František Machala

Bemerkungen zu einem Satz von L. A. Skornjakov über projektive Abbildung von Moduln

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 4, 301--306

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126564`

Mat. Čas. 24, 1974, No 4, 301—306

BEMERKUNGEN ZU EINEM SATZ VON L. A. SKORNJAKOV ÜBER PROJEKTIVE ABBILDUNG VON MODULN

FRANTIŠEK MACHALA

Im Artikel [3] verallgemeinerte L. A. Skornjakov den von R. Baer in [1] geführten Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie. Bevor wir an die Formulierung des von L. A. Skornjakov erzielten Ergebnisses herantreten, führen wir einige notwendige Begriffe ein, wobei die in [3] angewandte Bezeichnungsweise beachtet wird.

Es sei F ein assoziativer Ring mit Einselement. Der linke unitäre F-Modul A wird kurz mit (F, A) bezeichnet. Jedes Element $a \in A$ generiert einen monogenen Untermodul Fa. Ein Annullator $\mathcal{A}(M)$ einer Untermenge M vom Modul (F, A) ist die Menge der Elemente $\alpha \in F$, für die $\alpha M = o$ gilt. Wenn $\mathcal{A}(x) = o$ gilt, so ist x das freie Element im Modul A. Die Menge der Untermoduln vom Modul A ist teilweise geordnet bezüglich der Inklusion, die wir mit dem Symbol $\leqq$ bezeichnen. Wenn auf dieser Menge in üblicher Weise die Operationen $\cap$, $+$ des Durchschnittes und der Vereinigung eingeführt werden, so erhalten wir einen Verband, den wir mit $\bar{A}$ bezeichnen.

Der Modul (F, A) heisst *zulässig*, wenn folgende zwei Forderungen erfüllt sind:

M 1. Wenn beliebige Elemente $x, y, z \in A$ gewählt werden, so besteht ein freies Element $w \in A$ derart, dass $(Fx + Fy + Fz) \cap Fw = o$.

M 2. Seien $x, y, u \in A$ freie Elemente und t ein beliebiges Element von A so, dass $Fx \cap Fy \neq o$, $Fu \cap Ft \neq o$. Dann existiert ein freies Element $w \in A$ derart, dass $Fw \cap Ft = Fw \cap Fy = Fw \cap Fx = Fw \cap Fu = o$.

Es seien Moduln (F, A), (G, B) gegeben. Ein Isomorphismus $*$ von Verbänden $\bar{A}$, $\bar{B}$ heisst *projektive Abbildung* von Moduln A, B, wenn folgende Bedingungen gelten:

P 1. Zu jedem Element $m \in A$ existiert ein $n \in B$ derart, dass $(Fm)^* = Gn$ ist.

P 2. Zu jedem Element $n \in B$ existiert ein $m \in A$ derart, dass $(Fm)^* = Gn$ ist.

P 3. Es existieren freie Elemente $u \in A$, $v \in B$ derart, dass $(Fu)^* = Gv$ gilt

Eine halblineare Abbildung von Moduln (F, A), (G, B) ist ein Paar (μ', μ), wo μ' ein Isomorphismus der Ringe F, G und μ ein Isomorphismus der additiven Gruppen von Moduln A, B ist. Dabei gilt $(\alpha x)\mu = \alpha^{\mu'} x^{\mu}$ für alle Elemente $\alpha \in F$, $x \in A$.

In der Arbeit [3] wurde das nachstehende Theorem bewiesen:

Theorem 1. *Sei F ein assoziativer Ring mit Einselement 1 mit folgender Eigenschaft* (P):*Gilt $\alpha\beta = 1$ für Elemente $\alpha, \beta \in F$, so besteht ein Element $\gamma \in F$ derart, dass $\gamma\alpha = 1$ ist.*

Jede projektive Abbildung eines zulässigen Moduls (F, A) auf den Modul (G, B) ist durch eine halblineare Abbildung von Moduln (F, A), (G, B) induziert.

Im folgenden werden wir uns mit einigen Verschärfungen des Theorems 1 befassen:

1. L. A. Skornjakov stellte im Abschluss der Arbeit [3] in Frage, ob die Voraussetzung (P) im Theorem 1 notwendig ist. Weiter unten wird gezeigt, dass Theorem 1 ohne die Voraussetzung (P) gilt.

2. Es wird eine Modifikation des Theorems 1 für einen allgemeineren Fall der sogenannten relativ zulässigen Moduln vollzogen. (Theorem 2)

zu 1) Die Voraussetzung (P) wurde nur im Teil a) im Beweis des Theorems in [3] verwendet:

a) *Es sei $*$ eine projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B). Wählen wir ein freies Element $x \in A$ und ein beliebiges Element $y \in A$, für die $Fx \cap \cap Fy = o$ gilt. Sei weiter vorausgesetzt, dass $(Fx)^* = Gx'$, wo $x' \in B$ ein freies Element in B ist. Dann existiert ein einziges Element $y' = h(x, x', y) \in B$, für welches $(Fy)^* = Gy'$, $[F(x - y)]^* = G(x' - y')$. Falls y ein freies Element in A ist, ist y' ein solches in B.*

Beweisen wir eine in gewisser Richtung allgemeinere Behauptung:

a′) *Es seien Elemente $x, y \in A$ derart gegeben, dass $Fx \cap Fy = o$, $\mathscr{A}(x) \leqq \mathscr{A}(y)$ gilt, wo $\mathscr{A}(x)$, $\mathscr{A}(y)$ die Annullatoren von Elementen x, y sind und sei $(Fx)^* = Gx'$ gesetzt. Es existiert ein einziges Element $y' = h(x, x', y) \in B$ derart, dass $(Fy)^* = Gy'$, $[F(x - y)]^* = G(x' - y')$. Hierbei gilt $\mathscr{A}(x') \leqq \mathscr{A}(y')$.*

Beweis. Es sei $m \in Fy \cap F(x - y)$. Dann existieren $\alpha, \beta \in F$ derart, dass $m = \alpha y = \beta(x - y)$. Hieraus erhalten wir $\beta x - (\alpha + \beta)y = o$, denn es ist $Fx \cap Fy = o$. Es gilt somit $\beta \in \mathscr{A}(x)$ und nach Voraussetzung des Satzes auch $\beta \in \mathscr{A}(y)$, also $\beta x = \beta y = o$. Daraus ergibt sich $m = o$ und es gilt

$$Fy \cap F(x - y) = o. \tag{1}$$

Da $*$ eine projektive Abbildung ist, existieren nach P 1 die Elemente $z, t \in B$ derart, dass $(Fy)^* = Gz$, $[F(x - y)]^* = Gt$. Zufolge $F(x - y) \leqq Fx + Fy$

ist auch $[F(x+y)]^* \leqq (Fx)^* + (Fy)^*$ und hieraus folgt $Gt \leqq Gx' + Gz$. Es existieren also Elemente $c \in Gx'$, $d \in Gz$ derart, dass $t = c + d$ ist. Aus (1) erhalten wir $(Fy)^* \cap [F(x-y)]^* = o$, folglich $Gz \cap Gt = o$ und es gilt deshalb auch $Gd \cap Gt = o$. Wählen wir ein beliebiges Element $\alpha \in \mathscr{A}(c)$. Dann gilt $\alpha c = \alpha t - \alpha d = o$, also $\alpha t = \alpha d$. Dies bedeutet, dass $\alpha d = o$ und es gilt daher $\alpha \in \mathscr{A}(d)$. Wir erhalten die Beziehung

(2) $$\mathscr{A}(c) \leq \mathscr{A}(d).$$

Sei nun angenommen, dass $Gc < Gx'$ ist. Wenn $S^* = Gc$ gilt, so ist $S < Fx$ und mithin $x \notin S$. Wegen $Gt \leqq Gc + Gd$ gilt $F(x-y) \leqq S + Fy$ und es bestehen daher Elemente $s \in S$, $\lambda \in F$ derart, dass $x - y = s + \lambda y$. Hiervon ergibt sich $x - s = (\lambda + 1)y \in Fx \cap Fy = o$. Folglich ist $x = s$ und $x \in S$, was jedoch ein Widerspruch ist. Es gilt somit $Gc = Gx'$. Auf analogem Wege wird gezeigt, dass $Gd = Gz$. Es besteht also ein Element $\alpha \in G$, für welches $x' = \alpha c$ gilt und zugleich ein Element $\beta \in G$ derart, dass $c = \beta x'$. Hieraus folgt $c = \beta\alpha c$ und $1 - \beta\alpha \in \mathscr{A}(c)$. Nach (2) gilt dann $1 - \beta\alpha \in \mathscr{A}(d)$ und $d = \beta\alpha d$. Setzen wir $y' = -\alpha d$. Dann ist $d = -\beta y'$ und aus beiden letzten Gleichungen folgt schliesslich $Gy' = Gd = Gz = (Fy)^*$. Es gilt offensichtlich $G(\alpha t) \leq Gt$. Zufolge $c = \beta\alpha c$, $d = \beta\alpha d$ erhalten wir $t = c + d = \beta\alpha(c + d) = \beta(\alpha t)$ und daher $G(\alpha t) = Gt$. Hiernach gilt $G(x' - y') = G(\alpha c + \alpha d) = G(\alpha t) = Gt = [F(x-y)]^*$.

Es sei $y'' \in B$ ein beliebiges Element, für das $(Fy)^* = Gy''$, $[F(x-y)]^* = G(x' - y'')$ gilt, wobei stets $(Fx)^* = Gx'$ ist. Danach erhält man $Gy'' = Gd$, $G(x' - y'') = Gt = G(c + d)$ und $Gx' = Gc$. Es existieren folglich Elemente $\xi, \eta \in G$ derart, dass $y'' = \xi d$, $x' = \eta c$. Aus der Beziehung $x' - y'' \in G(c + d)$ folgt, dass in G ein Element γ derart existiert, dass die Gleichung $\eta c - \xi d = \gamma c + \gamma d$ erfüllt ist. Hieraus erhält man $(\eta - \gamma)c - (\xi + \gamma)d = o$, denn aus der Beziehung $Fx \cap Fy = o$ folgt $Gc \cap Gd = o$. Es gilt somit $x' = \eta c = \gamma c$, $y'' = \xi d = -\gamma d$. Wenn $\varrho \in \mathscr{A}(x')$ ist, so gilt $\varrho x' = \varrho\gamma c = o$ und daher $\varrho\gamma \in \mathscr{A}(c)$. Nach (2) ist $\varrho\gamma \in \mathscr{A}(d)$ und es gilt daher $-\varrho\gamma d = \varrho y'' = o$, also $\varrho \in \mathscr{A}(y'')$. Hiernach erhalten wir die Beziehung

(3) $$\mathscr{A}(x') \leq \mathscr{A}(y'').$$

Für das Element y'' gilt ferner $Gy' = Gy''$, $G(x' - y'') = G(x' - y')$ und es existieren Elemente $\alpha, \beta \in G$ für die

(4) $$y' = \alpha y'', \quad x' - y' = \beta(x' - y'')$$

gilt. Hiervon erhält man, wegen $Gx' \cap Gy'' = o$, die Gleichungen $(\beta - 1)x' = \beta y'' - y' = (\beta - \alpha)y'' = o$. Deswegen ist $\beta - 1 \in \mathscr{A}(x')$ und nach (3) ist auch $\beta - 1 \in \mathscr{A}(y'')$, also $x' = \beta x'$, $y'' = \beta y''$. Die zweite Beziehung in (4) erhält somit die Form $x' - y' = x' - y''$ und daraus folgt $y'' = y'$. Nach (3) gilt $\mathscr{A}(x') \leqq \mathscr{A}(y')$. Somit ist der Beweis beendet.

Verallgemeinern wir nun noch einigermassen die Behauptung b) aus:

b') *Es seien Elemente $x, y \in A$ gegeben, für die $Fx \cap Fy = o$, $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(y)$. Dann gilt $y' = h(x, x', y)$ genau dann, wenn $x' = h(y, y', x)$ ist.*

Beweis. Da $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(y)$ gilt, ist nach a') Element $y' = h(x, x', y)$ eindeutig bestimmt, wo $(Fx)^* = Gx'$, $[F(x - y)]^* = G(x' - y')$ ist. Analog wird das Element $x'' = h(y, y', x)$ bestimmt, so dass $(Fx)^* = Gx' = Gx''$, $[F(y - x)]^* = [F(x - y)]^* = G(y' - x'') = G(x' - y')$ gilt. Nach a') bedeutet dies allerdings, dass $x'' = x'$ und es gilt mithin $x' = h(y, y', x)$. Analog beweist man die Gültigkeit unserer Behauptung in umgekehrter Richtung.

Aus a'), b') ergibt sich schon unschwer die Behauptung a). Da für das freie Element $x \in A$ $\mathscr{A}(x) = o$ gilt, ist dann $\mathscr{A}(x) \leqq \mathscr{A}(y)$ für jedes Element $y \in A$. Der erste Teil der Behauptung a) ist daher eine Spezialisierung von a'). Wenn $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(y)$ ist, dann geht aus den Sätzen a'), b') die Gleichung $\mathscr{A}(x') = \mathscr{A}(y')$ hervor. Sind $x, y \in A$ freie Elemente und ist $x' \in B$ auch ein freies Element, dann gilt $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(y) = o$ und zugleich $\mathscr{A}(x') = \mathscr{A}(y') = o$, d. h. $y' \in B$ ist ein freies Element. Die Behauptung a) wurde somit ohne Benutzung der Eigenschaft (P) bewiesen. Theorem 1 gilt demnach für alle assoziativen Ringe F mit Einselement.

zu 2) Ein Element $x \in (F, A)$ wird **relativ frei** genannt genau dann, wenn $\mathscr{A}(x) \leqq \mathscr{A}(y)$ für alle Elemente $y \in A$ gilt. Offensichtlich gilt dann $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(A)$, worin $\mathscr{A}(A)$ ein Annullator des Moduls A ist. Nach [2] ist $\mathscr{A}(A)$ ein zweiseitiges Ideal im Ringe F. Ein Modul (F, A), der den Bedingungen M 1, M 2 genügt, wo freie Elemente durch die relativ freien ersetzt werden, wird ein **relativ zulässiger** Modul genannt. Jedes freie Element ist zugleich relativ freie und jeder zulässige Modul ist relativ zulässig.

Betrachten wir einen Restklassenring $F_A = F/\mathscr{A}(A)$ und setzen wir $\bar{\alpha} = \alpha + \mathscr{A}(A)$, $\alpha \in F$. Für Elemente $\alpha, \beta \in F$ gilt $\alpha x = \beta x$ für jedes $x \in A$ genau dann, wenn $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Auf der additiven Gruppe vom Modul (F, A) lässt sich eine Struktur vom F_A — Modul durch die Vorschrift $\bar{\alpha} x = \alpha x$ einführen. Betrachten wir die Abbildung $\varkappa : \alpha x \to \bar{\alpha} x$ vom Modul (F, A) auf den Modul (F_A, A). Es gilt dabei $(Fx)^\varkappa = F_A x$ und $x^\varkappa = 1x$. Wenn ein Element $x \in (F, A)$ relativ frei ist, so gilt $\bar{\gamma} x^\varkappa = o$ genau dann, wenn $\bar{\gamma} = o$ ist. Dann ist das Element $x^\varkappa \in (F_A, A)$ frei. Wenn der Modul (F, A) relativ zulässig ist, dann ist der Modul (F_A, A) zulässig. Bezeichnen wir mit $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ Verbände der Untermoduln von Moduln (F, A), (F_A, A). Die durch die Vorschrift $S^\eta = S^\varkappa$, $S \in \bar{A}$ definierte Abbildung η ist ein Isomorphismus von diesen Verbänden.

Wir wollen nun einen weiteren Modul (G, B) betrachten und für ihn eine analoge Bezeichnungweise wie für den Modul (F, A) verwenden: $\varkappa$ bezeichnet die entsprechende Abbildung vom Modul (G, B) auf den Modul (G_B, B) und η' einen Isomorphismus von Verbänden $\overline{B}, \overline{\overline{B}}$, wo $U^{\eta'} = U^{\varkappa'}$ für $U \in \overline{B}$.

Ein Isomorphismus von Verbänden $\overline{A}, \overline{B}$, der den Bedingungen P 1—P 3 genügt, wo freie Elemente in P 3 durch die relativ freien ersetzt sind, wird eine **relativ projektive Abbildung** von Moduln (F, A), (G, B) genannt.

Wenn ξ eine relativ projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B) ist, dann ist die durch die Vorschrift

$$(S^{\eta})^{\mu} = (S^{\xi})^{\eta'}, \quad S \in \overline{A} \tag{5}$$

definierte Abbildung μ eine projektive Abbildung von Moduln (F_A, A), (G_B, B): Da ξ ein Isomorphismus von Verbänden $\overline{A}, \overline{B}$ ist, ist μ offensichtlich ein Isomorphismus von Verbänden $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}$. Es bleibt noch zu beweisen, dass μ den Bedingungen P 1—P 3 genügt.

P 1. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in A$. Da ξ eine relativ projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B) ist, besteht ein Element $b \in B$ derart, dass $(Fa)^{\xi} = Gb$. Es gilt weiter $F_A a = (Fa)^{\varkappa} = (Fa)^{\eta}$. Nach (5) ist $(F_A a)^{\mu} = ((Fa)^{\eta})^{\mu} = (Gb)^{\eta'} = (Gb)^{\varkappa'} = G_B b$.

P 2. Wählen wir ein beliebiges Element $b \in B$. Es existiert ein Element $a \in A$ derart, dass $(Fa)^{\xi} = Gb$ ist. Dann gilt $(F_A a)^{\mu} = G_B b$.

P 3. Es bestehen relativ freie Elemente $u \in A$, $v \in B$ derart, dass $(Fu)^{\xi} = Gv$ gilt. Dann sind die Elemente $u^{\varkappa}$, $v^{\varkappa'}$ frei und es gilt $(F_A u)^{\mu} = ((Fu)^{\eta})^{\mu} = (Gv)^{\eta'} = G_B v$. Daraus ergibt sich $(F_A u^{\varkappa})^{\mu} = G_B v^{\varkappa'}$.

Entsprechend gilt auch die Umkehrung: Ist μ eine projektive Abbildung von Moduln (F_A, A), (G_B, B), dann ist die durch die Vorschrift

$$(U^{\eta^{-1}})^{\xi} = (U^{\mu})^{\eta'^{-1}}, \quad U \in \overline{\overline{A}} \tag{6}$$

bestimmte Abbildung ξ, eine relativ projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B).

Jede halblineare Abbildung σ von Moduln (F_A, A), (G_B, B) induziert eine projektive Abbildung μ dieser Moduln durch die Vorschrift: $U^{\mu} = U^{\sigma}$, $U \in \overline{\overline{A}}$ (vgl. [3]). Nach (6) ist die Abbildung $\xi : (U^{\eta^{-1}})^{\xi} = (U^{\mu})^{\eta'^{-1}}$ eine relativ projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B). In diesem Fall werden wir behaupten, dass auch ξ durch die halblineare Abbildung σ von Moduln (F_A, A), (G_B, B) induziert ist. Sei nun (F, A) ein relativ zulässiger Modul und ξ eine relativ projektive Abbildung von Moduln (F, A), (G, B). Betrachten wir die nach (5) und durch ξ erklärte projektive Abbildung μ von Moduln (F_A, A), (G_B, B). Da der Modul (F_A, A) zulässig ist, ist nach Theorem 1 die Abbildung μ durch eine halblineare Abbildung σ von Moduln (F_A, A), (G_B, B) induziert, also gilt $(S^{\eta})^{\sigma} = (S^{\xi})^{\eta'}$, $S \in \overline{A}$. Wird $S^{\eta} = U$ gesetzt, so erhält man $(U^{\sigma})^{\eta'^{-1}} = (U^{\eta^{-1}})^{\xi}$ und die Abbildung ξ ist dann durch die halblineare Abbildung σ induziert. Hieraus ergibt sich

Theorem 2. *Sei F ein assoziativer Ring mit Einselement. Jede relativ projektive Abbildung von einem relativ zulässigen Modul (F, A) auf einen Modul (G, B) wird durch eine halblineare Abbildung von Moduln (F_A, A), (G_B, B) induziert.*

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir einen vollständig reduziblen Modul. Es gebe ein maximales Linksideal $\mathscr{H}$ im Ringe F mit Einselement, das zugleich ein zweiseitiges Ideal ist. Sei nun im Ringe F in natürlicher Weise die Struktur des Linksmoduls F_e eingeführt. Dann ist der Faktormodul $F_e/\mathscr{H}$ einfach. Sei weiter vorausgesetzt, dass der Modul (F, A) eine direkte Summe von Moduln ist, die alle mit dem Modul $F_e/\mathscr{H}$ isomorph sind. Dann ist $\mathscr{A}(x) = \mathscr{H}$ für jedes Element $x \neq o \in (F, A)$ und es gilt daher $\mathscr{A}(A) = \mathscr{H}$. Jedes Element $x \neq o \in (F, A)$ ist relativ frei. Der Modul (F_A, A) ist ein Vektorraum, denn nach [2] ist der Ring F_A ein Körper. Besitzt der Modul (F, A) vier unabhängige monogene Teilmoduln, dann ist er relativ zulässig. Jede relativ projektive Abbildung vom Modul (F, A) auf einen Vektorraum V ist dann durch eine halblineare Abbildung der Vektorräume (F_A, A), V induziert.

LITERATUR

[1] BAER, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952.

[2] БУРБАКИ, Н.: Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Москва 1962.

[3] СКОРНЯКОВ, Л. А.: Проективное отображение модулей. Известия АН, 24 (1960), № 4, 511–520.

Eingegangen am 8. 10. 1971

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecké fakulty University Palackého
Leninova 26
771 46 Olomouc