v ktorom $u'(t_0) > 0$ (t_0 môže byť ľubovoľne veľké). Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a $\bar{\sigma}$ také, že platí

$$0 < \bar{\sigma} + n + 1 < (1 - n)\,\varepsilon,$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\bar{\sigma} + 2}{1 - n} < 1 + \varepsilon. \tag{38}$$

Označme v, w riešenia rovníc

$$v'' - t^{\bar{\sigma}} v^n = 0,$$

$$w'' - t^{-2} w^n = 0,$$

také, že $v(t_0) = w(t_0) = u(t_0)$, $v'(t_0) = w'(t_0) = u'(t_0)$.
Podľa vety 3 platí

$$v \sim \gamma_1 t^{\frac{\bar{\sigma}+2}{1-n}} \tag{39}$$

a v časti 1 tohto dôkazu sme dokázali

$$w \sim ct. \tag{40}$$

Keďže $-2 < \sigma < \bar{\sigma}$, ľahko zistíme, že pre $t \geqq t_0$ platí

$$w(t) \leqq u(t) \leqq v(t). \tag{41}$$

Z vyjadrení (39), (40) a z nerovnosti (38) vyplýva

$$t^{1-\varepsilon} = o(w(t)),$$
$$v(t) = o(t^{1+\varepsilon})$$

a podľa nerovnosti (41) aj

$$t^{1-\varepsilon} = o(u(t)),$$
$$u(t) = o(t^{1+\varepsilon}),$$

z čoho podľa lemmy 6 vyplýva

$$u = t^{1+o(1)}.$$

Dosadením tohto vyjadrenia do rovnice (1) dostaneme

$$u'' = t^{\sigma+n+o(1)},$$
$$u' = c + t^{\sigma+n+1+o(1)},$$
$$u = ct + c_1 + t^{\sigma+n+2+o(1)},$$
$$u = ct[1 + c_1c^{-1}t^{-1} + t^{\sigma+n+1+o(1)}] = ct[1 + o(1)], \tag{42}$$

čo znamená

$$u \sim ct.$$

Veta 5. *Ak* $\sigma + n + 1 = 0$, *potom každé kladné riešenie rovnice* (1) *vyhovuje vzťahu*

$$u = t^{1+o(1)}.$$

Dôkaz je možné vykonať presne tak, ako vo vete 4. Spresnenie tohto výsledku ako u vety 4 sa však nedá vykonať, pretože $\sigma + n + 1 = 0$, takže člen $t^{\sigma+n+1+o(1)}$ nemôžeme vo výraze (42) zahrnúť pod $o(1)$.

Tým máme vyšetrené všetky možnosti v rovnici (1). V ďalšom sa budeme zaoberať rovnicou (2). Táto rovnica môže mať v niektorých prípadoch aj oscilatorické riešenia, ktorými sa však nebudeme zaoberať. Kladné riešenia tejto rovnice zrejme musia byť konkávne a monotónne.

Veta 6. *Ak* $\sigma + 2 < 0$, *potom každé kladné riešenie rovnice* (2) *vyhovuje jednému zo vzťahov*

1. $u \sim ct$ $(c > 0)$.
2. $u = c - \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}[1 + o(1)]$ $\quad (c > 0)$.

Dôkaz. Keďže u je konkávna, sú len dve možnosti:

a) $u \to c$ kde $0 < c < \infty$. Vtedy dosadením do (1) dostaneme prípad 2.

b) $u \to \infty$. Ukážeme najprv, že platí $u = t^{1+o(1)}$.

Keďže $u \to \infty$, platí zrejme $t^k = o(u(t))$ pre $k < 0$. Keďže $u(t)$ je konkávna, platí $u(t) \leqq c_1 t$ pre dosť veľké t, kde $c_1 > 0$, z čoho vyplýva $u(t) = o(t^k)$ pre $k > 1$.

Nech $0 < k < 1$. Ukážeme, že nemôže súčasne platiť

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \to \infty} t^{-k} u(t) = \infty, \\ &\liminf_{t \to \infty} t^{-k} u(t) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Označme $v = t^{-k} u(t)$. Pre v dostaneme z (2) rovnicu

$$v'' = -t^{\sigma + (n-1)k} v^n - 2k t^{-1} v' - k(k-1) t^{-2} v. \tag{44}$$

Keby platilo (40), musela by existovať postupnosť bodov $\{t_v\}$, $t_v \to \infty$ taká, že v bodoch t_v by v nadobúdala maximum a $v(t_v) \to \infty$. Platí však

$$\sigma + (n-1)k < \sigma < -2,$$

z čoho vyplýva

$$v''(t_v) = -t^{\sigma + (n-1)k} v^n(t_v) - k(k-1) t^{-2} v(t_v) > t_v^{-2}[k(1-k) v(t_v) - v^n(t_v)].$$

Pre dosť veľké v však platí

$$k(1-k) v(t_v) > v^n(t_v),$$

z čoho vyplýva $v''(t_v) > 0$, čo je v spore s tým, že funkcia $v(t)$ nadobúda v t_v maximum.

Ak $k = 1$, potom je z rovnice (44) zrejmé, že v musí byť monotónna pre dosť veľké t, pretože ako extrémy môže mať iba maximá. Sú teda splnené všetky predpoklady lemmy 8, musí teda existovať také číslo κ, že $u = t^{\kappa + o(1)}$. Z toho, že $u(t) = o(t^k)$ pre $k > 1$, $t^k = o(u(t))$ pre $k < 0$ vyplýva $0 \leqq \kappa \leqq 1$. Dosadením do rovnice (2) dostávame

$$\begin{aligned} u'' &= -t^{\sigma + n\kappa + o(1)}, \\ u' &= c_1 - t^{\sigma + n\kappa + 1 + o(1)}, \\ u &= c_1 t + c_2 - t^{\sigma + n\kappa + 2 + o(1)}. \end{aligned}$$

Môžu teda nastať 3 prípady:

α) $\kappa = 0$;

β) $\kappa = 1$;

γ) $\sigma + n\kappa + 2 = \kappa$, t. j. $\kappa = \dfrac{\sigma + 2}{1 - n}$.

V prípade α) dostávame $u = c[1 + o(1)]$, z čoho dostaneme opäť vyjadrenie 2. V prípade β) dostaneme $u = ct[1 + o(1)]$, t. j. prípad 1. Prípad γ) je vylúčený, pretože $\sigma + 2 < 0$ a teda by nebolo $u \to \infty$.

Veta 7. *Ak $\sigma + 2 = 0$, potom každé kladné riešenie rovnice (2) vyhovuje vzťahu*

$$u \sim ct \quad (c > 0).$$

Dôkaz je opakovaním časti a) a záveru dôkazu vety 4 s tou výnimkou, že zo vzťahu (33) dostaneme $dp/dr \to \infty$, čo je však tiež v spore s vyjadrením (30).

Veta 8. *Ak* $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$, *potom každé kladné riešenie rovnice* (2) *vyhovuje jednému zo vzťahov*

1. $u \sim \gamma_2 t^{\omega}$,
2. $u \sim ct$,

kde ω, γ_2 *sú dané vzťahom* (7), $c > 0$.

Ak $2\sigma + n + 3 < 0$, *potom rovnica* (2) *nemá oscilatorické riešenia.*

Dôkaz. Substitúciou (9) dostaneme rovnicu (10). Keďže môže mať riešenia tejto rovnice minimá iba pre $-1 \leqq v \leqq 0$ a $1 \leqq v < \infty$ a maximá iba pre $-\infty < v \leqq 1$ a $0 \leqq v \leqq 1$, sú kladné riešenia tejto rovnice pre dosť veľké s monotónne. Z lemmy 9 potom vyplýva, že platí buď $v \to 1$, buď $v = \exp[(-\omega + 1)s(1 + o(1))]$ (pretože $\omega > 0$, $\omega - 1 < 0$). Ak $v \to 1$, dostávame prípad 1. Ak $v = \exp[(-\omega + 1)s(1 + o(1))]$, dostávame $u = t^{1+o(1)}$. Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$u'' = -t^{\sigma+n+o(1)},$$
$$u' = c - t^{\sigma+n+1+o(1)},$$
$$u = c_1 + ct - t^{\sigma+n+2+o(1)}$$
$$u = ct[1 + c_1 c^{-1} t^{-1} + t^{\sigma+n+1+o(1)}] = ct[1 + o(1)],$$

čo nám dáva vyjadrenie 2.

Nech teraz $2\sigma + n + 3 < 0$. Potom môžeme rovnicu (10) písať

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - a\frac{dv}{ds} + b(v^n - v) = 0,$$

kde $a = -(2\omega - 1) > 0$, $b = -\omega(\omega - 1) > 0$.

Predpokladajme, že táto rovnica má oscilatorické riešenie. Z uvedenej úvahy o maximách a minimách riešení vyplýva, že riešenie môže oscilovať iba v páse $-1 \leqq v \leqq 1$ a teda musí byť ohraničené. Označme s_k body, v ktorých $v(s_k) = 0$. Podobným postupom, ako v dôkaze vety 2 dostaneme, že $v'^2(s_k) \to \infty$. Vezmime k tak veľké, že platí

$$v'(s_k) > \frac{b}{a} \max_{0 \leqq v \leqq 1} (v^n - v).$$

Potom platí

$$v'' = av' - b(v^n - v) > 0$$

v dosť malom okolí bodu s_k; ľahko zistíme, že táto nerovnosť ostane splnená, pokiaľ $0 \leqq v \leqq 1$. Z toho však vyplýva, že v' je rastúca a teda v musí pretnúť priamku $v = 1$, čo je v spore s tým, že riešenie môže oscilovať iba v páse $-1 \leqq v \leqq 1$.

Veta 9. *Ak* $\sigma + n + 1 \geqq 0$, *potom rovnica* (2) *nemá kladné riešenia.*

Dôkaz. V [3] je dokázané že postačujúcou podmienkou, aby rovnica

$$u'' + f(t)\,u^n = 0 \quad (n < 1),$$

nemala neoscilatorické riešenia je, aby platilo

$$\int^{\infty} f(t)\, t^n \,\mathrm{d}t = \infty\,;$$

táto podmienka je v našom prípade zrejme splnená.

LITERATÚRA

[1] Беллман Р. (Bellman R.) *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений,* Москва 1954.

[2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. (Coddinngton E. A., Levinson N.) *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений,* Москва 1958.

[3] Belohorec Š., *Oscilátorické riešenie istej nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu,* Matematicko-fyzikálny časopis SAV 11 (1961), 250—255.

Došlo 5. 11. 1961.

Ústav strojov a automatizácie Slovenskej akadémie vied v Bratislave

ОБ УРАВНЕНИИ ЭМДЕНА—ФАУЛЕРА В СЛУЧАЕ $n < 1$

Павол Бруновски

Резюме

Изучается асимптотическое поведение положительных решений уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - t^\sigma u^n = 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + t^\sigma u^n = 0, \tag{2}$$

где n — „нечетное" рациональное число (т. е. $n = p/q$, где p/q, — оба нечетные числа), исполняющее неравенство $0 > n > 1$.

Случай $n > 1$ изучен в ряде работ, например в [1].

К уравнениям типа (1), (2) можно привести уравнения типа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \pm t^\sigma u^n = 0 \tag{3}$$

в случае $\varrho \neq 1$. Уравнения типа (3) называются уравнениями Эмдена—Фаулера (смотри [1]).

Оказывается, что в случае $0 > n > 1$ мы получаем подобные асимптотические выражения, но для других σ, как в случае $n > 1$.

Пусть

$$\omega = \frac{\sigma + 2}{1 - n}, \quad \gamma_1 = \left[\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_2 = \left[-\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Верны следующие теоремы:

Теорема 1. Каждое положительное решения уравнения (1) или (2) регулярно.

Теорема 2. Если $\sigma + 2 > 0$, то каждое положительное решение уравнения (1) удовлетворяет одному из соотношений

1. $u = \gamma_1 t^{\omega}$.
2. $u \sim ct. \quad (c > 0)$.
3. $u = c + \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} [1 + o(1)] \qquad (c > 0)$.

Теорема 3. Если $\sigma + n + 1 > 0$, то каждое положительное решение уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$u \sim \gamma_1 t^{\omega}.$$

Теорема 4. Если $\sigma + n + 1 < 0 \leq \sigma + 2$, то каждое положительное решение уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$u \sim ct \quad (c > 0).$$

Теорема 5. Если $\sigma + n + 1 = 0$, то каждое положительное решение уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$u = t^{1+o(1)}.$$

Теорема 6. Если $\sigma + 2 > 0$, то каждое положительное решение уравнения (2) удовлетворяет одному из соотношений

1. $u \sim ct \quad (c > 0)$.
2. $u = c - \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} [1 + o(1)] \qquad (c > 0)$.

Теорема 7. Если $\sigma + 2 = 0$ то каждое положительное решение уравнения (2) удовлетворяет соотношению

$$u \sim ct \quad (c > 0).$$

Теорема 8. Если $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$, то каждое положительное решение уравнения (2) удовлетворяет одному из соотношений

1. $u \sim \gamma_2 t^{\omega}$.
2. $u \sim ct \quad (c > 0)$.

Если $2\sigma + n + 3 < 0$, то уравнение (2) не имеет колеблющихся решений.

Теорема 9. Если $\sigma + n + 1 \geq 0$, то уравнение (2) не имеет положительных решений.

OM ON EMDEN—FOWLER'S EQUATION IN THE CASE $n < 1$

Pavol Brunovský

Summary

The asymptotic behaviour of the positive solutions of the differential equations

$$\frac{d^2u}{dt^2} - t^{\sigma}u^n = 0 \tag{1}$$

and

$$\frac{d^2u}{dt^2} + t^\sigma u^n = 0. \tag{2}$$

is considered. Here n is an „odd" rational number (i. e. $n = p/q$, where p, q are odd numbers), $0 < n < 1$.

The case $n > 1$ is considered in more articles and books, e. g. [1].

Equations (1), (2) may be obtained from the equation

$$\frac{d}{dt}\left(t^\rho \frac{du}{dt}\right) \pm t^\sigma u^n = 0 \tag{3}$$

in the case $\varrho \neq 1$. Equations of the type (3) are so called Emden — Fowler's equations (see [1]).

Let

$$\omega = \frac{\sigma + 2}{1 - n}, \; \gamma_1 = \left[\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \; \gamma_2 = \left[-\frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(1 - n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

The following theorems are valid:

Theorem 1. Every positive solution of the equation (1) or (2) is regular.

Theorem 2. If $\sigma + 2 < 0$, then every solution of the equation (1) satisfies one of the relations

1. $u = \gamma_1 t^\omega$.
2. $u \sim ct \quad (c > 0)$.
3. $u = c + \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)}[1 + o(1)] \qquad (c > 0)$.

Theorem 3. If $\sigma + n + 1 > 0$, then every positive solution of the equation (1) satisfies the relation

$$u \sim \gamma_1 t^\omega.$$

Theorem 4. If $\sigma + n + 1 < 0 \leqq \sigma + 2$, then every positive solution of the equation (1) satisfies the relation

$$u \sim ct \quad (c > 0).$$

Theorem 5. If $\sigma + n + 1 = 0$, then every positive solution of the equation (1) satisfies the relation

$$u = t^{1 + o(1)}.$$

Theorem 6. If $\sigma + 2 < 0$, then every positive solution of the equation (2) satisfies one of the relations

1. $u \sim ct \quad (c > 0)$.
2. $u = c - \dfrac{c^n t^{\sigma+2}}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)}[1 + o(1)] \qquad (c > 0)$.

Theorem 7. If $\sigma + 2 = 0$, then every positive solution of the equation (2) satisfies the relation

$$u \sim ct \quad (c > 0).$$

Theorem 8. If $\sigma + n + 1 < 0 < \sigma + 2$, then every positive solution of the equation (2) satisfies one of then relations

1. $u \sim \gamma_2 t^\omega$.
2. $u \sim ct \quad (c > 0)$.

If $2\sigma + n + 3 < 0$, then the equation (2) has no oscillating solution.

Theorem 9. If $\sigma + n + 1 \leqq 0$, then the equation (2) has no positive solution.