Matematický časopis

Jozef Rovder

Niektoré vlastnosti diferenciálnej rovnice $y'' + f(x)|y| = 0$

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 1, 53--62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126585

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Matematický časopis 19 (1969), No. 1

NIEKTORÉ VLASTNOSTI DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE $y'' + f(x)|y| = 0$

JOZEF ROVDER, Bratislava

V práci sú uvedené niektoré vlastnosti rovnice (a) plynúce z jej vzťahov k lineárnej diferenciálnej rovnici druhého rádu a sú dané postačujúce podmienky, aby táto rovnica bola neoscilatorická, resp. oscilatorická.

Ak prevedieme rovnicu

$$y'' + f(x)|y| = 0 \tag{a}$$

do ekvivalentného systému diferenciálnych rovníc prvého rádu, potom existencia a jednoznačnosť riešenia tejto rovnice daného počiatočnými podmienkami vyplýva z nasledujúcej vety. V ďalšom (a, b) bude znamenať otvorený interval, ktorý v niektorých prípadoch bude predstavovať interval (a, ∞).

Veta 1. *Nech $a_{ik}(x) \in C_0(a, b)$, $i, k = 1,2, \dots n$. Nech $x_0 \in (a, b)$, $y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0$ sú ľubovoľné čísla. Potom existuje jedno a len jedno riešenie sústavy rovníc*

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}|y_1| + a_{12}|y_2| + \dots + a_{1n}|y_n|, \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}|y_1| + a_{n2}|y_2| + \dots + a_{nn}|y_n|, \end{aligned} \tag{1}$$

ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1,2, \dots n$. Toto riešenie je definované v celom intervale (a, b).

Dôkaz. Vetu stačí dokázať na ľubovoľnom uzavretom, konečnom podintervale $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$ takom, že $x_0 \in \langle c, d\rangle$. Nech $|a_{ik}(x)| \leqq M$ pre $x \in \langle c, d\rangle$. Potom funkcie na pravej strane systému rovníc (1) budú vyhovovať Lipschitzovej podmienke vzhľadôm k premenným $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Skutočne, nech $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$, $(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)$ sú dva rôzne body, potom platí

$$\begin{aligned} &|(a_{i1}|\bar{y}_1| + a_{i2}|\bar{y}_2| + \dots + a_{in}|\bar{y}_n|) - (a_{i1}|\bar{\bar{y}}_1| + a_{i2}|\bar{\bar{y}}_2| + \dots + a_{in}|\bar{\bar{y}}_n|)| \leqq \\ &\leqq |a_{i1}|\,|\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1| + |a_{i2}|\,|\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2| + \dots + |a_{in}|\,|\bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n| \leqq \\ &\leqq M(|\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}}_1| + |\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2| + \dots + |\bar{y}_n - \bar{\bar{y}}_n|). \end{aligned}$$

Podobne, ako u lineárnych rovníc, ľahko zistíme, že postupné aproximácie rovnomerne konvergujú k riešeniu $y(x)$ na celom intervale $\langle c, d\rangle$.

Poznámka. Z dôkazu vety je vidieť, že táto veta ostane v platnosti aj vtedy, keď niektoré z premenných $|y_1|, |y_2| \dots |y_n|$ nahradíme premennými $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Z rovnice (a) predovšetkým vyplýva, že ak funkcia $f(x)$ je nezáporná (nekladná) na celom intervale (a, b), potom každé riešenie $y(x) \not\equiv 0$ je konkávna (konvexná), alebo lineárna funkcia a má na intervale (a, b) najviac dva nulové body.

Použitím vety o oddeľovaní nulových bodov pre lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 2. *Medzi tromi za sebou idúcimi nulovými bodmi jedného riešenia rovnice* (a) *existuje aspoň jeden nulový bod ľubovoľného riešenia tejto rovnice.*

Dôkaz. Nech $y(x) \not\equiv 0$ je riešením rovnice (a) s vlastnosťou $y(x_0) = y(x_1) = y(x_2) = 0$, $x_0 < x_1 < x_2$. Nech je $y(x) > 0$ v intervale (x_0, x_1) a $y(x) < 0$ v intervale (x_1, x_2). Potom $y(x)$ vyhovuje v $\langle x_0, x_1 \rangle$ lineárnej rovnici $y'' + f(x)y = 0$ a v $\langle x_1, x_2 \rangle$ rovnici $y'' - f(x)y = 0$. Predpokladajme, že existuje riešenie $z(x)$ rovnice (a) také, že je $z(x) > 0$ ($z(x) < 0$) v intervale (x_0, x_2). Potom je $z(x)$ riešením aj rovnice $y'' + f(x)y = 0$ v $\langle x_0, x_1 \rangle$ (riešením rovnice $y'' - f(x)y = 0$ v $\langle x_1, x_2 \rangle$). Z vety o oddeľovaní nulových bodov riešení lineárnej rovnice vyplýva, že musí $z(x)$ mať nulový bod v intervale $(x_0, x_1\rangle$ ($\langle x_1, x_2)$).

Poznámka. Z dôkazu tejto vety vyplýva nasledujúca vlastnosť rozloženia nulových bodov riešení rovnice (a). Nech $y(x)$ je riešenie rovnice (a) s nulovými bodmi x_1, x_2, x_3 a nech je $y'(x_1) > 0$. Potom ľubovoľné riešenie $y_1(x)$ s vlastnosťou $y_1(x_1) > 0$, má v intervale (x_1, x_3) dva, alebo tri nulové body. Ak je $y_1(x_1) < 0$, potom má riešenie $y_1(x)$ v intervale (x_1, x_3) jeden, alebo dva nulové body. Podobne to platí aj vtedy, keď je $y'(x_1) < 0$. Ak platí $y(x_1) = y_1(x_1) = 0$ a $y'(x_1)$, $y_1'(x_1)$ sú rovnakého znamienka, potom $y(x)$ a $y_1(x)$ sú lineárne závislé. Keď $y_1'(x_1)$, $y'(x_1)$ sú opačného znamienka, potom riešenie $y_1(x)$ má v intervale (x_1, x_3) jeden, alebo dva nulové body.

Aby bolo vidieť, že sa veta 2 nedá zlepšiť, uvedieme príklad, keď medzi tromi nulovými bodmi jedného riešenia rovnice (a) existuje práve jeden, dva, alebo tri nulové body iného riešenia tejto rovnice.

Uvažujme rovnicu

$$y'' + f_0(x)|y| = 0, \tag{2}$$

kde funkcia $f_0(x)$ je definovaná nasledovne:

$$f_0(x) = \begin{cases} -x - \pi - 1, & \text{pre} \quad x \leqq -\pi, \\ -1, & \text{pre} \quad -\pi \leqq x \leqq 1, \\ 1 - \dfrac{2}{x^2}, & \text{pre} \quad 1 \leqq x \leqq a, \\ -x + a + 1 - \dfrac{2}{a^2}, & \text{pre} \quad x \geqq a, \end{cases}$$

pričom a je prvý nulový bod riešenia $\bar{y}_3(x)$ diferenciálnej rovnice

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

v intervale $\langle 1, \infty)$, ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam $\bar{y}_3(1) = \sinh 1$, $\bar{y}'_3(1) = \cosh 1$.

Nájdeme riešenie $y(x)$ rovnice (2) pri počiatočných podmienkach $y(-\pi) = 0$, $y'(-\pi) = -1$. V intervale $\langle -\pi, 0\rangle$ týmto podmienkam vyhovuje riešenie rovnice (2) $y_1(x) = \sin x$. V intervale $\langle 0, 1\rangle$ rovnici (2) vyhovuje riešenie $y_2(x) = \sinh x$, pretože $y_2(0) = y_1(0) = 0$, $y'_2(0) = y'_1(0) = 1$. Pretože je $y_2(1) > > 0$, potom v intervale $\langle 1, a\rangle$ vyhovuje rovnici (2) riešenie

$$y_3(x) = c_1 \sin (x + c_2) + \frac{c_1}{x} \cos (x + c_2)$$

rovnice

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

pri počiatočných podmienkach $y_3(1) = y_2(1) = \sinh 1$, $y'_3(1) = y'_2(1) = \cosh 1$.

Pre $x \geqq a$ je riešenie $y(x)$ totožné s riešením $y_4(x)$ rovnice

$$y'' + \left(-x + a + 1 - \frac{2}{a^2}\right) |y| = 0,$$

ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam $y_4(a) = y_3(a) = 0$, $y'_4(a) = y'_3(a)$. Pretože funkcia $f(x) = -x + a + 1 - \frac{2}{a^2}$ je v intervale $\left(a, a + 1 - \frac{2}{a^2}\right)$ kladná ($a > \sqrt{2}$, pretože v intervale $\langle 1, \sqrt{2}\rangle$ je $\bar{y}_3(x) > 0$) a v intervale $\left(a + 1 - \frac{2}{a^2}, \infty\right)$ záporná, je riešenie $y_4(x)$ v $\left(a, a + 1 - \frac{2}{a^2}\right)$ konkávne a v $\left(a + 1 - \frac{2}{a^2}, \infty\right)$ konvexné. Teda $y_4(x)$ má v intervale (a, ∞) najviac jeden nulový bod. Z oscilatoričnosti rovnice

$$y'' - \left(-x + a + 1 - \frac{2}{a^2}\right) y = 0$$

vyplýva, že $y_4(x)$ má vpravo od bodu a práve jeden nulový bod. Označme ho b. Analogicky sa ukáže, že riešenie $y(x)$, ktoré je v intervale $(-\infty, -\pi)$ totožné s riešením $y_0(x)$ rovnice

$$y'' + (-x - \pi - 1)|y| = 0$$

a vyhovuje počiatočným podmienkam $y_0(-\pi) = 0, y_0'(-\pi) = -1$, má v tomto intervale tiež práve jeden nulový bod c. Teda riešenie $y(x)$ zložené z riešení $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, má práve päť nulových bodov c, $-\pi$, 0, a, b.

Ľubovoľné riešenie $z(x)$ rovnice (2), ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $z(-\pi) > 0$, $z'(-\pi) = 0$ je na intervale $(-\pi, \sqrt{2})$ konvexné a na intervale $(\sqrt{2}, a)$ konkávne, teda má na intervale $(-\pi, a)$ najviac jeden nulový bod. Z vety 2 však vyplýva, že musí mať v intervale $(-\pi, a)$ aspoň jeden nulový bod, má teda na tomto intervale práve jeden nulový bod. Označme ho x_1. Zistili sme, že medzi tromi nulovými bodmi $-\pi, 0, a$ riešenia $y(x)$ existuje práve jeden nulový bod x_1 riešenia $z(x)$.

Pretože funkcia $f(x)$ je v intervale $\left(\sqrt{2}, a + 1 - \dfrac{2}{a^2}\right)$ kladná a $z(x_1) = 0$, je $z(x) < 0$ v intervale $\left(x_1, a + 1 - \dfrac{2}{a^2}\right)$. $z(x)$ nemôže byť záporná na celom intervale (x_1, b), pretože na intervale $(a, b) \subset (x_1, b)$ by vyhovovala rovnici

$$z'' - \left(-x + a + 1 - \frac{2}{a^2}\right) z = 0,$$

ktorej vyhovuje aj riešenie $y_4(x)$. Keďže $y_4(a) = y_4(b) = 0$, z vety o oddeľovaní nulových bodov riešení lineárnej rovnice druhého rádu vyplýva, že v intervale (a, b) musí existovať bod x_2, že platí $z(x_2) = 0$. Tento bod je práve jeden, pretože $z(x)$ je konvexná funkcia pre $x > a + 1 - 2/a^2$. Analogickým spôsobom sa ukáže, že $z(x)$ má práve jeden nulový bod x_0 v intervale $(c, -\pi)$. Takto dostaneme, že medzi tromi nulovými bodmi x_0, x_1, x_2 riešenia $z(x)$ existujú práve tri nulové body $-\pi$, 0, a riešenia $y(x)$.

Podobne ľahko nahliadneme, že riešenie $u(x)$ rovnice (2), ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam $u(-\pi) < 0$, $u'(-\pi) = 0$ má práve dva nulové body v intervale $(-\pi, a)$.

Dôsledok. *Buď všetky riešenia rovnice* (a) *sú oscilatorické, alebo všetky sú neoscilatorické, pričom riešenie nazývame oscilatorickým, ak v ľubovoľnom intervale* (N, ∞) *má nekonečný počet nulových bodov. Ak všetky riešenia danej rovnice sú oscilatorické, potom rovnica sa nazýva oscilatorická.*

Veta 3. *Nutnou a postačujúcou podmienkou aby rovnica* (a) *bola neoscilatorická je, aby aspoň jedna z rovníc*

$$(a_1) \qquad y'' + f(x)y = 0$$
$$(a_2) \qquad y'' - f(x)y = 0$$

bola neoscilatorická.

D ô k a z. Nutná podmienka. Ak rovnica (a) je neoscilatorická, potom existuje jej riešenie $y(x)$, ktoré je buď kladné, alebo záporné pre $x > x_0$, kde x_0 je dostatočne veľké. V intervale (x_0, ∞) je $y(x)$ v prvom prípade riešením rovnice (a_1), v druhom riešením rovnice (a_2). Preto buď rovnica (a_1), alebo rovnica (a_2) je neoscilatorická.

Postačujúca podmienka. Ak rovnica (a_1) je neoscilatorická, potom existuje jej riešenie $y(x)$, ktoré je kladné pre $x > x_0$. Toto riešenie je pre $x > x_0$ riešením aj rovnice (a). Teda rovnica (a) je neoscilatorická tiež. Podobne ak rovnica (a_2) je neoscilatorická, potom existuje bod x_0, že jej riešenie je záporné pre $x > x_0$ a je riešením i rovnice (a).

Dôsledok 1. ([1], str. 367). *Nutnou podmienkou k tomu, aby rovnica (a) bola neoscilatorická je, aby platila aspoň jedna z podmienok*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = c \qquad \text{(konečná)},$$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = -\infty,$$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = +\infty.$$

Dôsledok 2. ([3], str. 289). *Ak funkcia $f(x)$ je spojitá v intervale $\langle 0, \infty)$ a $\int_0^\infty x|f(x)|\mathrm{d}x < \infty$, potom rovnica (a) je neoscilatorická a pre každé riešenie platí*

$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = c \qquad \text{(konečná)}.$$

Dôsledok 3. *Nutnou a postačujúcou podmienkou aby rovnica (a) bola oscilatorická je, aby rovnice (a_1) a (a_2) boli obe oscilatorické.*

Nasledujúce vety nám dávajú postačujúce podmienky rovnica (a) bola oscilatorická.

Veta 4. *Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, \infty)$. Nech existuje konštanta $M^2 > 0$ a postupnosť intervalov $\{I_n\}_{n=1}^\infty$, $\{i_n\}_{n=1}^\infty$; $I_n, i_n \in \langle a, \infty)$, $I_j \cap I_k = \emptyset$, $i_j \cap i_k = \emptyset$, $j \neq k$, $j, k = 1,2, \ldots$ tak, aby platilo*

$$f(x) \geqq M^2, \quad ak \quad x \in I_n,$$
$$f(x) \leqq -M^2, \quad ak \quad x \in i_n,$$

pričom je $d(I_n) \geqq \dfrac{\pi}{M}$, $d(i_n) \geqq \dfrac{\pi}{M}$. *Potom rovnica* (*a*) *je oscilatorická.*

Príkladom takýchto funkcií sú $f(x)\cos x$, $f(x)\sin x$, kde $f(x) \to \infty$, resp. $f(x) \to -\infty$, ak $x \to \infty$.

Dôkaz. Dokážeme to sporom. Nech teda existuje riešenie $y(x)$ rovnice (a), ktoré je kladné pre $x > x_0$, $x_0 \geqq a$. Vezmime v postupnosti $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ interval I_k, ktorý leží celý vpravo od bodu x_0. Taký interval vždy existuje, pretože je $\sum_{k=1}^{n} d(I_k) \geqq n \cdot \dfrac{\pi}{M} > x_0 - a$ pre $n \to \infty$. Na intervale I_k, $y(x)$ vyhovuje rovnici $y'' + f(x)y = 0$. Z porovnávacej vety pre rovnice $y'' + f(x)y = 0$, $z'' + M^2 z = 0$ vyplýva, že musí na intervale dĺžky π/M existovať aspoň jeden nulový bod riešenia $y(x)$. To je spor s predpokladom, že je $y(x) > 0$ na I_k. V prípade, keď je $y(x) < 0$, použijeme porovnávaciu vetu pre rovnice $y'' - f(x)y = 0$, $z'' + M^2 z = 0$ na intervale i_k.

Keď pre porovnanie namiesto rovnice $z'' + M^2 z = 0$ zoberieme Eulerovu rovnicu, potom platí

Veta 5. *Nech funkcia* $f(x)$ *je spojitá na intervale* $\langle a, \infty)$. *Nech existuje konštanta* $\varepsilon^2 > 0$ *a rastúca postupnosť čísel* $v_1, \bar{v}_1, y_1, \bar{y}_1, \ldots, v_n, \bar{v}_n, y_n, \bar{y}_n, \ldots$ *z intervalu* $\langle a, \infty)$. *Nech sú splnené nerovnosti*

$$f(x) \geqq \frac{1+\varepsilon^2}{4x^2}, \quad ak\ x \in \langle v_n, \bar{v}_n\rangle, \qquad f(x) \leqq -\frac{1+\varepsilon^2}{4x^2}, \quad ak\ x \in \langle y_n, \bar{y}_n\rangle,$$

pričom platí $d(\langle v_n, \bar{v}_n\rangle) \geqq v_n(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1)$, $d(\langle y_n, \bar{y}_n\rangle) \geqq y_n(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1)$. *Potom rovnica* (*a*) *je oscilatorická.*

Dôkaz. Postupujeme podobným spôsobom ako v predchádzajúcom prípade. Nech existuje riešenie $y(x)$ rovnice (a) kladné pre $x > x_0 \geqq a$. Potom toto riešenie vyhovuje v intervale $\langle x_0, \infty)$ aj rovnici $y'' + f(x)y = 0$. Použijeme porovnávaciu vetu pre rovnice

$$y'' + f(x)y = 0, \qquad z'' + \frac{1+\varepsilon^2}{4x^2} z = 0.$$

Druhá rovnica je oscilatorická. Jej všeobecné riešenie je

$$z(x) = Ax^{1/2} \sin \frac{\varepsilon}{2}(\delta + \ln x),$$

kde A, δ sú ľubovoľné konštanty. Nulové body tohto riešenia ležiace vpravo od bodu $x_1 = e^{-\delta}$ tvoria postupnosť, pre ktorú platí $x_{k+1} = x_k e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}}$, takže dĺžka intervalu $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, $k = 1,2,\dots$ je $d\langle x_k, x_{k+1}\rangle = x_k(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1)$. Ak vezmeme v postupnosti $\{\langle v_n, \bar{v}_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ interval $\langle v_N, \bar{v}_N\rangle$, ktorý leží celý napravo od bodu x_0 (taký interval vždy existuje, pretože platí $\sum_{e=1}^{n} d(\langle v_e, \bar{v}_e\rangle) \geqq$ $\geqq \sum_{e=1}^{n} v_e(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1) \geqq n \,.\, a(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1) \to \infty$ pre $n \to \infty$), musia na ňom ležať aspoň dva nulové body riešenia $z(x)$ Eulerovej rovnice, ktoré vyhovujú podmienke $z(v_N) = 0$, pretože je $d(\langle v_N, \bar{v}_N\rangle) \geqq v_N(e^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1)$. Na intervale $\langle v_N, \bar{v}_N\rangle$ platí nerovnosť $f(x) \geqq \dfrac{1 + \varepsilon^2}{4x^2}$, má preto riešenie $y(x)$ rovnice $y'' + f(x)y = 0$ aspoň jeden nulový bod na tomto intervale, čo je spor s predpokladom. Ak by platilo, že je $y(x) < 0$ pre $x > x_0$, použijeme porovnávaciu vetu pre rovnice

$$y'' - f(x)y = 0, \qquad z'' + \frac{1 + \varepsilon^2}{4x^2} z = 0$$

na intervale $\langle y_N, \bar{y}_N\rangle$.

Veta 6. *Nech $f(x) \in C_0\langle 0, \infty)$ a nech je splnená podmienka*

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \exp\{\pm 2 \int_0^x\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - cx\}\mathrm{d}x = \infty \tag{3}$$

pre všetky c. Potom rovnica (a) je oscilatorická.

D ô k a z tejto vety vyplýva z hlavnej vety v práci [4] na str. 339 a dôsledku 3 z vety 3.

Príkladom funkcie, ktorá vyhovuje podmienke (3) z predchádzajúcej vety je $x^2 \sin x$. Zoberme postupnosť intervalov $\langle\pi, 2\pi\rangle$, $\langle 3\pi, 4\pi\rangle, \dots, \langle(2n - 1)\pi, 2n\pi\rangle, \dots$, nech $2n_k\pi \leqq T < 2(n_k + 1)\pi$, potom platí:

$$\int_0^T \exp\{2\int_0^x\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - cx\}\mathrm{d}x = \int_0^T \exp\{-2x^2 \sin x - 8x\cos x + 12 \sin x - 2x -$$
$$-cx\}\mathrm{d}x \geqq \int_0^T \exp\{-2x^2 \sin x + c_1x + c_2\}\mathrm{d}x \geqq \sum_{n=1}^{n_k} \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \exp\{-2x^2 \sin x + c_1x + c_2\}\mathrm{d}x,$$

kde $c_1 = -2 - c - 8$, $c_2 = -12$, c je ľubovoľná konštanta. Z vlastnosti funkcie $-2x^2 \sin x + c_1x + c_2$ vyplýva, že počnúc určitým N, môžeme z postupnosti $\langle(2N - 1)\pi, 2N\pi\rangle$, $\langle(2N + 1)\pi, 2(N + 1)\pi\rangle, \dots$ vybrať podintervaly konštantnej dĺžky d, na ktorých je $-2x^2 \sin x + c_1x + c_2 > M^2$, $M^2 > 0$ je vhodná konštanta. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{n_k} \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \exp\{-2x^2 \sin x + c_1x + c_2\}\mathrm{d}x \geqq \sum_{n=N}^{n_k} e^{M^2} \,.\, d \to \infty \quad \text{pre} \quad T \to \infty.$$

Podobne pre funkciu $-f(x)$ dostaneme

$$\int_0^T \exp\{-2\int_0^x\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - cx\}\mathrm{d}x \geqq \int_0^T \exp\{2x^2\sin x + k_1x + k_2\}\mathrm{d}x \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=1}^{n_k}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \exp\{2x^2\sin x + k_1x + k_2\}\mathrm{d}x \geqq \sum_{n=N}^{n_k} \mathrm{e}^{M^2}\,.\,d \to \infty \quad \text{pre} \quad T\to\infty\,.$$

Z tohto postupu je vidieť, že tiež funkcie $x^k \sin x$, $x^k \cos x$, $k > 1$ vyhovujú podmienkam predchádzajúcej vety.

Na záver tejto práce uvedieme ešte niektoré vlastnosti obecnejšej rovnice

$$(b) \qquad y'' + p(x)|y'| + q(x)|y| = 0\,,$$

kde je $p(x) \in C_1(a, b)$, $q(x) \in C_0(a, b)$.

Ak je $q(x) < 0$ ($q(x) > 0$), potom z rovnice (b) plynie, že každý stacionárny bod riešenia tejto rovnice je bodom minima (maxima). Z toho plynie, že každé riešenie rovnice (b) má na intervale (a, b) najviac dva nulové body.

Veta 7. *Nech na celom intervale (a, b) platí niektorý z nasledujúcich prípadov*

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & p(x) > 0, & q(x) < 0, & \frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) + q(x) \geqq 0,\\
\text{b)} & p(x) > 0, & q(x) < 0, & -\frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) - q(x) \leqq 0,\\
\text{c)} & p(x) < 0, & q(x) > 0, & -\frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) + q(x) \leqq 0,\\
\text{d)} & p(x) < 0, & q(x) > 0, & \frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) - q(x) \geqq 0.
\end{array}$$

Potom každé netriviálne riešenie rovnice (b) má na intervale (a, b) najviac jeden nulový bod.

Dôkaz. Vetu dokážeme iba v prípade a), v ďalších prípadoch sa veta dokáže analogicky. Nech x_0 je nulový bod riešenia $y(x) \not\equiv 0$ rovnice (b) a nech je $y'(x_0) > 0$. Dokážeme, že napravo od bodu x_0 je $y'(x) > 0$, t. j. $y(x)$ nemôže mať napravo od tohto bodu nulový bod. Predpokladajme opak, t. j. existuje bod x_1, že platí $y'(x_1) = 0$. Potom v intervale $\langle x_0, x_1\rangle$ riešenie $y(x)$ vyhovuje aj rovnici $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Potom súčin $\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\,.\,y(x)\,.\,y'(x)$ v intervale $(x_0, x_1\rangle$ rastie ([2], str. 164). Pretože je $y(x) > 0$ v $(x_0, x_1\rangle$, je v tomto intervale i $y'(x) > 0$, čo je spor s tvrdením, že je $y'(x_1) = 0$.

Ukážeme tiež, že ani vľavo od bodu x_0 neexistuje nulový bod riešenia $y(x)$, naviac, že je $y'(x) > 0$ pre $a < x < x_0$. Dokážeme to nepriamo. Nech jestvuje bod $x_2 < x_0$, v ktorom je $y'(x_2) = 0$. Pretože v intervale $\langle x_2, x_0\rangle$ je $y(x) \leqq 0$, vyhovuje $y(x)$ aj rovnici $y'' + p(x)y' - q(x)y = 0$. Substitúciou $y(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s\}\,.\,z(x)$ prejde táto rovnica v rovnicu

$$z'' - (\tfrac{1}{4}p^2(x) + \tfrac{1}{2}p'(x) + q(x))z = 0\,.$$

V intervale $\langle x_2, x_0\rangle$ je $y(x) \leqq 0$, teda je i $z(x) \leqq 0$. Potom z predchádzajúcej rovnice plynie, že je $z''(x) \leqq 0$, teda $z'(x)$ nerastie v tomto intervale. Medzi $y'(x)$, $z'(x)$ platí vzťah

$$y'(x) = z'(x) \exp\{-\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s\} - \tfrac{1}{2}p(x)z(x) \exp\{-\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s\}.$$

Z neho vyplýva, že $z'(x_0) = y'(x_0) > 0$. V intervale $\langle x_2, x_0\rangle$ je teda $z'(x) > 0$, $z(x) < 0$, $p(x) \geqq 0$. Preto z toho vzťahu vyplýva, že aj $y'(x) > 0$ v $\langle x_2, x_0\rangle$, čo je v spore s predpokladom, že je $y'(x_2) = 0$.

Na začiatku dôkazu sme predpokladali, že je $y'(x_0) > 0$. Je treba ešte urobiť dôkaz, keď je $y'(x_0) < 0$. V tômto prípade dá sa však dôkaz previesť na predchádzajúci prípad. Ak by existovalo riešenie, ktoré by malo dva nulové body x_0, x_1, potom by bolo $y'(x_1) > 0$. Avšak podľa predchádzajúceho dôkazu toto riešenie napravo ani naľavo od bodu x_1 nemá nulový bod, nemôže teda platiť $y(x_0) = 0$.

Dôsledok. *Nech na intervale* (a, b) *platí niektorý z nasledujúcich prípadov*

$$\begin{array}{lll}
\text{a}') & p(x) \geqq 0, & \tfrac{1}{4}p^2(x) + \tfrac{1}{2}p'(x) + q(x) \geqq 0,\\
\text{b}') & p(x) \geqq 0, & -\tfrac{1}{4}p^2(x) + \tfrac{1}{2}p'(x) - q(x) \leqq 0,\\
\text{c}') & p(x) \leqq 0, & \text{a}-\tfrac{1}{4}p^2(x) + \tfrac{1}{2}p'(x) + q(x) \leqq 0,\\
\text{d}') & p(x) \leqq 0, & \tfrac{1}{4}p^2(x) + \tfrac{1}{2}p'(x) - q(x) \geqq 0.
\end{array}$$

Potom každé riešenie rovnice (b) *má najviac dva nulové body na intervale* (a, b).

Dokážeme to v prípade a'). Nech x_0 je nulový bod riešenia $y(x)$ a nech je $y'(x_0) > 0$. V dôkaze vety 7 sme ukázali, že toto riešenie za predpokladu $\frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) + q(x) \geqq 0$, $p(x) > 0$ nemá vľavo od bodu x_0 nulový bod. (Ľahko sa presvedčíme, že to platí aj vtedy, keď je $p(x) \geqq 0$.) Z toho však vyplýva, že riešenie $y(x)$ môže mať najviac dva nulové body. Skutočne, ak by existovali tri nulové body $x_0 < x_1 < x_2$, potom by bolo $y'(x_2) > 0$. Pravda, z vyššie uvedeného plynie, že ak je $y'(x_2) > 0$, $y(x_2) = 0$, potom je $y(x) \neq 0$ pre $x < x_2$, nemôže teda byť $y(x_1) = 0$. Podobne sa to ukáže aj v tom prípade, keď predpokladáme, že je $y'(x_0) < 0$. Ostatné prípady sa dokážu analogicky.

LITERATÚRA

[1] Hartman P., *Ordinary differential Equations*, New York 1964.

[2] Сансоне Ж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Москва 1953.

[3] Haupt O., *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Mathematische Zeitschrift *48* (1942/1943), 289—293.

[4] Ráb M., *Kriterien für die Oszilation der Lösungen der Differentialgleichung* $[p(x)y']' + q(x)y = 0$, Časopis pro pěstování matematiky *84* (1959), 335—370.
Došlo 13. 2. 1967.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie,
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Bratislava

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + f(x)\,|y| = 0$

Йозеф Ровдер

Резюме

В работе исследуются колебательные свойства решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + f(x)\,|y| = 0. \tag{a}$$

$f(x) \in C_0(a, b)$. Прежде всего доказано, что решение уравнения существует в целом интервале (a, b). В теореме 2 доказывается, что все интегралы будут колеблющимися, или все будут неколеблющимися. В дальнейшем показана связь между уравнением (a) и линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и доказаны некоторые достаточные условия, чтобы все интегралы уравнения (a) были колеблющимися.

В последнем абзаце работы доказаны достаточные условия того, что все решения уравнения

$$y'' + p(x)\,|y'| + q(x)\,|y| = 0,$$

$p(x) \in C_1(a, b)$, $q(x) \in C_0(a, b)$, имеют один или два нуля.