Matematický časopis

Viera Zat'ková

Частичные плоскости и парные системы

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 4, 325--342

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126563

Mat. Čas. 24, 1974, No 4, 325—342

ЧАСТИЧНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ПАРНЫЕ СИСТЕМЫ

ВЕРА ЗАТЬКОВА (VIERA ZAŤKOVÁ)

Введение

В этой статье частичной плоскостью разумеется всякая тройка $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$, где $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$ являются множествами и I — бинарное отношение в $\mathscr{P} \cup \mathscr{L}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

(1) $$AIa \Rightarrow A \in \mathscr{P}, \quad a \in \mathscr{L} \quad (\text{или } I \subseteq \mathscr{P} \times \mathscr{L})$$

(2) $$A_i I a_k \quad \forall\, i, k = 1, 2 \Rightarrow A_1 = A_2 \lor a_1 = a_2.$$

Элементы множества $\mathscr{P}$ называются точками, элементы множества $\mathscr{L}$ прямыми частичной плоскости $\mathscr{I}$ и отношение I — инциденцией.

Запись AIa читают: „точка A инцидентна прямой a". Мы будем пользоваться также следующими синонимами этого бинарного отношения: „точка A лежит на прямой a", „точка A принадлежит прямой a", „прямая a содержит точку A", „прямая a проходит через точку A".

Частичная плоскость $\mathscr{I}_1 = (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, I_1)$ называется надплоскостью частичной плоскости $\mathscr{I}_2 = (\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, I_2)$ и $\mathscr{I}_2$ подплоскостью частичной плоскости $\mathscr{I}_1$ тогда, если $\mathscr{P}_2 \subseteq \mathscr{P}_1$, $\mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1$ и $I_2 \subseteq I_1$.

Если в частичной плоскости $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ заменить множества $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$ между собой и бинарное отношение I заменить отношением I^{-1} $(xI^{-1}Y :\Leftrightarrow YIx)$, то получаем частичную плоскость $(\mathscr{L}, \mathscr{P}, I^{-1})$, которую будем называть двойственной частичной плоскости $\mathscr{I}$ и обозначать её $\mathscr{I}^*$.

Изоморфизмом частичной плоскости $\mathscr{I}_1 = (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, I_1)$ на частичную плоскость $\mathscr{I}_2 = (\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, I_2)$ называется пара (φ, λ) биективных отображений $\varphi : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$, $\lambda : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$, удовлетворяющих условию

(3) $$\forall\, A \in \mathscr{P}_1 \quad \forall\, a \in \mathscr{L}_1 \quad AI_1a \Leftrightarrow A^\varphi I_2 a^\lambda.$$

Легко можно убедиться, что верна следующая.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — частичная плоскость, $\mathscr{P}'$, $\mathscr{L}'$ — множества, для которых справедливо:* $\operatorname{card} \mathscr{P}' = \operatorname{card} \mathscr{P}$, $\operatorname{card} \mathscr{L}' = \operatorname{card} \mathscr{L}$, $\alpha : \mathscr{P}' \to \mathscr{P}$, $\beta : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ *— биективные отображения и* I'

бинарное отношение в $\mathscr{P}' \cup \mathscr{L}'$, *которое определено следующим образом*

$$(4) \qquad \forall A \in \mathscr{P}' \quad \forall a \in \mathscr{L}' \quad AI'a :\Leftrightarrow A^{\alpha} I a^{\beta}.$$

Тогда $\mathscr{G}(\mathscr{I}, \alpha, \beta) := (\mathscr{P}', \mathscr{L}', I')$ *является частичной плоскостью изоморфной плоскости* $\mathscr{I}$.

Изоморфизм частичной плоскости $\mathscr{I}$ на себя называется коллинеацией частичной плоскости $\mathscr{I}$. Двойственностью частичной плоскости $\mathscr{I}$ разумеется изоморфизм $\mathscr{I}$ на $\mathscr{I}^*$. Частичную плоскость, для которой существует по крайней мере одна двойственность, называют автодвойственной. Очевидно, что у автодвойственной частичной плоскости $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ должно быть $\operatorname{card} \mathscr{P} = \operatorname{card} \mathscr{L}$.

Частичная плоскость называется замкнутой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$(5) \qquad \forall a \in \mathscr{L} \quad \operatorname{card} \{A \in \mathscr{P} \mid AIa\} \geq 3,$$

$$(6) \qquad \forall A \in \mathscr{P} \quad \operatorname{card} \{a \in \mathscr{L} \mid AIa\} \geq 3.$$

Плоскостью называется частичная плоскость, которая обладает следующими двумя свойствами:

$$(7) \qquad \forall \{A, B\} \subseteq \mathscr{P} \quad \exists\, l \in \mathscr{L} \quad A, BIl \ ^{1)}$$

(Следовательно, через каждые две различные точки плоскости проходит одна и только одна прямая.)

$$(8) \qquad \forall \{a, b\} \subseteq \mathscr{L} \quad \exists\, P \in \mathscr{P} \quad PIa, b$$

(Следовательно, каждые две различные прямые плоскости имеют одну и только одну общую точку.)

Замкнутая плоскость $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ с непустой инциденцией I называется проективной плоскостью. Легко можно убедиться в том, что плоскость $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ является проективной тогда и только тогда, если в ней существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — некоторая частичная плоскость. В определении частичной плоскости мы не требовали, чтобы множества $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$ были дизъюнктными. Частичная плоскость, в которой это условие выполнено, т. е. в которой $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \emptyset$, называется обыкновенной.

Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ произвольная частичная плоскость. Из теоремы 1 следует, что тройка $\bar{\mathscr{I}} = (\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}}, \bar{I})$, где $\bar{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \times \{1\}$, $\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \times \{2\}$ и $\bar{I}$ — бинарное отношение в $\bar{\mathscr{P}} \cup \bar{\mathscr{L}}$, определено свойством

$$(9) \qquad \forall A \in \mathscr{P} \quad \forall a \in \mathscr{L} \quad (A, 1)\, \bar{I}\, (a, 2) :\Leftrightarrow AIa,$$

---

[1] В этой работе предполагается, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ... $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$

является частичной плоскостью изоморфной частичной плоскости $\mathscr{I}$. Кроме того, очевидно, что частичная плоскость $\mathscr{I}$ обыкновенная. Поэтому можно сказать, что всякая частичная плоскость изоморфна некоторой обыкновенной частичной плоскости. Это значит, что при исследовании частичных плоскостей вполне достаточно, если внимание обращается только на обыкновенные частичные плоскости.

Если $\mathscr{I}_1 = (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, I_1)$, $\mathscr{I}_2 = (\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, I_2)$ две обыкновенные частичные плоскости, то изоморфизм $\mathscr{I}_1$ на $\mathscr{I}_2$ возможно понимать как биективное отображение $\varrho : \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{L}_1 \to \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{L}_2$, обладающее следующими свойствами

$$\mathscr{P}_1^{\varrho} = \mathscr{P}_2 \quad \mathscr{L}_1^{\varrho} = \mathscr{L}_2 \tag{10}$$

$$\forall A \in \mathscr{P}_1 \quad \forall a \in \mathscr{L}_1 \quad AI_1a \Rightarrow A^{\varrho}I_2a^{\varrho} \tag{11}$$

$$\forall B \in \mathscr{P}_2 \quad \forall b \in \mathscr{L}_2 \quad BI_2b \Rightarrow B^{\varrho^{-1}}I_1b^{\varrho^{-1}}. \tag{12}$$

Частичная плоскость $(\mathscr{P}, \mathscr{P}, I)$ называется частичной предплоскостью. Определения подплоскости и изоморфизма двух частичных плоскостей введенные нами раньше, были бы для частичных предплоскостей несколько широки. Так как каждая частичная плоскость, следовательно, и всякая частичная предплоскость изоморфна некоторой обыкновенной частичной плоскости, было бы невозможно без изменения этих определений получить для частичных предплоскостей новую теорию, такую, которая бы не содержалась в общей теории частичных плоскостей. Потому в качестве подплоскости частичной предплоскости $\mathscr{I}$ мы условимся принимать только те подплоскости частичной плоскости $\mathscr{I}$, которые сами являются предплоскостями. Аналогично изоморфизмом двух частичных предплоскостей принять понимать только те пары (φ, λ), которые являются изоморфизмами, если наши предплоскости считаем частичными плоскостями и, более того, выполнено еще условие $\lambda = \varphi$. Конечно, для изоморфизма частичный предплоскости на некоторую общую частичную плоскость будет иметь место первоначальное определение. На основании этих дополнений можно частичную предплоскость $(\mathscr{P}, \mathscr{P}, I)$ обозначить просто как пару $(\mathscr{P}, I)$ и её изоморфизм (φ, φ) одной буквой φ. Следовательно, изоморфизмом частичной предплоскости $(\mathscr{P}_1, I_1)$ на частичную предплоскость $(\mathscr{P}_2, I_2)$ разумеется всякое биективное отображение $\varphi : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$ удовлетворяющее условию:

$$\forall A, B \in \mathscr{P}_1 \quad AI_1B \Leftrightarrow A^{\varphi}I_2B^{\varphi}. \tag{13}$$

Отметим, что если $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \bar{I})$ является обыкновенной частичной плоскостью присоединенной частичной предплоскости $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, I)$ так, как это было описано раньше (смотри отношение (9) и несколько строчек перед ним), то отображение $\alpha : (A, 1) \to (A, 2)$ между множествами $\mathscr{P}$ и $\mathscr{L}$ является биективным т. е. мощность множества прямых обыкновенной частичной плоскости $\mathscr{I}$ равна мощности множества её точек.

Обратное утверждение содержится в следующей теореме, которая является следствием теоремы 1 для $\mathscr{P}' = \mathscr{L}' = \mathscr{P}$, $\alpha = \mathrm{id}\,\mathscr{P}$ и $\beta = \varphi$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — обыкновенная частичная плоскость удовлетворяющая условию:* $\operatorname{card}\mathscr{P} = \operatorname{card}\mathscr{L}$, $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ *биективное отображение и I_φ бинарное отношение в $\mathscr{P}$ определено следующим образом*

$$\forall A, B \in \mathscr{P} \quad AI_\varphi B :\Leftrightarrow AIB^\varphi. \tag{14}$$

Тогда $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \varphi) := (\mathscr{P}, I_\varphi) = (\mathscr{P}, \mathscr{P}, I_\varphi)$ является частичной предплоскостью изоморфной частичной плоскости $\mathscr{I}$.

В работе [2] (Proposition 1.a)) находится следующее следствие теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — частичная плоскость для которой* $\operatorname{card}\mathscr{P} = \operatorname{card}\mathscr{L}$. *Если $\mathscr{S}$ множество, имеющее одну и ту же мощность как множества $\mathscr{P}$ и $\mathscr{L}$, $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{S}$, $\beta : \mathscr{L} \to \mathscr{S}$ суть биективные отображения и $I_{\alpha,\beta}$ бинарное отношение определено в виде:*

$$\forall A, B \in \mathscr{S} \quad AI_{\alpha,\beta}B :\Leftrightarrow A^{\alpha^{-1}}IB^{\beta^{-1}}, \tag{15}$$

то $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \alpha, \beta) := (\mathscr{S}, I_{\alpha,\beta})$ является частичной предплоскостью.

В этих теоремах даны две конструкции частичных предплоскостей. Следующая теорема утверждает, что эти конструкции в определенном направлении являются эквивалентными.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — обыкновенная частичная плоскость, удовлетворяющая условию* $\operatorname{card}\mathscr{L} = \operatorname{card}\mathscr{G}$ *и $\mathscr{S}$ — множество, имеющее одну и ту же мощность как множества $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$. Тогда*

а) для всякой пары биективных отображений $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{S}$, $\beta : \mathscr{L} \to \mathscr{S}$ существует биективное отображение $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ такое, что частичная предплоскость $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \varphi)$ изоморфна частичной предплоскости $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \alpha, \beta)$;

б) для всякого биективного отображения $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ существуют биективные отображения $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{S}$, $\beta : \mathscr{L} \to \mathscr{S}$ такие, что частичная предплоскость $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \alpha, \beta)$ изоморфна частичной предплоскости $\mathscr{F}(\mathscr{I}, \varphi)$.

Это утверждение очевидно, потому что для $\varphi = \alpha\beta^{-1}$ справедливо

$$AI_\varphi B \Leftrightarrow AIB^\varphi \Leftrightarrow (A^\alpha)^{\alpha^{-1}}I(B^\alpha)^{\beta^{-1}} \Leftrightarrow A^\alpha I_{\alpha,\beta}B^\alpha. \tag{16}$$

Двойственность $\varrho = (\varphi, \lambda)$ обыкновенной частичной плоскости $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ называется её полярностью тогда, если $\lambda = \varphi^{-1}$. Если двойственность ϱ понимают как отображение множества $\mathscr{P} \cup \mathscr{L}$ на себя для которого φ является сужением на множество $\mathscr{P}$ и λ сужением на множество $\mathscr{L}$, то ϱ является полярностью тогда и только тогда, когда $\varrho^2 = \mathrm{id}$.

Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — обыкновенная частичная плоскость и $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ некоторое биективное отображение. Легко можно убедиться в том, что пара (φ, φ^{-1}) или же отображение $\varrho : \mathscr{P} \cup \mathscr{L} \to \mathscr{P} \cup \mathscr{L}$, для которого $\varrho|\mathscr{P} = \varphi$ и $\varrho|\mathscr{L} = \varphi^{-1}$ является полярностью частичной плоскости $\mathscr{I}$ тогда и лишь тогда, когда φ удовлетворяет следующему усльвию:

$$(17) \qquad \forall A, B \in \mathscr{P} \quad AIB^{\varphi} \Leftrightarrow BIA^{\varphi}.$$

Обыкновенную частичную плоскость называет автополярной, если существует, по крайней мере, одна её полярность.

Теперь обратим внимание на такие частичные плоскости $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ для которых $\mathscr{I}^* = \mathscr{I}$ т. е.

$$(18) \qquad \mathscr{P} = \mathscr{L}, \quad I^{-1} = I.$$

Эти частичные плоскости называют симметричными. Значит, симметричные частичные плоскости это такие частичные предплоскости, у которых инциденция является отношением симметричным. Таким образом симметричную плоскость можно просто записывать как пару $(\mathscr{P}, I)$ и две симметричные частичные плоскости $(\mathscr{P}_1, I_1)$, $(\mathscr{P}_2, I_2)$ считать изоморфными, если существует такое биективное отображение $\varphi : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$, которое удовлетворяет условию (13).

Следующие теоремы можно по существу найти в работе [1]. Но для того, чтобы лучше увидеть аналогии между частичными плоскостями и парными системами, приводим их с доказательствами.

Теорема 5. *Частичная плоскость $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ является симметричной тогда и только тогда, когда она допускает, по крайней мере, одну коллинеацию, которая является одновременно двойственностью.*

Доказательство. То, что в симметричной частичной плоскости всякая коллинеация является двойственностью, непосредственно вытекает из равенства $\mathscr{I} = \mathscr{I}^*$. Пусть теперь $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — любая частичная плоскость и (φ, λ) ее коллинеация, которая является тоже двойственностью. Тогда

а) $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{\varphi} = \mathscr{L}$

б) $A^{\varphi^{-1}} I a^{\lambda^{-1}} \Leftrightarrow AIa$

ц) $A^{\varphi^{-1}} I a^{\lambda^{-1}} \Leftrightarrow AI^{-1}a$.

Из этих отношений очевидно, что условия (18) удовлетворены т. е. что частичная плоскость $\mathscr{I}$ симметрична.

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ — *обыкновенная частичная плоскость, для которой* $\operatorname{card}\mathcal{P} = \operatorname{card}\mathcal{L}$ *и* $q : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ — *биективное отображение. Тогда частичная предплоскость* $\mathcal{F}(\mathcal{I}, q)$ *является симметричной частичной плоскостью тогда и только тогда, когда* $\varrho = (q, q^{-1})$ — *полярность частичной плоскости* $\mathcal{I}$.

Доказательство. а) Пусть ϱ — полярность частичной плоскости $\mathcal{I}$. Тогда:

$$\forall A, B \in \mathcal{P} \quad AI_qB \Leftrightarrow AIB^q \Leftrightarrow BIA^q \Leftrightarrow BI_qA \Leftrightarrow AI_q^{-1}B$$

т. е. $I_\varphi = I_\varphi^{-1}$. Утверждение, что $\mathcal{F}(\mathcal{I}, q)$ является симметричной частичной плоскостью следует из этого равенства и факта, что $\mathcal{F}(\mathcal{I}, q)$ — частичная предплоскость.

б) Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{I}, q)$ — симметричная частичная плоскость. Тогда I_q симметричное бинарное отношение в множестве $\mathcal{P}$ т. е.

$$\forall A, B \in \mathcal{P} \quad AI_qB \Leftrightarrow BI_qA \text{ или же } AIB^q \Leftrightarrow BIA^q.$$

Так как мы этим способом показали выполнение условия (17) биективным отображением φ, является ϱ полярностью частичной плоскости $\mathcal{F}$.

Следовательно, правило $\mathcal{F}$ присоединяет к всякой обыкновенной автополярной частичной плоскости $\mathcal{I}$ и ее полярности $\varrho = (q, q^{-1})$ симметричную частичную плоскость $\mathcal{F}(\mathcal{I}, q)$. Обратное утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, I)$ — *симметричная частичная плоскость;* $\mathcal{P}'$, $\mathcal{L}'$ *два дизъюнктные множества, для которых* $\operatorname{card}\mathcal{P}' = \operatorname{card}\mathcal{L}' = \operatorname{card}\mathcal{P}$ *и* $\alpha : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$, $\beta : \mathcal{L}' \to \mathcal{P}$ *некоторые биективные отображения. Тогда* $\varrho = (q, q^{-1})$, *где* $q = \alpha\beta^{-1}$ *является полярностью обыкновенной частичной плоскости* $\mathcal{G}(\mathcal{J}, \alpha, \beta) = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ *и симметричная частичная плоскость* $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{J}, \alpha, \beta), q) = (\mathcal{P}', I'q)$ — *изоморфна* $\mathcal{J}$.

Доказательство. Потому что

$$\forall A, B \in \mathcal{P}' \quad AI'B^q \Leftrightarrow A^\alpha IB^{q\beta} \Leftrightarrow A^\alpha IB^\alpha \Leftrightarrow B^\alpha IA^\alpha \Leftrightarrow BI'A^q,$$

является ϱ полярностью обыкновенной частичной плоскости $\mathcal{G}(\mathcal{J}, \alpha, \beta)$ и, следовательно, $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{J}, \alpha, \beta), q)$ в силу теоремы 6 является симметричной частичной плоскостью. Кроме того из отношений

$$\forall A, B \in \mathcal{P}' \quad AI'_qB \Leftrightarrow AI'B^q \Leftrightarrow A^\alpha IB^\alpha$$

очевидно, что отображение α является изоморфизмом симметричной частичной плоскости $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{J}, \alpha, \beta), q)$ на плоскость $\mathcal{J}$.

Другими словами, для всякой симметричной частичной плоскости $\mathcal{J}$ существует обыкновенная автополярная частичная плоскость $\mathcal{I}$ и ее поляриость (q, q^{-1}) такая, что симметричные частичные плоскости $\mathcal{J}$, $\mathcal{F}(\mathcal{J}, q)$ изоморфны.

1. Парные системы

Четверку $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, ., \cap)$, где $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ — некоторые множества и $.$, $\cap$ частичные операции:

$$. : O. \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P} \backslash \operatorname{diag}(\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \to \mathcal{L}$$

$$\cap : O_\cap \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L} \backslash \operatorname{diag}(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \to \mathcal{P}$$

называют парной системой, если удовлетворяет следующим условиям:

PS 1: $(A, B), (C, D) \in O. \quad A . B = C . D \wedge B \neq C \to$

$$(B, C) \in O. \quad A . B = B . C$$

PS 2: $(A, B), (A, C) \in O. \quad A . B \neq A . C \to (A . B, A . C) \in O_\cap$

$$(A . B) \cap (A . C) = A.$$

Из этого определения непосредственно вытекают следующие свойства парных систем:

1) если $(A, B) \in O.$, то $A \neq B$

2) если $(a, b) \in O_\cap$, то $a \neq b$

3) если $(A, B) \in O.$, то $(B, A) \in O. \quad B . A = A . B$.

Парную систему $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, ., \cap)$ называют обыкновенной, если $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

Изоморфизмом парной системы $P_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, ._1, \cap_1)$ на парную систему $P_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, ._2, \cap_2)$ подразумевают любую пару (q, λ) биективных отображений $q : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, $\lambda : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, которая обладает следующими свойствами:

(i) $(A, B) \in O._1 \Leftrightarrow (A^q, B^q) \in O._2 \quad (A ._1 B)^\lambda = A^q ._2 B^q$

(ii) $(a, b) \in O_{\cap 1} \Leftrightarrow (a^\lambda; b^\lambda) \in O_{\cap 2} \quad (a \cap_1 b)^q = a^\lambda \cap_2 b^\lambda$.

Легко можно убедиться в том, что отношение, определенное таким образом, является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Теорема 8. Для всякой парной системы $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, ., \cap)$ существует обыкновенная парная система $\overline{P} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{.}, \overline{\cap})$, которая изоморфна P.

Доказательство. Очевидно, что множества $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \{1\}$, $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \times \{2\}$ дизъюнктны. Если определить частичные операции $\overline{.}$, $\overline{\cap}$ следующим образом:

$$([A, 1], [B, 1]) \in O \quad \Rightarrow (A, B) \in O. \ \ [A, 1] \,.\, [B, 1] \quad\ [A \,.\, B, 2]$$

$$(19) \qquad ([a, 2], [b, 2]) \in O_\cap \Leftrightarrow (a, b) \in O_\cap \ \ [a, 2] \,\bar{\cap}\, [b, 2] \quad\ [a \cap b, 1]$$

получим четверку $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \dot{-}, \bar{\cap})$, которая, как видно из следующего удовлетворяет требованиям PS 1, PS 2 и вследствие того она является парной системой.

PS 1: Если $([A, 1], [B, 1]), ([C, 1], [D, 1]) \in O$. $\ [A, 1] \,.\, [B, 1] \quad [C,\ \ .$ $\dot{-}[D, 1] \quad [B, 1] \neq [C, 1]$, то $(A, B), (C, D) \in O. \quad [A \,.\, B, 2] \quad [C \,.\, D.$ $2] \quad B \neq C \Rightarrow (B, C) \in O. \quad A \,.\, B - B \,.\, C \Rightarrow ([B, 1], [C, 1]) \quad O$ $[A \,.\, B, 2] \quad [B \,.\, C, 2] \Rightarrow ([B, 1], [C, 1]) \in O \quad [A, 1] \,.\, [B, 1$ $[B, 1] \dot{-} [C, 1]$.

PS 2: Пусть $([A, 1], [B, 1]), ([A, 1], [C, 1]) \in O \quad [\ 1, 1] \,.\, [B, 1] \neq [A, 1$ $.\ [C, 1]$.

Тогда $(A, B), (A, C) \in O. \quad [A \,.\, B, 2] \neq [A \,.\, C, 2] \quad (A \,.\, B, A \,.\, C)$ $\in O_\cap \setminus (A \,.\, B) \cap (A \,.\, C) \quad A \Rightarrow ([A \,.\, B, 2], [A \,.\, C, 2]) \in O_\cap \quad [(A \,.\, B)$ $\cap (A \,.\, C), 1] - [A, 1] \Rightarrow ([A \,.\, B, 2], [A \,.\, C, 2]) \in O_\cap \quad [A \,.\, B, 2] \,\bar{\cap}\, [\ 1 \,.\, C.$ $2] \quad [A, 1] \Rightarrow ([A, 1] \dot{-} [B, 1], [A, 1] \,.\, [C, 1]) \in O_\cap \quad ([A, 1] \,.\, [B, 1\ )$ $\bar{\cap}\, ([A, 1] \dot{-} [C, 1]) - [A, 1]$.

Пусть далее

$$\varphi : \mathscr{P} \ \ \succ \mathscr{P} \ \ A \to [A, 1]; \quad \lambda : \mathscr{L} \ \ \succ \mathscr{L} \ \ a \mapsto [a, 2] \ \text{ т. е.}$$

$A^\varphi \quad [A, 1]$, $a^\lambda \quad [a, 2]$. Покажем, что (φ, λ) является изоморфизмом парной системы $P \quad (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \,.\,, \cap)$ на парную систему $P \quad (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \,.\,.\, \cap)$.

1) $(A, B) \in O. \Leftrightarrow ([A, 1], [B, 1]) \in O \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O$. Кроме того $(A \,.\, B)^\lambda = [A \,.\, B, 2] \quad [A, 1] \dot{-} [B, 1] - A^\varphi \dot{-} B^\varphi$.

2) $(a, b) \in O_\cap \Leftrightarrow ([a, 2], [b, 2]) \in O_\cap \Leftrightarrow (a^\lambda, b^\lambda) \in O_\cap$. Кроме того: $(a \cap b)^\varphi$ $- [a \cap b, 1] - [a, 2] \,\bar{\cap}\, [b, 2] \quad a^\lambda \,\bar{\cap}\, b^\lambda$.

Из этой теоремы следует, что при исследовании парных систем достаточно ограничиться обыкновенными парными системами. Если P_1 $- (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, ._1, \cap_1)$ и $P_2 \quad (\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, ._2, \cap_2)$ — две обыкновенные парные системы, то изоморфизм P_1 на P_2 можно понимать как биективное отображение $\varrho : \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{L}_1 \to \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{L}_2$, удовлетворяющее условию (10) и сохраняющее частичные операции.

Парную систему $(\mathscr{P}, \mathscr{P}, \,.\,, \cap) = : (\mathscr{P}, \,.\,, \cap)$ будем называть парной предсистемой. Изоморфизмом парной предсистемы $(\mathscr{P}_1, ._1, \cap_1)$ на парную предсистему $(\mathscr{P}_2, ._2, \cap_2)$ будем называть всякое биективное отображение $\varphi : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(i′) $(A, B) \in O_{.1} \Leftrightarrow (A^{\varphi}, B^{\varphi}) \in O_{.2} \quad (A_{.1}B)^{\varphi} = A^{\varphi}{}_{.2}B^{\varphi}$

(ii′) $(A, B) \in O_{\cap 1} \Leftrightarrow (A^{\varphi}, B^{\varphi}) \in O_{\cap 2} \wedge (A_{\cap 1}B)^{\varphi} = A^{\varphi}_{\cap 2}B^{\varphi}$.

Естественно, что для изоморфизма парной предсистемы на общую парную систему будет иметь место первоначальное определение.

Теорема 9. *Пусть* $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ — *обыкновенная парная система, удовлетворяющая условию* $\operatorname{card} \mathscr{P} = \operatorname{card} \mathscr{L}$, $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ *биективное отображение и* $\overset{\alpha}{\cdot}$, $\overset{\alpha}{\cap}$ — *частичные операции в* $\mathscr{P}$ *определенные следующим образом:*

$$\forall A, B \in \mathscr{P} \;\; (A, B) \in O_{\cdot}^{\alpha} \Leftrightarrow (A, B) \in O_{\cdot} \;\; A \overset{\alpha}{\cdot} B = (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}}$$

$$(20) \qquad \forall A, B \in \mathscr{P} \;\; (A, B) \in O_{\cap}^{\alpha} \Leftrightarrow (A^{\alpha}, B^{\alpha}) \in O_{\cap} \;\; A \overset{\alpha}{\cap} B = A^{\alpha} \cap B^{\alpha}.$$

Тогда тройка $P^{\alpha} := (\mathscr{P}, \overset{\alpha}{\cdot}, \overset{\alpha}{\cap})$ *является парной предсистемой изоморфной парной системе* P.

Доказательство. Прежде всего покажем, что условия PS 1 и PS 2 удовлетворены.

PS 1: $(A, B), (C, D) \in O_{\cdot}^{\alpha} \wedge A \overset{\alpha}{\cdot} B = C \overset{\alpha}{\cdot} D \wedge B \neq C \Rightarrow (A, B), (C, D) \in O_{\cdot} \quad (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} = (C \,.\, D)^{\alpha^{-1}} \quad B \neq C \Rightarrow (A, B), (C, D) \in O_{\cdot} \quad A \,.\, B \quad C \,.\, D \quad B \neq C \Rightarrow (B, C) \in O_{\cdot} \quad A \,.\, B = B \,.\, C \Rightarrow (B, C) \in O_{\cdot} \quad (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} \quad (B \,.\, C)^{\alpha^{-1}} \Rightarrow (B, C) \in O_{\overset{\alpha}{\cdot}} \wedge A \overset{\alpha}{\cdot} B = B \overset{\alpha}{\cdot} C$.

PS 2: $(A, B), (A, C) \in O_{\overset{\alpha}{\cdot}} \quad A \overset{\alpha}{\cdot} B \neq A \overset{\alpha}{\cdot} C \Rightarrow (A, B), (A, C) \in O_{\cdot} \quad (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} \neq (A \,.\, C)^{\alpha^{-1}} \Rightarrow (A, B), (A, C) \in O_{\cdot} \quad A \,.\, B \neq A \,.\, C \Rightarrow (A \,.\, B, A \,.\, C) \in O_{\cap} \quad (A \,.\, B) \cap (A \,.\, C) = A \Rightarrow ((A \,.\, B)^{\alpha^{-1}}, (A \,.\, C)^{\alpha^{-1}}) \in O_{\cap}^{\alpha} \wedge (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} \overset{\alpha}{\cap} (A \,.\, C)^{\alpha^{-1}} \quad A \Rightarrow (A \overset{\alpha}{\cdot} B, A \overset{\alpha}{\cdot} C) \in O_{\cap}^{\alpha} \wedge (A \overset{\alpha}{\cdot} B) \overset{\alpha}{\cap} (A \overset{\alpha}{\cdot} C) \quad A$.

Теперь докажем, что парная система P изьморфна предсистеме P^{α}. Рассмотрим следующую пару отображений: $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $A \mapsto A$; $\lambda : \mathscr{L} \to \mathscr{P}$, $a \mapsto a^{\alpha^{-1}}$. Значит: $\forall A \in \mathscr{P}\; A^{\varphi} = A$; $\forall a \in \mathscr{L}\; a^{\lambda} = a^{\alpha^{-1}}$. Достаточно показать, что (φ, λ) удовлетворяет условиям (i), (ii).

(i): $(A, B) \in O_{\cdot} \Leftrightarrow (A, B) \in O_{\overset{\alpha}{\cdot}} \Leftrightarrow (A^{\varphi}, B^{\varphi}) \in O_{\overset{\alpha}{\cdot}}$. Кроме того имеет место:

$(A \,.\, B)^{\lambda} \quad (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} \quad A \overset{\alpha}{\cdot} B \quad A^{\varphi} \overset{\alpha}{\cdot} B^{\varphi}$.

(ii): $(a, b) \in O_{\cap} \Leftrightarrow (a^{\alpha^{-1}}, b^{\alpha^{-1}}) \in O_{\cap}^{\alpha} \Leftrightarrow (a^{\lambda}, b^{\lambda}) \in O_{\cap}^{\alpha}$. Кроме того имеет место: $(a \cap b)^{\varphi} \quad a \cap b = a^{\alpha^{-1}} \overset{\alpha}{\cap} b^{\alpha^{-1}} \quad a^{\lambda} \overset{\alpha}{\cap} b^{\lambda}$.

Замечание. Если $\beta : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ — другое биективное отображение, то парные предсистемы P^{α}, P^{β} изоморфны в силу определения изоморфизма двух парных систем, но они не являются изоморфными в силу определения изоморфизма двух парных предсистем.

Теорема 10. *Пусть* $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ *парная система, для которой* $\operatorname{card} \mathscr{P} = \operatorname{card} \mathscr{L}$. *Если* $\mathscr{S}$ *— любое множество, имеющее одну и ту же мощность как множества* $\mathscr{P}, \mathscr{L}$; $\sigma : \mathscr{S} \to \mathscr{P}$, $\tau : \mathscr{S} \to \mathscr{L}$ *— биективные отображения и* $\overset{\sigma,\tau}{\cdot}$, $\overset{\sigma,\tau}{\cap}$ *частичные бинарны операции в* $\mathscr{S}$ *определенные отношениями:*

$$(A, B) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cdot}} :\Leftrightarrow (A^\sigma, B^\sigma) \in O_{.} \quad A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B := (A^\sigma \,.\, B^\sigma)^{\tau^{-1}}$$

$$(A, B) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cap}} :\Leftrightarrow (A^\tau, B^\tau) \in O_\cap \quad A \overset{\sigma,\tau}{\cap} B := (A^\tau \cap B^\tau)^{\sigma^{-1}} \tag{21}$$

то тройка $P^{\sigma,\tau} := (\mathscr{S}, \overset{\sigma,\tau}{\cdot}, \overset{\sigma,\tau}{\cap})$ *является парной предсистемой изоморфной системе* P.

Доказательство.

PS 1: $(A, B), (C, D) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cdot}}$, $A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B = C \overset{\sigma,\tau}{\cdot} D$, $B \neq C \to (A^\sigma, B^\sigma)$, $(C^\sigma, D^\sigma) \in O_{.}$, $(A^\sigma \,.\, B^\sigma)^{\tau^{-1}} = (C^\sigma \,.\, D^\sigma)^{\tau^{-1}} \wedge B^\sigma \neq C^\sigma \to (B^\sigma, C^\sigma) \in O_{.}$, $A^\sigma \,.\, B^\sigma = B^\sigma \,.\, C^\sigma \Rightarrow (B, C) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cdot}} \wedge A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B = B \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C$

PS 2: $(A, B), (A, C) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cdot}}$, $A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B \neq A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C \to (A^\sigma, B^\sigma), (A^\sigma, C^\sigma) \in O_{.}$, $(A^\sigma \,.\, B^\sigma)^{\tau^{-1}} \neq (A^\sigma \,.\, C^\sigma)^{\tau^{-1}} \Rightarrow (A^\sigma \,.\, B^\sigma, A^\sigma \,.\, C^\sigma) \in O_\cap$, $(A^\sigma \,.\, B^\sigma) \cap \cap (A^\sigma \,.\, C^\sigma) = A^\sigma \Rightarrow ((A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B)^\tau, (A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C)^\tau) \in O_\cap$, $(A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B)^\tau \cap (A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C)^\tau = A^\sigma \Rightarrow (A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B, A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cap}}$, $[(A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B) \overset{\sigma,\tau}{\cap} (A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C)]^\sigma = A^\sigma$, $(A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B, A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cap}}$, $(A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B) \overset{\sigma,\tau}{\cap} (A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} C) = A$.

Таким образом доказано, что $P^{\sigma,\tau}$ — парная предсистема. Остальная часть утверждения очевидна, потому что из (21) непосредственно следует, что пара (σ, τ) является изоморфизмом парной системы $P^{\sigma,\tau}$ на парную систему P.

В этих теоремах даны две конструкции парных предсистем. Из следующей теоремы вытекает, что эти конструкции являются эквивалентными.

Теорема 11. *Пусть* $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ *— обыкновенная парная система, обладающая свойством* $\operatorname{card} \mathscr{P} = \operatorname{card} \mathscr{L}$, $\mathscr{S}$ *некоторое множество, имеющее одну и ту же мощность как множества* $\mathscr{P}, \mathscr{L}$ *и* $\sigma : \mathscr{S} \to \mathscr{P}$, $\tau : \mathscr{S} \to \mathscr{L}$, $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ *биективные отображения, удовлетворяющие условию* $\tau = \sigma\alpha$. *Тогда парные предсистемы* P^α *и* $P^{\sigma,\tau}$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\tau = \sigma\alpha$. Докажем, что отображение σ является изоморфизмом парной предсистемы $P^{\sigma,\tau} = (\mathscr{S}, \overset{\sigma,\tau}{\cdot}, \overset{\sigma,\tau}{\cap})$ на парную предсистему $P = (\mathscr{P}, \overset{\alpha}{\cdot}, \overset{\alpha}{\cap})$.

(i′) $(A, B) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cdot}} \Leftrightarrow (A^\sigma, B^\sigma) \in O_{.} \Leftrightarrow (A^\sigma, B^\sigma) \in O_{\overset{\alpha}{\cdot}}$ и
$(A \overset{\sigma,\tau}{\cdot} B)^\sigma = (A^\sigma \,.\, B^\sigma)^{\tau^{-1}\sigma} = (A^\sigma \,.\, B^\sigma)^{\alpha^{-1}} = A^\sigma \overset{\alpha}{\cdot} B^\sigma$

(ii′) $(A, B) \in O_{\overset{\sigma,\tau}{\cap}} \Leftrightarrow (A^\tau, B^\tau) \in O_\cap \Leftrightarrow (A^{\tau\alpha^{-1}}, B^{\tau\alpha^{-1}}) \in O_{\overset{\alpha}{\cap}} \Leftrightarrow (A^\sigma, B^\sigma) \in O_{\overset{\alpha}{\cap}}$
и $(A \overset{\sigma,\tau}{\cap} B)^\sigma = A^\tau \cap B^\tau = A^{\tau\alpha^{-1}} \overset{\alpha}{\cap} B^{\tau\alpha^{-1}} = A^\sigma \overset{\alpha}{\cap} B^\sigma$.

Из этой теоремы следует, что всякая парная предсистема $P^{\sigma,\tau}$ изоморфна парной предсистеме P^{α}, где $\alpha := \sigma^{-1}\tau$ и обратно, что всякая парная предсистема P^{α} изоморфна парной предсистеме $P^{\sigma,\tau}$, где биективное отображение $\sigma : \mathscr{S} \to \mathscr{P}$ произвольно и $\tau := \sigma\alpha$.

Парную систему $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ будем называть нормальной, если она обладает следующими двумя свойствами:

PSN 1: Если $(a, b), (c, d) \in O_{\cap}$ $\quad a \cap b \quad c \cap d \wedge b \neq c$, то $(b, c) \in O_{\cap}$ $\quad a \cap b \quad b \cap c$

PSN 2: Если $(a, b), (a, c) \in O_{\cap}$ $\quad a \cap b \neq a \cap c$, то $(a \cap b, a \cap c) \in O.$ $\quad (a \cap b) . (a \cap c) = a.$

Следовательно, парная система $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ является нормальной тогда и только тогда, когда четверка $P^* = (\mathscr{L}, \mathscr{P}, \cap, .)$ является тоже парной системой. Эту парную систему будем называть двойтсвенной к парной системе P.

Теорема 12. Пусть $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ — нормальная парная система. Тогда всякая парная система $P - (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \dot{-}, \cap)$, которая изоморфна парной системе P тоже является нормальной.

Доказательство. Пусть (φ, λ) изоморфизм парной системы P на парную систему P. Достаточно показать, что P удовлетворяет условиям PSN 1 и PSN 2.

PSN 1: $(a, b), (c, d) \in O_{\cap} \wedge a \underline{\cap} b - c \underline{\cap} d \quad b \neq c \Rightarrow (a^{\lambda}, b^{\lambda}), (c^{\lambda}, d^{\lambda}) \in O_{\cap}$ $\quad (a^{\lambda} \cap b^{\lambda})^{\varphi-1} = (c^{\lambda} \cap d^{\lambda})^{\varphi\ 1} \wedge b^{\lambda} \neq c^{\lambda} \to (b^{\lambda}, c^{\lambda}) \in O_{\cap} \quad a^{\lambda} \cap b^{\lambda} \quad b^{\lambda} \cap \cap c^{\lambda} \Rightarrow (b^{\lambda}, c^{\lambda}) \in O_{\cap} \wedge (a^{\lambda} \cap b^{\lambda})^{\varphi\ 1} - (b^{\lambda} \cap c^{\lambda})^{\varphi\ 1} \Rightarrow (b, c) \in O_{\cap} \quad a \underline{\cap} b \quad b \underline{\cap} c$

PSN 2: $(a, b), (a, c) \in O_{\underline{\cap}} \wedge a \underline{\cap} b \neq a \underline{\cap} c \Rightarrow (a^{\lambda}, b^{\lambda}), (a^{\lambda}, c^{\lambda}) \in O_{\cap} \wedge (a^{\lambda} \cap \cap b^{\lambda})^{\varphi\ 1} \neq (a^{\lambda} \cap c^{\lambda})^{\varphi-1} \to (a^{\lambda} \cap b^{\lambda}, a^{\lambda} \cap c^{\lambda}) \in O. \wedge (a^{\lambda} \cap b^{\lambda}) . (a^{\lambda} \cap c^{\lambda}) \quad a^{\lambda} \Rightarrow ((a^{\lambda} \cap b^{\lambda})^{\varphi-1}, (a^{\lambda} \cap c^{\lambda})^{\varphi-1}) \in O \wedge [(a^{\lambda} \cap b^{\lambda})^{\varphi-1} \dot{-} (a^{\lambda} \cap c^{\lambda})^{\varphi-1}]^{\lambda} \quad a^{\lambda} \to (a \underline{\cap} b, a \underline{\cap} c) \in O^{\cdot} \wedge [(a \underline{\cap} b)^{\cdot}(a \underline{\cap} c)]^{\lambda} = a^{\lambda} \Rightarrow (a \underline{\cap} b, a \underline{\cap} c) \in \in O^{\cdot} \quad (a \underline{\cap} b)^{\cdot} (a \underline{\cap} c) = a.$

Следствие. Пусть $P - (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ обыкновенная нормальная парная система. Тогда парные предсистемы P^{α}, $P^{\sigma,\tau}$ также являются нормальными.

Теорема 13. *Всякая парная система $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$, для которой существует биективное отображение $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ удовлетворяющее условию:*

(22) $\qquad (A, B) \in O. \Leftrightarrow (A^\alpha, B^\alpha) \in O_\cap \wedge (A . B)^{\alpha^{-1}} = A^\alpha \cap B^\alpha$

является нормальной.

Доказательство. Для упрощения записи положим $\alpha^{-1} = \beta$. Тогда отношение (22) можно написать в виде:

(22′) $\qquad (a, b) \in O_\cap \Leftrightarrow (a^\beta, b^\beta) \in O \wedge a \cap b = (a^\beta . b^\beta)^\beta.$

Докажем, что в P выполняются условия PSN 1 и PSN 2.

PSN 1: $(a, b), (c, d) \in O_\cap \wedge a \cap b = c \cap d \wedge b \neq c \Rightarrow (a^\beta, b^\beta), (c^\beta, d^\beta) \in O. \wedge (a^\beta . b^\beta)^\beta = (c^\beta . d^\beta)^\beta \wedge b^\beta \neq c^\beta \Rightarrow (b^\beta, c^\beta) \in O. \wedge a^\beta . b^\beta = b^\beta . c^\beta \Rightarrow (b^\beta, c^\beta) \in O. \wedge (a^\beta . b^\beta)^\beta = (b^\beta . c^\beta)^\beta \Rightarrow (b, c) \in O_\cap \wedge a \cap b = b \cap c$

PSN 2: $(a, b), (a, c) \in O_\cap \wedge a \cap b \neq a \cap c \Rightarrow (a^\beta, b^\beta), (a^\beta, c^\beta) \in O. \wedge a^\beta . b^\beta \neq a^\beta . c^\beta \Rightarrow (a^\beta . b^\beta, a^\beta . c^\beta) \in O_\cap \wedge (a^\beta . b^\beta) \cap (a^\beta . c^\beta) = a \Rightarrow ((a^\beta . b^\beta)^\beta, (a^\beta . b^\beta)^\beta) \in O. \wedge [(a^\beta . b^\beta)^\beta . (a^\beta . c^\beta)^\beta]^\beta = a^\beta \Rightarrow (a \cap b, a \cap c) \in O. \wedge (a \cap b) . (a \cap c) = a.$

Нормальную парную систему $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$, в которой выполняется условие $P^* = P$ т. е. $\mathscr{P} = \mathscr{L}$ и $. = \cap$, будем называть геометрическим полугруппоидом.

Всякий геометрический полугруппоид является нормальной парной предсистемой. Обратное утверждение не должно быть верным.

Очевидно, что всякий геометрический полугруппоид можно понимать как пару $(\mathscr{P}, .)$, где . является частичной операцией в P удовлетворяющей условию PS 1 и условию

PS 2′: $(a, b), (a, c) \in O. \wedge a . b \neq a . c \Rightarrow (a . b, a . c) \in O. \wedge (a . b) . (a . c) = a.$

Изоморфизмом геометрического полугруппоида $(\mathscr{P}_1, ._1)$ на геометрический полугруппоид $(\mathscr{P}_2, ._2)$ будем называть всякое биективное отображение φ удовлетворяющее условию:

(iii) $\quad (A, B) \in O._1 \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O._2 \wedge (A ._1 B)^\varphi = A^\varphi ._2 B^\varphi.$

Естественно, что если будем говорить о изоморфизме между геометрическим полугруппоидом и общей парной системой, будем считать верным раньше приведенное определение.

Теорема 11. *Пусть $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ обыкновенная парная система и $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ биективное отображение удовлетворяющее условию* (22). *Тогда P^α является геометрическим полугруппоидом изоморфным P.*

Доказательство: На основании теоремы 9 $P^\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{P}, \overset{\alpha}{.}, \overset{\alpha}{\cap})$, где $\overset{\alpha}{.}, \overset{\alpha}{\cap}$ определены отношением (20), является парной предсистемой изоморфной P. Из (20) и (22) очевидно, что $(A, B) \in O_{\overset{\alpha}{.}} \Leftrightarrow (A, B) \in O_{\cap}^{\alpha}$. Кроме того имеет место: $A \overset{\alpha}{\cap} B = A^\alpha \cap B^\alpha = (A \,.\, B)^{\alpha^{-1}} = A \overset{\alpha}{.} B$. Это показывает, что $\overset{\alpha}{.} = \overset{\alpha}{\cap}$ т. е. что P^α является геометрический полугруппоид.

Теорема 15. *Для всякого геометрического полугруппоида* $(\mathscr{P}, .)$ *существует такая (изоморфная) парная обыковенная система* $\overline{P} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \dot{-}, \overline{\cap})$ *и отображение* $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$, *удовлетворяющее условию* (22), *что* $(\mathscr{P}, .)$ *изоморфен* $\overline{P}^\alpha$.

Доказательство. По теореме 8 $(\mathscr{P}, .) - (\mathscr{P}, \mathscr{P}, ., \cap - .)$ изоморфен обыкновенной парной системе $\overline{P} = (\mathscr{P} \times \{1\}, \mathscr{P} \times \{2\}, \dot{-}, \overline{\cap})$, где $\dot{-}$, $\overline{\cap}$ определены соотношением (19). Рассмотрим отображение $\alpha : \mathscr{P} \times \{1\} \to \mathscr{P} \times \{2\}$, $[A, 1] \mapsto [A, 2]$. Очевидно, что $([A, 1], [B, 1]) \in O_{\dot{-}} \Leftrightarrow (A, B) \in O_. \Leftrightarrow (A, B) \in O_\cap \Leftrightarrow ([A, 2], [B, 2]) \in O_{\overline{\cap}} \Leftrightarrow ([A, 1]^\alpha, [B, 1]^\alpha) \in O_{\overline{\cap}}$. Кроме того: $[A, 1]^\alpha \overline{\cap} [B, 1]^\alpha = [A, 2] \overline{\cap} [B, 2] = [A \cap B, 1] = [A \,.\, B, 1] = [A \,.\, B, 2]^{\alpha^{-1}} = ([A, 1] \dot{-} [B, 1])^{\alpha^{-1}}$ т. е. имеет место (22). Итак к парной системе $\overline{P} = (\mathscr{P} \times \{1\}, \mathscr{P} \times \{2\}, \dot{-}, \overline{\cap})$ возможно построить геометрический полугруппоид $\overline{P}^\alpha$ изоморфный $\overline{P}$, значит и P. Покажем, что геометрический полугруппоид P изоморфен полугруппоиду $P^\alpha = (\mathscr{P} \times \{1\}, \overset{\alpha}{.})$ также определению (iii). Очевидно, что $([A, 1], [B, 1]) \in O_{\overset{\alpha}{.}} \Leftrightarrow ([A, 1], [B, 1]) \in O_. \Leftrightarrow (A, B) \in O_.$. Кроме того, для $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{P} \times \{1\}$, $A \mapsto [A, 1]$ имеет место: $(A \,.\, B)^\varphi = [A \,.\, B, 1] = [A \,.\, B, 2]^{\alpha^{-1}} = ([A, 1] \dot{-} [B, 1])^{\alpha^{-1}} = (A^\varphi \dot{-} B^\varphi)^{\alpha^{-1}} = A^\varphi \overset{\alpha}{.} B^\varphi$.

Теорема 16. *Пусть* P_i, $i = 1, 2$ *обыкновенные парные системы и* $\alpha_i : \mathscr{P}_i \to \mathscr{L}_i$, *биективные отображения удовлетворяющие условию* (22). *Тогда геометрические полугруппоиды* $P_1^{\alpha_1}$, $P_2^{\alpha_2}$ *изоморфны тогда и только тогда, если существует изоморфизм* $(\varphi, \lambda) : P_1 \to P_2$ *так, что* $\alpha_2 = \varphi^{-1}\alpha_1\lambda$.

Доказательство. Пусть $P_i = (\mathscr{P}_i, \mathscr{L}_i, ._i, \cap_i)$, где $i = 1, 2$. В силу (22) имеет место: $(A, B) \in O_{.i} \Leftrightarrow (A^{\alpha_i}, B^{\alpha_i}) \in O_{\cap i}$ и $(A ._i B)^{\alpha_i^{-1}} = A^{\alpha_i} \cap_i B^{\alpha_i}$. Если положить $\overset{\alpha_i}{.} = \circ_i$ и $\overset{\alpha}{\cap}_i = \circledcap_i$, то на основании отношений (20) получим: $(A, B) \in O_{\circ_i} \Leftrightarrow (A, B) \in O_{.i}$, $(A ._i B) = (A ._i B)^{\alpha_i^{-1}} = \circledcap_i = \circ_i$.

1) Предположим, что (φ, λ) изоморфизм P_1 на P_2 удовлетворяющий условию (22). Тогда

$$(A, B) \in O_{\circ 1} \Leftrightarrow (A, B) \in O_{.1} \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{.2} \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\circ 2}.$$

Кроме того:

$$(A \circ_1 B)^\varphi = (A ._1 B)^{\alpha_1^{-1}\varphi} = (A^\varphi ._2 B^\varphi)^{\lambda^{-1}\alpha_1^{-1}\varphi} = (A^\varphi \circ_2 B^\varphi)^{\alpha_2\lambda^{-1}\alpha_1^{-1}\varphi} =$$

$$= (A^\varphi \circ_2 B^\varphi)^{\varphi^{-1}\alpha_1\lambda\lambda^{-1}\alpha_1^{-1}\varphi} = A^\varphi \circ_2 B^\varphi.$$

Итак мы показали, что φ является изоморфизмом геометрического полу группоида $P_1^{\varkappa_1}$ $(\mathscr{P}_1, {}_1)$ на $P_2^{\varkappa_2}$ $(\mathscr{P}_2, {}_2)$.

2) Теперь предположим, что φ изоморфизм $P_1^{\varkappa_1}$ на $P_2^{\varkappa_2}$, т. е. что он является биективным отображением $\mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$ удовлетворяющим условию: $(A, B) \in O_{\cap 1} \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\cap 2}$ и $(A \cap_1 B)^\varphi = A^\varphi \cap_2 B^\varphi$. Тогда $\lambda : = \varkappa_1^{-1} \varphi \varkappa$ (df) $(\mathscr{L}_1 \xrightarrow{\varkappa_1^{-1}} \mathscr{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{P}_2 \xrightarrow{\varkappa_2} \mathscr{L}_2)$ является биективным отображением $\mathscr{L}_1$ на $\mathscr{L}$. Кроме того:

а) $(A, B) \in O._1 \Rightarrow (A, B) \in O_{\cdot 1} \Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\cdot 2}$ (A^φ, B^φ) $O.$ и $(A \cdot_1 B)^\lambda$ $[(A \cdot_1 B)^{\varkappa_1^{-1}}]^{\varphi\varkappa_2}$ $[(A \cdot_1 B)^\varphi]^{\varkappa_2}$ $(A^\varphi \cdot_2 B^\varphi)^\varkappa$ $A^\varphi \cdot_2 B$

б) (A, B) $O_{\cap 1}$ $(A^{\varkappa_1^{-1}}, B^{\varkappa_1^{-1}}) \in O._1 \Rightarrow (A^{\varkappa_1^{-1}\varphi}, B^{\varkappa_1^{-1}\varphi})$ $O._2 \Leftrightarrow (A^{\varkappa}$ $B^{\varkappa^{-1}\varphi\varkappa_2}) \in O_{\cap 2} \Leftrightarrow (A^\lambda, B^\lambda) \in O_{\cap 2}$ и $(A \cap_1 B)^\varphi$ $[(A^{\varkappa^{-1}} \cdot_1 B^{\varkappa_1^{-1}})^{\varkappa_1^{-1}\varphi}$ $[A^{\varkappa_1^{-1}} \cdot_1 B^{\varkappa_1^{-1}}]^\varphi$ $A^{\varkappa_1^{-1}\varphi} \cdot_2 B^{\varkappa_1^{-1}\varphi}$ $(A^{\varkappa_1^{-1}\varphi} \cdot_2 B^{\varkappa_1^{-1}\varphi})^{\varkappa^{-1}}$ $(A^{\varkappa^{-1}\varphi} \cap$ $\cap_2 B^{\varkappa_1^{-1}\varphi\varkappa})$ $A^\lambda \cap_2 B^\lambda$.

Примечание. Свойства частичной операции определенной в геометрическом полугруппоиде более подробно исследованы в рабьте [2 В этой работе указаны необходимые и достаточные условия для того чтобы общий полугруппоид можно было считать геометрическим.

2. Примеры парных систем

Пример 1. Рассмотрим множества: $\mathscr{P}$ $\{A, B, C, D, E\}$, $\mathscr{L}$ $\{x, y, z, t\}$, $O.$ $\{(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (A, D), (D, A), (B, C), (C, B)$ $(B, D), (D, B), (C, D), (D, C), (A, E), (E, A), (B, E), (E, B)\}$, $O_\cap$ $\{(x, y)$, $(y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y), (x, t), (t, x)$ и отображения: $. : O. \to \mathscr{L}$ $\cap : O_\cap \to \mathscr{P}$ определенные следующим образом:

$$. : A . B = B . A = x,\ A . C = C . A = x,\ A . D = D . A = x,\ B . C = C . B = x,\ B . D = D . B = x,\ C . D = D . C = x,\ A . E = E . A = y,\ B . E = E . B = z$$

$$\cap : x \cap y = y \cap x = A, x \cap z = z \cap x = B, y \cap z = z \cap y = E, x \cap t = t \cap x = A$$

Нетрудно показать, что четверка P $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ удовлетворяет условиям PS 1 и PS 2 т. е. является парной системой. Легко можно показать что эта парная система удовлетворяет тоже условию PSN 2. Проверим, будет-ли условие PSN 1 выполнено для элементов (x, y), $(t, x) : (x, y)$. $(t, x) \in O_\cap$ $x \cap y = A$ $t \cap x$ $y \neq t$. Так как $(y, t) \notin O_\cap$, условие PSN 1 для этих элементов не выполняется и нарная система P $(\mathscr{P}$, $\mathscr{L}, ., \cap)$ не является нормальной.

Пример 2. Рассмотрим множества P, $\mathscr{L}$, $O_.$ указанные в примере 1, множество $O_{\cap'} = O_\cap \cup \{(y, t), (t, y)\}$; отображение . определенное в примере 1 и отображение $\cap' : O_{\cap'} \to \mathscr{P}$ определенное следующим образом:

$$\forall (\xi, \eta) \in O_\cap \quad \xi \cap' \eta = \xi \cap \eta \quad \text{и} \quad y \cap' t = t \cap' y = A.$$

Четверка $P' = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap')$ удовлетворяет условиям PS 1, PS 2 и, следовательно, она является нормальной парной системой.

Еще приведем пример парной системы, которая не является нормальной, так как она не удовлетворяет условию PSN 2.

Пример 3. Рассмотрим снова множество $\mathscr{P} = \{A, B, C, D, E\}$, множество $\mathscr{L} = \{x, y, z\}$, $O_. = \{(A, B), (B, A), (C, D), (D, C), (C, E), (E, C)\}$, $O_\cap = \{(x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\}$ и отображения $. : O_. \to \mathscr{L}$, $\cap : O_\cap \to \mathscr{P}$ определенные следующим образом:

$$. : A . B = B . A = y, \; C . D = D . C = x, \; C . E = E . C = z$$

$$\cap : x \cap z = z \cap x = C, \; y \cap z = z \cap y = A, \; x \cap y = y \cap x = E.$$

Так как множество $\mathscr{P}$ (или $O_.$) не содержит элементов удовлетворяющих предположениям PS 1, то это свойство выполнено тривиальным образом. Нетрудно проверить, что условиям PS 2 удовлетворяют только элементы $(C, D), (C, E) \in O_.$. Проверим, удовлетворяют ли они также утверждению PS 2.

$$(C, D), (C, E) \in O_. \Rightarrow C . D = x \neq z = C . E \Rightarrow (C . D, C . E) = (x, z) \in O_\cap \Rightarrow (C . D) \cap (C . E) = x \cap z = C.$$

Из предшествующего очевидно, что $P = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, ., \cap)$ является парной системой. Остается еще проверить выполнение свойств PSN 1, PSN 2. Очевидно, что предположениям PSN 1 не удовлетворяет ни одна пара элементов множества $\mathscr{P}$ (более точно $O_.$) и условиям PSN 2 удовлетворяют только элементы (x, y), (x, z). Проверим, имеет ли для них место утверждение PSN 2:

$(x, y), (x, z) \in O_\cap \Rightarrow x \cap y = E \neq C = x \cap z$. Итак, на основании PSN 2 было бы $(x \cap y, x \cap z) \in O_. \Rightarrow (x \cap y) . (x \cap z) = x$. Последнее равенство неверно, так как имеет место: $(x \cap y) . (x \cap z) = E . C = z$. Следовательно, парная система не является нормальной.

3. Некоторые отношения между частичными плоскостями и парными системами

Пусть $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ — частичная плоскость и $._{\mathscr{I}}$, $\cap_{\mathscr{I}}$ частичные операции определенные следующим образом:

$$(A, B) \in O_{\cdot\mathscr{I}} \Leftrightarrow A \neq B \wedge \exists x \in \mathscr{L}\ A, BIx. \text{ То } A \cdot_{\mathscr{I}} B := x$$

(23) $$(a, b) \in O_{\cap\mathscr{I}} \Leftrightarrow a \neq b \wedge \exists Y \in \mathscr{P}\ YIa, b. \text{ То } a \cap_{\mathscr{I}} b := Y$$

Так как $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ частичная плоскость, элементы x, Y определяются однозначно.

Теорема 17. *Четверка* $p(\mathscr{I}) := (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \cdot_{\mathscr{I}}, \cap_{\mathscr{I}})$ *является нормальной парной системой обладающей следующим свойством:*

(24) $$p(\mathscr{I}^*) = [p(\mathscr{I})]^*.$$

Доказательство. В работе [4] доказано, что $p(\mathscr{I})$ является парной системой. Покажем, что парная система $p(\mathscr{I})$ является нормальной.

PSN 1: Пусть $(a, b), (c, d) \in O_{\cap\mathscr{I}} \wedge a \cap_{\mathscr{I}} b = c \cap_{\mathscr{I}} d \Rightarrow b = c$. Тогда $a \cap_{\mathscr{I}} bIa, b \wedge c \cap_{\mathscr{I}} dIc, d \wedge b \neq c \Rightarrow a \cap_{\mathscr{I}} bIb, c \wedge b \neq c \Rightarrow (b, c) \in O_{\cap\mathscr{I}} \Rightarrow a \cap_{\mathscr{I}} b = b \cap_{\mathscr{I}} c$.

PSN 2: Пусть $(a, b), (a, c) \in O_{\cap\mathscr{I}} \wedge a \cap b \neq a \cap c$. Тогда $a \cap_{\mathscr{I}} bIa, b \wedge a \cap_{\mathscr{I}} cIa, c \Rightarrow a \cap_{\mathscr{I}} b, a \cap_{\mathscr{I}} cIa \wedge a \cap_{\mathscr{I}} b \neq a \cap_{\mathscr{I}} c \Rightarrow (a \cap_{\mathscr{I}} b, a \cap_{\mathscr{I}} c) \in O_{\cdot\mathscr{I}} \Rightarrow (a \cap_{\mathscr{I}} b) \cdot_{\mathscr{I}} (a \cap_{\mathscr{I}} c) = a$.

Остается показать выполнение равенства (24). Очевидно, что: $p(\mathscr{I}^*) = [p(\mathscr{I})]^*$.

а) $(a, b) \in O_{\cdot\mathscr{I}^*} \Leftrightarrow a \neq b \wedge \exists x \in \mathscr{P}\ a, bI^{-1}X \Rightarrow a \neq b \wedge \exists X \in \mathscr{P}\ XIa, b \Leftrightarrow (a, b) \in O_{\cap\mathscr{I}}$. Кроме того: $a, bI^{-1}X \Rightarrow X = a \cdot_{\mathscr{I}^*} b$ и $XIa, b \Rightarrow X = a \cap_{\mathscr{I}} b$. Итак $a \cdot_{\mathscr{I}^*} b = a \cap_{\mathscr{I}} b$. Таким образом мы показали, что $\cdot_{\mathscr{I}^*} = \cap_{\mathscr{I}}$.

б) $(A, B) \in O_{\cap\mathscr{I}^*} \Leftrightarrow A \neq B \wedge \exists x \in \mathscr{L}\ xI^{-1}A, B \Leftrightarrow A \neq B \wedge \exists x \in \mathscr{L}\ A, BIx \Leftrightarrow (A, B) \in O_{\cdot\mathscr{I}}$. Кроме того: $xI^{-1}A, B \Rightarrow A \cap_{\mathscr{I}^*} B = x$ и $A, BIx \Rightarrow A \cdot_{\mathscr{I}} B = x$. Итак $A \cap_{\mathscr{I}^*} B = A \cdot_{\mathscr{I}} B$. Таким образом показали, что $\cap_{\mathscr{I}^*} = \cdot_{\mathscr{I}}$.

Теорема 18. *Если частичная плоскость* $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I)$ *является симметричной, то* $p(\mathscr{I})$ *является геометрическим полугруппоидом.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\mathscr{I} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, I) = (\mathscr{L}, \mathscr{P}, I^{-1}) = \mathscr{I}^* \Rightarrow p(\mathscr{I}) = p(\mathscr{I}^*)$. Но по теореме 17 $p(\mathscr{I}^*) = [p(\mathscr{I})]^*$. Следовательно, $p(\mathscr{I}) = [p(\mathscr{I})]^*$ т. е. $(\mathscr{P}, \mathscr{L}, \cdot_{\mathscr{I}}, \cap_{\mathscr{I}}) = (\mathscr{L}, \mathscr{P}, \cap_{\mathscr{I}}, \cdot_{\mathscr{I}})$, или же $\mathscr{L} = \mathscr{P} \wedge \cdot_{\mathscr{I}} = \cap_{\mathscr{I}}$.

Теорема 19. *Если* (φ, λ) *изоморфизм частичной плоскости* $\mathscr{I}_1 = (\mathscr{P}_1, \mathscr{L}_1, I_1)$ *на частичную плоскость* $\mathscr{I}_2 = (\mathscr{P}_2, \mathscr{L}_2, I_2)$, *то* (φ, λ) *является тоже изоморфизмом парной системы* $p(\mathscr{I}_1)$ *на парную систему* $p(\mathscr{I}_2)$

Доказательство. $p(\mathcal{I}_1) = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \cdot_{\mathcal{I}_1}, \cap_{\mathcal{I}_1})$, $p(\mathcal{I}_2) = (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \cdot_{\mathcal{I}_2}, \cap_{\mathcal{I}_2})$.

а) $A, B \in O_{\cdot\mathcal{I}_1} \Leftrightarrow A \neq B \wedge \exists x \in \mathcal{L}\ A, BI_1x \Leftrightarrow A^\varphi \neq B^\varphi \wedge A^\varphi, B^\varphi I_2x^\lambda \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\cdot\mathcal{I}_2}$. Кроме того: $A, BI_1x \wedge A^\varphi, B^\varphi I_2x^\lambda \Rightarrow A^\varphi \cdot_{\mathcal{I}_2} B^\varphi = x^\lambda =$ $(A \cdot_{\mathcal{I}_1} B)^\lambda$.

б) $(a, b) \in O_{\cap\mathcal{I}_1} \Leftrightarrow a \neq b \wedge \exists Y \in \mathcal{P}\ YI_1a, b \Leftrightarrow a^\lambda \neq b^\lambda \wedge Y^\varphi I_2a^\lambda, b^\lambda \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a^\lambda, b^\lambda) \in O_{\cap\mathcal{I}_2}$. Кроме того: $YI_1a, b \wedge Y^\varphi I_2a^\lambda, b^\lambda \Rightarrow a^\lambda \cap_{\mathcal{I}_2} b^\lambda = Y^\varphi =$ $(a \cap_{\mathcal{I}_1} b)^\varphi$.

Пусть теперь $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \cdot, \cap)$ — парная система и I_P отношение в $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ определенное следующим образом:

(25) $$AI_Pa \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{P} \quad (A, B) \in O_\cdot \wedge A \cdot B = a.$$

В работе [4] (стр. 5—6) доказано, что тройка $\mathcal{J}(P) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I_P)$ является частичной плоскостью и что имеют место следующие равенства: $\cdot_{\mathcal{J}(P)} \subseteq \cdot$, $\cap_{\mathcal{J}(P)} \subseteq \cap$.

Теорема 20. *Если (φ, λ) является изоморфизмом парной системы $P_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \cdot_1, \cap_1)$ на парную систему $P_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \cdot_2, \cap_2)$, то (φ, λ) является тоже изоморфизмом частичной плоскости $\mathcal{J}(P_1) = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, I_{P_1})$ на частичную плоскость $\mathcal{J}(P_2) = (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, I_{P_2})$.*

Доказательство. 1) $AI_{P_1}a \Rightarrow \exists B \in \mathcal{P}_1\ (A, B) \in O_{\cdot 1} \wedge A \cdot_1 B = a \Rightarrow$ $(A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\cdot 2} \wedge (A \cdot_1 B)^\lambda = A^\varphi \cdot_2 B^\varphi$ т. е. $A^\varphi \cdot_2 B^\varphi = a^\lambda \Rightarrow A^\varphi I_{P_2}a^\lambda$.

2) $A^\varphi I_{P_2}a^\lambda \Rightarrow \exists B^\varphi \in \mathcal{P}_2\ (A^\varphi, B^\varphi) \in O_{\cdot 2}$ и $A^\varphi \cdot_2 B^\varphi = a^\lambda \Rightarrow (A, B) \in O_{\cdot 1}$ и $(A \cdot_1 B)^\lambda = a^\lambda \Rightarrow (A, B) \in O_{\cdot 1} \wedge A \cdot_1 B = a \Rightarrow AI_{P_1}a$.

Из предшествующих теорем очевидно следующее отношение между автополярными частичными плоскостями и геометрическими полугруппоидами:

Пусть $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ — обыкновенная автополярная частичная плоскость и $\varrho = (\varphi, \varphi^{-1})$ ее полярность. В силу теоремы 6 $\mathcal{F}(\mathcal{I}, \varphi) = (\mathcal{P}, I_\varphi)$ является симметричной частичной плоскостью и следовательно на основании теоремы 18 $\mathcal{G}(\mathcal{I}, \varphi) := p[\mathcal{F}(\mathcal{I}, \varphi)]$ является геометрическим полугруппоидом. Очевидно, что $\mathcal{G}(\mathcal{I}, \varphi) = (\mathcal{P}, \circ)$, где $\circ = \cdot_{\mathcal{F}(\mathcal{I},\varphi)}$ т. е. $\circ$ является бинарной частичной операцией в множестве $\mathcal{P}$ определенной следующим образом:

(26) $$(A, B) \in O_\circ \Leftrightarrow A \neq B \wedge \exists X \in \mathcal{P} \quad XIA^\varphi, B^\varphi \text{ и } A \circ B := X.$$

Итак правило $\mathcal{G}$ сопоставляет всякой обыкновенной автополярной частичной плоскости $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ и ее полярности (φ, φ^{-1}) геометрический полугруппоид, где частичная операция определена отношением 26) Прямой вывод взаимного отношения между геометрическими полугруппоидами и автополярными плоскостями можно найти в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. GLOCK: Polaritäten von endlich erzeugten freien Ebenen, Math. Z. 110, 1969, (257 296).

[2] V. HAVEL: Incidence presystems, Mat. Čas. 20, 1970, (166 171).

[3] R. MAGARI: Su certe structture algebriche associate ai piani grafici autop... Boll. Unione Mat. Ital. 18, 1963, (238 251).

[4] G. PICKERT: Projektive Ebenen, Berlin Göttingen Heidelberg 1955

[5] J. ANDRÉ: On generalized incidence structures.

[6] J. ANDRÉ: On flats and dual-flats in incidence structures, Atti del conv. ... geometria combinatoria e sue applicazioni, Perugia 1971, (1 6, 7 15

[7] R. H. F. DENISTON: Note on Devide's plane pre-projective geometries, Glas. mat. 22, 1967, (163 166).

[8] V. DEVIDÉ: Plane pre-projective geometries, Glasnik mat. 20, 1965, 251 260

[9] V. DEVIDÉ: Pre-geometric relations, Glasnik mat. 24, 1969, 243 253.

[10] V. HAVEL: Projective and affine preplanes, Glasnik mat 23, 1968, 257 2..

[11] V. HAVEL: Zerlegungen von Inzidenzstrukturen I, Publ. Math Debrecen 13, 1966, 99 103.

[12] V. HAVEL: Free extensions of coupled systems, Arch. math. Brno 3, 1967, 65 ..

[13] J. NALBACH: 68, Verbandstheoretische Charakterisierung regulärer Pickertscher Inzidenzstrukturen, Diplomarbeit, Saarbrücken.

Поступило 17. 2. 1972

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty SVŠT
Gottwaldovo nám. 2
884 20 Bratislava